Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Bestimmen Sie alle Elemente der Ordnungen 2 und 3 in der Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung besitzt.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Produkte zweier zyklischer Gruppen sind stets zyklisch.

(ii) Produkte zweier nicht-trivialer zyklischer Gruppen sind nie zyklisch.

(iii) Quotienten zyklischer Gruppen sind stets zyklisch.

(iv) Jede nicht-triviale Gruppe besitzt eine nicht-triviale zyklische Untergruppe.

(v) Sind alle echten Untergruppen einer Gruppe zyklisch, so auch die Gruppe selbst.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass wenn $\varphi\colon G \to H$ ein Isomorphismus zwischen zwei endlichen Gruppen ist und $g \in G$ die Ordnung m besitzt, auch $\varphi(g)$ die Ordnung m hat.

(ii) Seien G und H zwei endliche Gruppen mit teilerfremden Ordnungen. Nutzen Sie den Isomorphiesatz um zu zeigen, dass der einzige Homomorphismus von Gruppen $G \to H$ derjenige ist, welcher alle Elemente von G auf das neutrale Element von H abbildet.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei p eine Primzahl und sei G eine nicht-zyklische Gruppe der Ordnung p^2.

(i) Begründen Sie, dass jedes nicht-triviale Element von G die Ordnung p haben muss.

(ii) Wir wählen nun zwei Elemente $a, b \in G$ der Ordnung p mit $b \notin \langle a \rangle$. Wir nehmen mal an, dass a und b nicht kommutieren. Zeigen Sie unter dieser Annahme, dass aba^{-1} keine Potenz von b sein kann.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $aba^{-1} = b^i$ für ein $1 \leq i \leq p-1$ ist und zeigen Sie dann, dass $a^{p-1}ba^{-(p-1)} = b^{i^{p-1}}$ ist. Warum ist $b^{i^{p-1}}$ bereits b?

(iii) Folgern Sie, dass die Menge $G/\langle aba^{-1} \rangle$ aus den Nebenklassen der Form $b^i \langle aba^{-1} \rangle$ für $0 \leq i \leq p-1$ besteht. Führen Sie die Annahme aus Aufgabenteil (ii) zum Widerspruch.
Hinweis: Was können Sie unter Betrachtung von $G/\langle aba^{-1} \rangle$ über a^{-1} aussagen?

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 3

(iv) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon \langle a\rangle \times \langle b\rangle \to G$, $(a^n, b^m) \mapsto a^n b^m$ ein Isomorphismus von Gruppen ist.

(v) Folgern Sie aus den restlichen Teilaufgaben und Aufgabenteil (i) von Aufgabe 3, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung p^2 gibt.