Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 2

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Welche der folgenden Abbildungen sind Homomorphismen von Gruppen?

(i) $f_1 \colon S_3 \to S_3$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$

(ii) $f_2 \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $g(x) \mapsto g(x^2)$

(iii) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \exp(x)$

(iv) $f_4 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ (Standardskalarprodukt)

(v) $f_5 \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times$, $z \mapsto \|z\|^m$ für eine feste ganze Zahl m.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Sei G eine Gruppe und sei $a \in G$. Wir schreiben $c_a \colon G \to G$ für die Konjugation mit a.

(i) Rechnen Sie nach, dass die Abbildung $c \colon G \to \mathrm{Aut}(G)$, $a \to c_a$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Zentrum von G (Def. auf der Rückseite) mit dem Kern von c übereinstimmt. Insbesondere ist das Zentrum eine normale Untergruppe von G.

(iii) Zeigen Sie, dass das Zentrum der Gruppe S_n für $n \geq 3$ die triviale Untergruppe ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Beliebige Schnitte von normalen Untergruppen sind stets normale Untergruppen.

(ii) Bilder normaler Untergruppen unter Homomorphismen von Gruppen sind stets normal.

(iii) Bilder normaler Untergruppen unter surjektiven Homomorphismen von Gruppen sind stets normal.

(iv) Untergruppen mit Index 2 sind stets normal.

(v) Untergruppen mit Index 3 sind stets normal.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Sei K ein Körper. Berechnen Sie für alle $n \geq 1$ das Zentrum (Def. auf der Rückseite) der Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$.

Prof. Dr. Immanuel Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Algebra, SoSe 22
Blatt 2

Zentrum einer Gruppe:
Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist die Teilmenge aller Elemente von G, welche mit allen anderen Elementen von G kommutieren:

$$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \text{ für alle } g \in G\}$$