

Algebra, SoSe 22 Blatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{C}^\times sind Untergruppen?

- (i) $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$
- (ii) $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z) = 0\}$
- (iii) $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) = 0\}$
- (iv) $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| \leq 1\}$
- (v) $\{z \in \mathbb{C}^\times \mid \|z\| = 1\}$

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Bestimmen Sie alle Untergruppen von S_3 . Welche dieser Untergruppen sind abelsch?

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Finden Sie für jede ganze Zahl a eine Gruppenverknüpfung $+_a$ auf der Menge \mathbb{Z} mit a als neutralem Element.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

- (i) Weisen Sie nach, dass die Gruppe \mathbb{Q} von der Teilmenge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 1\}$ erzeugt wird.
- (ii) Zeigen Sie, dass falls A eine endliche Teilmenge von \mathbb{Q} ist, sich die Gruppe $\langle A \rangle$ von einem einzelnen Element erzeugen lässt.
- (iii) Folgern Sie, dass die Gruppe \mathbb{Q} kann nicht durch endlich viele Elemente erzeugt werden.