Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2015
30.07.2015

Lösungen zur Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (A)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Eine spezielle logistische Funktion)	11 Punkte
A3 (Elastizitäten)	8 Punkte
A4 (Analyse des Wachstumsverhaltens einer Funktion)	6 Punkte
A5 (Integration)	10 Punkte
A6 (Gradient, Richtungsableitung und Elastizitäten)	10 Punkte
A7 (Hesse-Matrix)	10 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,3, 6 und 7 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 28 (von 65 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist f injektiv.

   Antwort: richtig, aus $f'(x) < 0$ folgt, dass f streng monoton fällt und also injektiv ist.

   (b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und progressiv steigend auf $[0, \infty)$, so ist f auf $(-\infty, 0]$ ebenfalls progressiv steigend.

   Antwort: falsch, Bsp. $f(x) = x^3$

   (c) Das Produkt zweier konvexer Funktionen ist konvex.

   Antwort: falsch, Bsp. $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$

   (d) Der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ weist stets in die Richtung des stärksten Anstiegs von f.

   Antwort: richtig (Vorlesung)

   (e) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und gilt für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dass $\mathrm{Hess} f(x_0)$ positiv semidefinit ist, so liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.

   Antwort: falsch (z.B., wenn $\nabla f(x_0) \neq 0$ ist.)

2. **(2+1+1+2+3+2=11 P.)** Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{(x-1)}}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2e^{(x-1)}}{(1 + e^{(x-1)})^2}.$$

(b) Was können Sie aufgrund Ihres Ergebnisses zu (a) über das Monotonieverhalten von f aussagen?

f ist streng monoton fallend.

(c) Nimmt die Funktion f auf $\mathbb{R}$ ein globales Extremum an? Wenn ja, wo?

Nein.

(d) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

(e) Berechnen Sie $f''(x)$, und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \frac{-2e^{(x-1)}}{(1 + e^{(x-1)})^2} \\ &= \frac{2}{(1 + e^{(x-1)})^4} (2(1 + e^{(x-1)})e^{2(x-1)} - (1 + e^{(x-1)})^2 e^{(x-1)}) && 1P. \\ &= \frac{2e^{(x-1)}}{(1 + e^{(x-1)})^3} (e^{(x-1)} - 1). && 2P. \end{aligned}$$

(f) Auf welchem (maximalen) Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist f konvex, auf welchem konkav?

Es ist $f''(x) \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq 1$ ist. 1 P.

Also ist f konvex auf $[1, \infty)$ und konkav auf $(-\infty, 1]$. 1 P.

3. **(3+2+3=8 P.)** Berechnen Sie die Elastizitäten der folgenden Funktionen $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, und geben Sie an, wo f elastisch ist.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$,

Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}4x^3 = -2x^3(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}. \qquad 1P.$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{-2x^4(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2x^4}{1+x^4}. \qquad 1P.$$

f ist also elastisch genau dann, wenn $\varepsilon_f(x) < -1$ ist, d.h., wenn $2x^4 > 1 + x^4$, also auf $(1,\infty)$. 1P.

(b) $f(x) = x^e$,

Es ist $\varepsilon_f(x) = e > 1$ 1P.

und daher f auf $(0,\infty)$ elastisch 1P..

(c) $f(x) = 3^{-x}$.

Hier ist $f'(x) = -\ln(3)f(x)$ 1P.

$\varepsilon_f(x) = -x\ln(3)$ 1P.

und also f elastisch für $x > \frac{1}{\ln(3)}$. 1P.

4. **(6 P.)** Für die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^x$ bestimme man das größte Teilintervall von $(0, \infty)$, auf dem f degressiv fallend ist.

Wir haben $f'(x) = x^x(1 + \ln(x))$ 1P.,

so dass

$$f'(x) > (=, <)0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) > (=, <)0 \Leftrightarrow x > (=, <)\frac{1}{e}. \qquad 1P.$$

Hieraus folgt, dass f auf $(0, \frac{1}{e}]$ monoton fällt und auf $[\frac{1}{e}, \infty)$ monoton steigt. 1 P.

Weiter ist $f''(x) = x^x((1 + \ln(x))^2 + \dfrac{1}{x})$. 1P.

Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ 1P.,

folgt: f ist degressiv fallend auf $(0, \frac{1}{e}]$. 1 P.

5. **(3+3+4=10 P.)** Berechnen Sie

(a) eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$,

Wir schreiben $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$, 1 P.

woraus sich als Stammfunktion

$$F(x) = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}$$

ergibt. 2 P.

(b) den Mittelwert von $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ auf dem Intervall $[1,3]$,

Mit $F(x) = \frac{-1}{x+1}$ ist eine Stammfunktion von f gefunden. 1 P.

Hierfür ist $F(3) - F(1) = \frac{1}{4}$, 1 P.

woraus sich $\frac{1}{8}$ als Mittelwert ergibt. 1 P.

(c) eine Funktion f mit gegebener Elastizität $\varepsilon_f(x) = \dfrac{x}{2(1+x)}$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich mit Hilfe der Rechenregeln für den Logarithmus.

Bekannt ist $\varepsilon_f(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \displaystyle\int \frac{h(x)}{x} dx$. 2 P.

Im vorliegenden Fall also

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{2}} + c_0 \qquad 1P.$$

Es folgt $f(x) = c(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 1P.

mit einer positiven Konstante c (Kein Punktabzug, wenn diese Konstante fehlt).

6. **(2+2+3+3=10 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2y + xy^2 = xy(x + y).$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x, y)$,

Es ist $\nabla f(x, y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$. 2 P.

(b) die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x, y)$ für $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x, y) = \langle \nabla f(x, y), \xi \rangle$ 1 P.

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \langle (2xy + y^2, x^2 + 2xy), (2, -1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x^2 + 2xy + 2y^2)$. 1 P.

(c) den Elastizitätsgradienten $\vec{\varepsilon_f}(x, y)$, (vereinfachen Sie Ihr Ergebnis!) und

$\varepsilon_{f,x} = \dfrac{x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} = \dfrac{2x + y}{x + y} = 1 + \dfrac{x}{x + y}$ 1 P.

Genauso: $\varepsilon_{f,y} = 1 + \dfrac{y}{x + y}$ 1 P.

Wird zusammengefasst zu $\vec{\varepsilon_f}(x, y) = (1 + \frac{x}{x+y}, 1 + \frac{y}{x+y})$. 1 P.

(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\xi}(x, y)$ für $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. (Ist $\varepsilon_{f,\xi}(x, y)$ im vorliegenden Fall unabhängig von x und y?)

Nach Definition ist $\varepsilon_{f,\xi}(x, y) = \langle \vec{\varepsilon_f}(x, y), \xi \rangle$. 1 P.

Hier: $= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (1 + \frac{x}{x+y}, 1 + \frac{y}{x+y}), (1, 1) \rangle = \frac{3}{\sqrt{2}}$. 2 P.

7. **(2+4+2+2=10 P.)** Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^3.$$

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) + 3(x - y)^2, \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x + y) - 3(x - y)^2, \qquad 1P.$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 6(x - y), \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 - 6(x - y), \qquad 1P.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 6(x - y), \qquad 1P.$$

$$\mathrm{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 6(x - y) & 2 - 6(x - y) \\ 2 - 6(x - y) & 2 + 6(x - y) \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

(c) Bestimmen Sie die Determinante von $\mathrm{Hess} f(x, y)$ (Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis!).

$$\det \mathrm{Hess} f(x, y) = (2 + 6(x - y))^2 - (2 - 6(x - y))^2 = 48(x - y) \qquad 2P.$$

(d) Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathrm{Hess} f(x, y)$ positiv definit?

Die Hesse-Matrix ist hier definit, wenn Ihre Determinante positiv ist, also für $x > y$. 1 P.

Da in diesem Fall auch beide Diagonalelemente positiv sind, ist $\mathrm{Hess} f(x, y)$ positiv definit. 1 P.