Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

SoSe 2022
18.07.2022

1. Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: Lösung und Wertung ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig ~~hand~~beschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen) 10 Punkte
A2 (Wachstumsverhalten einer Funktion) 7 Punkte
A3 (Grenzwerte) 6 Punkte
A4 (Elastizitäten) 6 Punkte
A5 (Integrale) 10 Punkte
A6 (Gradient, Richtungsableitung und zugehörige Elastizitäten) 9 Punkte
A7 (Extremwertaufgabe in zwei Variablen) 12 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden. Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 25 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	Σ	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) $f'(x) =$ $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ $f''(x) =$ $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ / 2P.

(b) min = 1 (c,i) konvex auf $(0,2]$ /2+1P.

(c, ii) degrssiv fallend auf $(0,1]$ /1P.

(c, iii) degressiv wachsend auf $[2,\infty)$ /1P.

Lös. Aufg. 3 (a) $g_1 =$ $3/2$ $g_2 =$ 2 / 2P.

(b) $g_3 =$ 8 $g_4 =$ 6 / 2P.

(c) $g_5 =$ 9 $g_6 =$ 0 / 2P.

Lös. Aufg. 4 (a) $\varepsilon_f(x) =$ $-2x^2$ elastisch auf $(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$ /2+1P.

(b) $\varepsilon_f(x) =$ $\frac{4}{2+x^2}$ elastisch auf $(0,\sqrt{2})$ /2+1P.

Lös. Aufg. 5 (a) $I(x) =$ $\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}$ / 3P.

(b) $f(x) =$ $C\cdot(1+x)^3 \quad (C>0)$ (s. hinten!) / 2P.

(c) $I =$ $\frac{1}{3}\cdot e^{-3}$ / 2P.

(d) $M =$ $\sqrt{2}$ / 3P.

Lös. Aufg. 6 (a) $f(x,y) =$ $\frac{x}{y}$ / 2P.

(b) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y) =$ $\frac{1}{y}$ $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y) =$ $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{y} - \frac{4x}{y^2}\right)$ / 2P.

(c) $\vec{\varepsilon}_f(x,y) =$ $(1,-1)$ / 2P.

(d) $\varepsilon_{f,\eta}(x,y) =$ $-\frac{1}{5}$ / 1P.

(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$ $-\frac{1}{y^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$ $\frac{2x}{y^3}$ / 2P.

$\Sigma =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

Im Folgenden sei stets $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ zweimal differenzierbar mit stetiger zweiter Ableitung.

(a) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$, so ist f injektiv.
Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(b) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$, so ist f unbeschränkt.
Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(c) Gilt für die Elastizität $\varepsilon_f(x) \geq 1$ für alle $x > 0$, so ist f unbeschränkt.
Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(d) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$, so besitzt f kein Maximum.
Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

(e) Ist $f''(x) = 0$ für alle $x > 0$, so ist f eine affin-lineare Funktion.
Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+3 P.)** Für $x \in (0,\infty)$ sei $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$ sowie

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(x-1)$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}(2-x)$$

(b) $\min\{f(x) : x > 0\}$.

$f'(x) \gtreqless 0 \Leftrightarrow x-1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow x \gtreqless 1.$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton $<$ fallend auf $(0,1]$, steigend auf $[1,\infty)$

$\Rightarrow$ $x_{min} = 1$ und $\min\{f(x) : x>0\} = f(x_{min}) = f(1) = 1$.

(c) Bestimmen Sie das jeweils größte Teilintervall von $(0,\infty)$, auf dem f

(i) konvex

$\Leftrightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x \in (0,2)$

Also: (streng) konvex auf $(0,2]$

(Wertung: $(0,2)$ ist auch ok.)

(ii) degressiv fallend $\Leftrightarrow$ fallend und konvex, ist der Fall

auf $(0,1] \cap (0,2] = (0,1]$

(iii) degressiv wachsend ist. $\Leftrightarrow$ wachsend und konkav,

ist der Fall auf $[1,\infty) \cap [2,\infty) = [2,\infty)$.

(offene Intervalle: kein Punktabzug!)

3. **(2+2+2 P.)** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $g_1 := \lim_{x\to\infty} \frac{2+3\cdot 2^x}{1+2^{x+1}}$ $\qquad$ $g_2 := \lim_{x\to-\infty} \frac{2+3\cdot 2^x}{1+2^{x+1}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 2^{-x}+3}{2^{-x}+2} = \frac{3}{2}$$

$$= 2$$

(b) $g_3 := \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^2}$ $\qquad$ $g_4 := \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^2}$

$$= \frac{2^3-0^3}{1^2} = 8$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2}{x^2} = 6$$

(c) $g_5 := \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x-14}{x-2}$ $\qquad$ $g_6 := \lim_{x\to\infty} x^{12}e^{-x}$. $= 0$

$$x^2+5x-14 : x-2 = x+7$$
$$\underline{x^2-2x}$$
$$7x-14$$

$$\leadsto \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x-14}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x+7 = 9$$

4. **(3+3 P.)** Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ die Elastizitäten $\varepsilon_f(x)$ und bestimmen Sie die größten Intervalle, auf denen f elastisch ist.

(a) $f(x) = e^{-x^2}$,

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{-2x^2 e^{-x^2}}{e^{-x^2}} = -2x^2$$

$$|\varepsilon_f(x)| > 1 \Leftrightarrow \varepsilon_f(x) < -1 \Leftrightarrow -2x^2 < -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

elastisch auf $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{(2+x^2)^2}\left(2x(2+x^2) - x^2 \cdot 2x\right) = \frac{4x}{(2+x^2)^2}$$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{4x^2}{(2+x^2)^2} \cdot \frac{2+x^2}{x^2} = \frac{4}{2+x^2}$$

$$|\varepsilon_f(x)| > 1 \Leftrightarrow \varepsilon_f(x) > 1 \Leftrightarrow 4 > 2+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt{2}$$

also elastisch auf $(0, \sqrt{2})$.

5. **(3+2+2+3 P.)** Berechnen Sie

(a) das unbestimmte Integral $I(x) := \int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} dx$,

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

(b) eine Funktionen $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit der Elastizität $\varepsilon_f(x) = \frac{3x}{1+x}$,

Aus der Vorl. bekannt $f(x) = C \cdot \exp\left(\int \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right)$

hier $\to = C \cdot \exp\left(\int \frac{3}{1+x} dx\right) = C \cdot \exp\left(\ln((1+x)^3)\right)$

$= C(1+x)^3$, $C = 1$ reicht, exp(3 ln (1+x)) reicht für 1P.

Hierbei: $C > 0$

(c) das uneigentliche Integral $I := \int_1^\infty e^{-3x} dx$,

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_1^\infty = \frac{e^{-3}}{3}.$$

(d) den Mittelwert M von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf dem Intervall $(0, 2]$.

$$M = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^2 = \sqrt{2}$$

6. **(2+2+2+1+2 P.)** (a) Gesucht ist eine Funktion $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit

$$\nabla f(x,y) = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}) \qquad \text{und} \qquad f(1,1) = 1.$$

Berechnen Sie

(b) die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y)$ nach $\xi = (1,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y)$ nach $\eta := \frac{1}{5}(3,4)$,

(c) den Elastizitätsgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y)$ und

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\eta}(x,y)$ für η wie in (b),

(e) die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $f(x,y) = \int \frac{dx}{y} = \frac{x}{y} + C(y)$

$= -\int \frac{x}{y^2}\,dy = \frac{x}{y} + C(x)$

Wegen der Zusatzbed. $f(1,1) = 1$ muss $C(x) = C(y) = 1$ sein, also $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,y) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{y} - \frac{4x}{y^2}\right)$

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} = 1$, $\varepsilon_{f,y}(x,y) = -\frac{y \cdot x}{y^2} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} = -1$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_f(x,y) = (1,-1)$ (eine spezielle Cobb-Douglas-Funktion!)

(d) $\varepsilon_{f,\eta}(x,y) = \frac{1}{5}\langle (3,4),(1,-1)\rangle = \frac{1}{5}(3-4) = -\frac{1}{5}$

(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{y^2} = \frac{2x}{y^3}$.

7. **(4+5+1+2 P.)** Für $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ sei

$$f(x, y) = 4\sqrt{xy} - x - y^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass f genau eine kritische Stelle (x_c, y_c) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Untersuchen Sie die Hesse-Matrix $\mathrm{Hess} f(x, y)$ auf Definitheit.

(c) Handelt es sich bei (x_c, y_c) um eine lokale Extremstelle von f? Wenn ja: Um eine Maximal- oder eine Minimalstelle?

(d) Nimmt f ein globales ~~Maxi~~ Extre-mum an? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $\nabla f(x,y) = \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1,\ 2\sqrt{\frac{x}{y}} - 2y\right)$ 2P.

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \frac{x}{4} \\ x = y^3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 4y \\ y^2 = 4 \end{Bmatrix}$$

Also $(x_c, y_c) = (8, 2)$ 2P.

(b)

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} -y^{\frac{1}{2}} x^{-3/2} & \frac{1}{\sqrt{xy}} \\ \frac{1}{\sqrt{xy}} & -x^{\frac{1}{2}} y^{-3/2} - 2 \end{pmatrix}$$

1P. 1P. 1P.

$$\det \mathrm{Hess} f(x,y) = \frac{1}{xy} + 2y^{\frac{1}{2}} x^{-3/2} - \frac{1}{xy} = 2y^{1/2} x^{-3/2} > 0$$ 1P.

Da $\det \mathrm{Hess} f(x,y) > 0$ ist, ist $\mathrm{Hess} f(x,y)$ definit, und zwar <u>negativ</u>, weil $-y^{\frac{1}{2}} x^{-3/2} < 0$ ist. 1P.

(c) In (x_c, y_c) liegt ein (isoliertes) lokales Maximum vor. 1P.

(d) Hierbei handelt es sich um ein <u>globales</u> Max., 1P.
weil $\lim\limits_{(x,y) \to (x,0)} f(x,y) = -x \leq 0$, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,y)} f(x,y) = -y^2 \leq 0$ und $\lim\limits_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = -\infty$ sowie $f(x_c, y_c) = 4 > 0$. 1P.