Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

SoSe 2022
22.09.2022

2. Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....Lösung und Wertung..........

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig beschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) 8 Punkte
A2 (Kurvendiskussion für eine Funktion einer Variablen) 10 Punkte
A3 (Eine (spezielle) logistische Funktion) 10 Punkte
A4 (Umkehrfunktionen) 8 Punkte
A5 (Integrale) 10 Punkte
A6 (Gradient, Richtungsableitung und zugehörige Elastizitäten) 7 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe in zwei Variablen) 12 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 26 (von 65 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $N =$ $\{1, -1\}$ /2P.

(b) $f'(x) =$ $3x^2 + 2x - 1$ $C =$ $\{-1, \frac{1}{3}\}$ /1+2P.

(c) $f''(x) =$ $6x + 2$ $\overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow$ $x \overset{\geq}{\underset{<}{=}} -\frac{1}{3}$. /1P.

In $x_{max} = -1$ liegt ein lokales Maximum , /1P.

in $x_{min} = \frac{1}{3}$ " " " Minimum vor. /1P.

(d) Nein, weil $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. /1P.

(e) $I =$ $(-\infty, -\frac{1}{3}]$. /1P.

Lös. Aufg. 3 (a) $f'(x) =$ $\frac{b \cdot c \cdot e^{cx}}{(1+e^{cx})^2}$ /2P.

(b) $\varepsilon_f(x) =$ $\frac{cx}{1+e^{cx}}$ (c) $I =$ $(0, \infty)$ /2+2P.

(d) $f''(x) =$ $\frac{bc^2 e^{cx}(1-e^{cx})}{(1+e^{cx})^3}$ (e) $J =$ $(0, \infty)$ /2+2P.

Lös. Aufg. 4 (a) $g^{-1} :$ $[0,\infty)$ $\to$ $[1,\infty)$, $y \mapsto g^{-1}(y) =$ $\sqrt{y^2+1}$ /2P.

$f^{-1} :$ $[0,\infty)$ $\to$ $[0,\infty)$, $z \mapsto f^{-1}(z) =$ $\sqrt{e^z - 1}$ /2P.

(b) $f \circ g :$ $[1,\infty)$ $\to$ $[0,\infty)$, $x \mapsto f \circ g(x) =$ $\ln(x^2)\ (= 2\ln(x))$ /2P.

(c) $(f \circ g)^{-1} :$ $[0,\infty)$ $\to$ $[1,\infty)$, $z \mapsto (f \circ g)^{-1}(z) =$ $e^{\frac{z}{2}}\ (= \sqrt{e^z})$ /2P.

Lös. Aufg. 5 (a) $I(x) =$ $\ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\ (= \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|))$ /3P.

(b) $f(x) =$ $(C \cdot)\, x^{-3} \quad (C > 0)$ /2P.

(c) $I =$ $7/3$ /2P.

(d) $M =$ $20/3$ /3P.

Lös. Aufg. 6 (a) $\nabla f(x,y) =$ $(2xy + y^2, x^2 + 2xy)$ /2P.

(b) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y) =$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + 4xy + y^2)$ $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0, y_0) =$ $\frac{13}{\sqrt{2}}$ /2P.

(c) $\vec{\varepsilon}_f(x,y) =$ $\frac{1}{x+y}(2x+y, x+2y)$ /2P.

(d) $\varepsilon_{f,\xi}(x,y) =$ $3/\sqrt{2}$ /1P.

$\Sigma =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

Im Folgenden seien stets $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen.

(a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ ist konvex.
Antwort: richtig $\otimes$ falsch $\bigcirc$ Enthaltung $\bigcirc$ **(2/1/0 P.)**

(b) $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (fg)(x) := f(x)g(x)$ ist konvex.
Antwort: richtig $\bigcirc$ falsch $\otimes$ Enthaltung $\bigcirc$ **(2/1/0 P.)**

(c) $\max(f,g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max(f,g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ ist konvex.
Antwort: richtig $\otimes$ falsch $\bigcirc$ Enthaltung $\bigcirc$ **(2/1/0 P.)**

(d) $\min(f,g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \overset{\min}{\cancel{\max}}(f,g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ ist konvex.
Antwort: richtig $\bigcirc$ falsch $\otimes$ Enthaltung $\bigcirc$ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+3+3+1+1 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

(a) Bestimmen Sie die Menge N aller Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und bestimmen Sie die Menge C aller kritischen Stellen von f.

(c) Handelt es sich dabei um lokale Extremstellen? Wenn ja, welchen Typs?

(d) Nimmt f ein globales Extremum an? (Wenn ja, wo? Wenn nein, warum nicht?)

(e) Bestimmen Sie das größte (möglicherweise uneigentliche) Intervall I, auf dem f konkav ist.

(a) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1) \Rightarrow N = \{\pm 1\}$

(b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 0 \iff x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x \in \{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}\} = \{-\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\}$.

$\Rightarrow C = \{-1, \frac{1}{3}\}$

(c) $f''(x) = 6x + 2 \gtreqless 0 \iff x \gtreqless -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ In $x_{max} := -1$ liegt ein lokales Maximum und bei $x_{min} = \frac{1}{3}$ liegt " " Minimum vor.

(d) Nein, weil $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

(e) Aus dem Ergebnis zu (c) ergibt sich $I = (-\infty, -\frac{1}{3}]$.

3. **(2+2+2+2+2 P.)** Gegeben sei die (spezielle) logistische Funktion

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad x \mapsto f(x) = \frac{be^{cx}}{1 + e^{cx}}$$

mit Parametern $b, c > 0$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und

Quotienten- und Kettenregel ergeben

$$f'(x) = \frac{b}{(1+e^{cx})^2}\left(c \cdot e^{cx}(1+e^{cx}) - e^{cx} \cdot e^{cx} \cdot c\right) = \frac{bc \cdot e^{cx}}{(1+e^{cx})^2}$$

(b) die Elastizität $\varepsilon_f(x)$. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse.

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{x \cdot bce^{cx}}{(1+e^{cx})^2} \, \frac{1+e^{cx}}{b \cdot e^{cx}} = \frac{cx}{1+e^{cx}}.$$

(c) Bestimmen Sie das größte Teilintervall I von $(0, \infty)$, auf dem f unelastisch ist.

Aus $1 + cx + \frac{(cx)^2}{2} + \ldots = e^{cx}$ folgt $0 < cx < 1 + e^{cx}$, so dass $\varepsilon_f(x) \in (0,1)$ $\forall x \in (0,\infty)$. D.h. f ist auf $(0,\infty)$ unelastisch, wir haben also $I = (0,\infty)$.

(d) Berechnen Sie $f''(x)$ und

$$f''(x) = b \cdot c \cdot \frac{d}{dx} \frac{e^{cx}}{(1+e^{cx})^2} = \frac{b \cdot c}{(1+e^{cx})^4}\left(c \cdot e^{cx}(1+e^{cx})^2 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - e^{cx} 2(1+e^{cx}) \cdot e^{cx} \cdot c\right) = \frac{b \cdot c^2}{(1+e^{cx})^3} \cdot e^{cx}(1 - e^{cx})$$

(e) bestimmen Sie das größte Teilintervall J von $(0, \infty)$, auf dem f degressiv wächst.

Wir haben $f'(x) > 0$ $\forall x > 0$ nach (a) und $f''(x) < 0$ $\forall x > 0$ nach (d). Also ist f auf $(0,\infty)$ degressiv wachsend, d.h. es ist $J = (0,\infty)$.

4. **((2+2)+2+2 P.)** Gegeben seien die bijektiven Funktionen

$$g : [1, \infty) \to [0, \infty), \quad x \mapsto g(x) := \sqrt{x^2 - 1}$$

und

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad y \mapsto f(y) := \ln(1 + \cancel{x^2} y^2).$$

Bestimmen Sie

(a) die Umkehrfunktionen g^{-1} und f^{-1},

(b) die Verknüpfung $f \circ g$ und

(c) die Umkehrfunktion $(f \circ g)^{-1}$ dieser Verknüpfung.

Geben Sie auch die jeweiligen Definitions- und Zielbereiche an!

(a) $g(x) = \sqrt{x^2-1} = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2+1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2+1}$, so dass

$g^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty),\ y \longmapsto g^{-1}(y) = \sqrt{y^2+1}$.

$f(y) = \ln(1+y^2) = z \Leftrightarrow 1+y^2 = e^z \Leftrightarrow y^2 = e^z - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{e^z-1}$, also

$f^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ z \longmapsto f^{-1}(z) = \sqrt{e^z - 1}$.

(b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = \ln(1 + g(x)^2) = \ln(1 + x^2 - 1) = \ln(x^2)$

$= 2 \cdot \ln(x)$, also

$f \circ g : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ x \longmapsto f\circ g(x) = 2 \cdot \ln(x)\ (= \ln(x^2))$

(c) $(f \circ g)^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty),\ z \mapsto (f\circ g)^{-1}(z) = e^{\frac{z}{2}} \left(= \sqrt{e^z}\right)$.

5. **(3+2+2+3 P.)** Berechnen Sie

(a) das unbestimmte Integral $I(x) := \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$,

Durch Partialbruchzerlegung gewinnt man die Gleichung

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \quad \text{so dass}$$

$$I(x) = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$$

(b) eine Funktionen $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit der Elastizität $\varepsilon_f(x) = -3$,

$f(x) = Cx^{-3}$ ist aus der Vorlesung bekannt, dabei $C > 0$.

Herleitung: $\varepsilon_f(x) = -3 \iff \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x} \iff (\ln \circ f)'(x) = -\frac{3}{x}$

$\iff \ln(f(x)) = -3\ln(x) + c = \ln(x^{-3}) + c$

$\iff f(x) = C \cdot x^{-3}$.

(c) das uneigentliche Integral $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{x^4}}$,

$$I = \int_0^1 x^{-\frac{4}{7}} dx = \frac{1}{1-\frac{4}{7}} x^{1-\frac{4}{7}} \Big|_0^1 = \frac{7}{3} x^{\frac{3}{7}} \Big|_0^1 = \frac{7}{3}.$$

(d) den Mittelwert M der Funktion $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ auf dem Intervall $[0,4]$.

$$\int_0^4 x^{\frac{1}{2}} + x^2 dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} + \frac{1}{3} \cdot 4^3$$

$$= \frac{1}{3}(16 + 64) = \frac{80}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx = \frac{20}{3}.$$

6. **(2+2+2+1 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty),\quad (x,y)\mapsto f(x,y):=xy(x+y).$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y)$,

(b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y)$ von f nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, zunächst in einem beliebigen Punkt (x,y) und dann speziell in $(x_0,y_0)=(1,2)$,

(c) den Elastizitätsgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y)$ und

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\xi}(x,y)$ für ξ wie in (b).

Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $\nabla f(x,y) = (2xy+y^2,\ x^2+2xy)$

(b) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y) = \langle \xi, \nabla f(x,y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle (1,1), (2xy+y^2, x^2+2xy)\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2+4xy+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+8+4) = \frac{13}{\sqrt{2}}$

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} = \frac{x(2xy+y^2)}{xy(x+y)} = \frac{2x+y}{x+y}$

$\varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y)} = \ \cdots\ = \frac{x+2y}{x+y}$

Erg.: $\vec{\varepsilon}_f(x,y) = \frac{1}{x+y}(2x+y,\ x+2y)$.

(d) $\varepsilon_{f,\xi}(x,y) = \langle \xi, \vec{\varepsilon}_f(x,y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(x+y)}\langle (1,1), (2x+y, x+2y)\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{2}(x+y)}(3x+3y) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

7. **(4+8 P.)** Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2xy + 2y^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass P genau zwei kritische Stellen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Untersuchen Sie anhand der Hesse-Matrix $\mathrm{Hess}P(x,y)$, ob in den kritischen Stellen von P lokale Extrema vorliegen, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Typ.

(a) $\nabla P(x,y) = (x^2 - 2y, 4y - 2x)$ (je 1P.)

$\nabla P(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2y \\ \wedge\ 2y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = x \\ \wedge\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \vee\ (x,y) = (1, \frac{1}{2}) \end{array} \right\}$ (je 1P.)

(b) $\mathrm{Hess}\, P(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (3P.)

weil $\det \mathrm{Hess}\, P(x,y) = 8x - 4 \gtreqless 0 \Leftrightarrow x \gtreqless \frac{1}{2}$ (1P.)

Hieraus folgt:

(i) bei $(x_1, y_1) = (0,0)$ ist $\mathrm{Hess}\, P(x_1, y_1)$ indefinit, (1P.)
daher liegt kein Extremum vor. (1P.)

(ii) bei $(x_2, y_2) = (1, \frac{1}{2})$ ist $\mathrm{Hess}\, P(x_2, y_2)$ definit, und zwar positiv, weil $2x_2 = 2 > 0$ ist. (1P.)
Daher liegt bei (x_2, y_2) ein lokales Minimum vor. (1P.)