Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 (2+2+2 Punkte)
Die Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$.

(i) Zeigen Sie mittels ε-δ-Kriterium, dass f auf $(-1,1)$ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $(-1,1)$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(iii) Zeigen Sie, dass f auf kompakten Mengen $D \subset (-1,1)$ gleichmäßig stetig ist. Geben Sie ebenfalls zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein zugehöriges $\delta > 0$ an, so dass

$$\forall x, y \in D : \quad |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 11.2 (2+6 Punkte)

(i) Seien $\varnothing \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für jede Folge $(x_n)_n \subset D$ gilt: $\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolgen, die wie untenstehend gegeben sind, auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{1+(nx)^2}$,

(b) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+(nx)^2}$,

(c) $f_n : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+(nx)^2}$.

Aufgabe 11.3 (2+2 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1], \qquad\qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 17. Januar 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 20. Januar 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.