1.6 Extremwertaufgaben

Bisher haben wir den Begriff des Extremums (= Maximum oder Minimum) recht undifferenziert gebraucht, nämlich

$$\max\{f(x) : x \in D\} = f(x^*), \text{ falls } f(x^*) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D,$$

entsprechend für ein Minimum. Genauer sollte man in dieser Situation von einem

absoluten bzw. globalen Maximum (für $f(x^*)$)

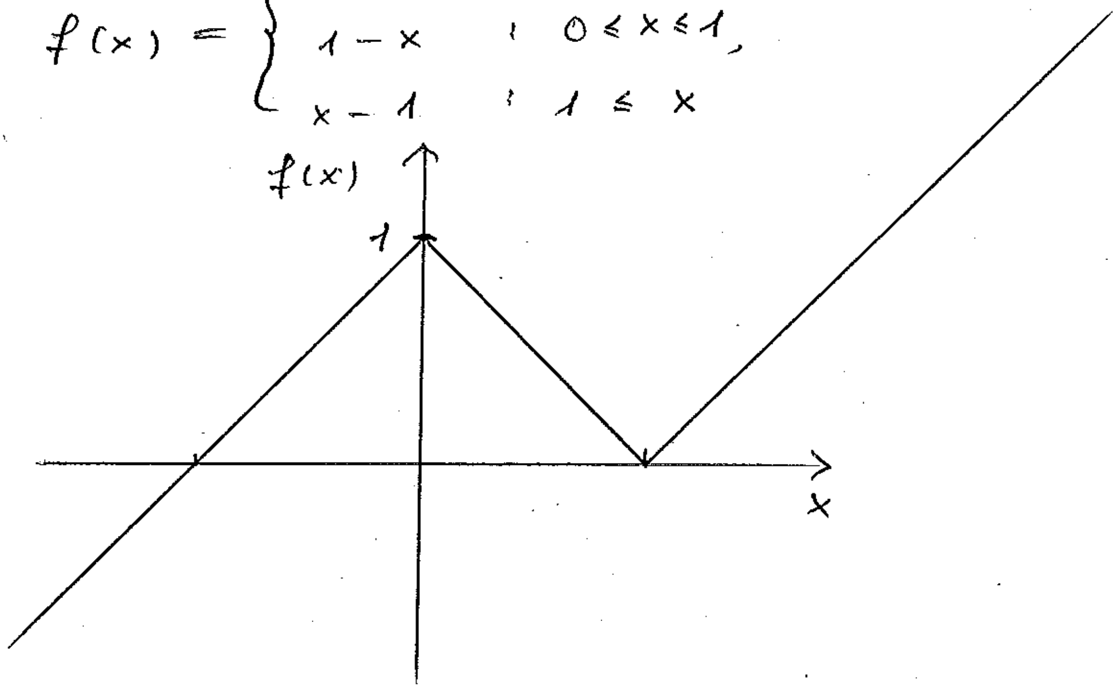
bzw. von einer

absoluten bzw. globalen Maximalstelle (für x^*)

sprechen. Im Gegensatz dazu gibt es auch Extrema, die lediglich relativ (zu einer Umgebung) bzw. lokal sind, wie das folgende Bsp. illustriert.

Bsp. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & : x \leq 0, \\ 1-x & : 0 \leq x \leq 1, \\ x-1 & : 1 \leq x \end{cases}$$



Im Sinne der bisher verwendeten Definition besitzt diese Funktion weder Maximum noch Minimum. Dennoch wird f in $x_0 = 0$ in gewisser Weise maximal und in $x_1 = 1$ minimal, nämlich relativ zu den Funktionswerten in einer näheren Umgebung dieser Punkte.

Dies führt auf die folgende Begriffsbildung:

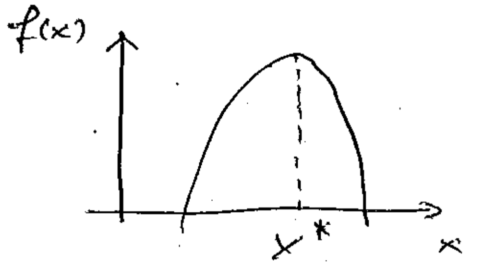
Def.: Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion:

(a) $x^* \in D$ heißt eine <u>lokale</u> (oder relative) <u>Maximalstelle</u> von f, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x^*| < \delta$ gilt, dass $f(x^*) \geq f(x)$. $f(x^*)$ heißt dann ein <u>lokales</u> (bzw. relatives) <u>Maximum</u> von f.

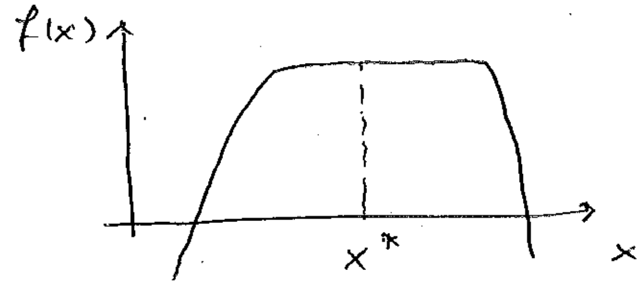
(b) $x_* \in D$ heißt eine <u>lokale</u> (oder relative) <u>Minimalstelle</u> von f, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x_*) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_*| < \delta$. In diesem Fall heißt $f(x_*)$ ein <u>lokales</u> (bzw. relatives) <u>Minimum</u> von f.

Weitere Bezeichnungen: • lokales / relatives Extremum = lokales / rel. Maximum <u>oder</u> Minimum,

- <u>isoliertes</u> lokales Extremum: Anstelle von "$\leq$" bzw. "$\geq$" hat man "$<$" bzw. "$>$" in der obigen Definition. Skizze:



isoliertes Maximum



nicht isoliert

- <u>Bem.</u>: Ist $f(x_0)$ ein globales Extremum, so ist es ebenfalls ein lokales, aber nicht umgekehrt, wie das Eingangsbeispiel zeigt.

Wir wollen jetzt die Methoden der Differenzialrechnung dazu verwenden, die lokalen und ggf. auch die globalen Extremwerte diff'barer Funktionen zu bestimmen. Daher sei bis zum Ende des Abschnitts folgendes angenommen:

$f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit stetiger zweiter Ableitung, dabei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall.

<u>z.B.</u>:

eigentliche Intervalle:

- $I = [a,b]$ abgeschlossen: 2 Randpunkte, die anderen heißen innere Punkte
- $I = (a,b)$ offen: Nur innere Punkte

uneigentlich, abgeschlossen: $I = [a, \infty)$: a ist Randpunkt, die restlichen sind innere Punkte.

Ein in diesem Zusammenhang nützliches Kriterium liefert uns der Monotoniesatz:

<u>Satz</u>: Besitzt $f: I \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt x_0 von I ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Begründung: Ist $f'(x_0) > 0$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, denn f' ist aufgrund unserer allgemeinen Voraussetzung stetig. Also ist f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton steigend, besitzt also kein lokales Extremum. Analog argumentiert man im Fall $f'(x_0) < 0$.

<u>Bem.</u>: Vorsicht ist in zweierlei Hinsicht geboten:

(i) Randextrema genügen i. a. der Regel <u>nicht</u> der angegebenen notwendigen Bedingung,

Bsp. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ mit $f'(x) = 1$ für alle $x \in [0,1]$ und einem Min. in $x_0 = 0$, einem Max. in $x_1 = 1$.

(ii) Ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ erfüllt, so liegt nicht notwendig ein lokales Extremum vor. Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ ist $f'(x_0) = 0$, aber dort ist keine Extremalstelle (sog. <u>Sattelpunkt</u>).

Die Bedingung $f'(x)=0$ liefert uns also die Kandidaten (im Inneren von I) für lokale Extrema. Solche Kandidaten nennt man "kritische Stellen".

<u>Def.</u>: Ein Punkt $x_0 \in I$ mit $f'(x_0)=0$ heißt eine <u>kritische Stelle</u> von f.

Eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema erhalten wir dann unter Verwendung der zweiten Ableitung:

<u>Satz</u>: Es sei $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

Begründung: G_f hat in x_0 die Steigung $f'(x_0)=0$ und ist strikt konvex in einer Umgebung von x_0. Dort liegen also alle Sekanten oberhalb des Graphen. Das ist nur möglich, wenn in x_0 ein Minimum von f ist.

<u>Folgerung</u>: Es sei $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.
(Wende den Satz auf $-f$ an.)

Bem.: • Die Extrema in Satz und Folgerung sind sogar isoliert.
• <u>strikte</u> Ungleichungen sind erforderlich.

Zwei Beispiele sollen illustrieren, wie man den obigen Satz und die Folgerung daraus anwendet.

Bsp. 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + e^{-x}$

$\rightsquigarrow f'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$

Es gibt also genau eine kritische Stelle, nämlich $x_0 = 0$.

mit $f(x_0) = 1$.

$\rightsquigarrow f''(x) = e^{-x} \Rightarrow f''(x_0) = 1 > 0$. In $x_0 = 0$ liegt also ein lokales Minimum.

Randpunkte sind nicht vorhanden, wir können also folgern. Es gibt weder globale noch lokale Maxima.

Aus der Betrachtung der Grenzwerte

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

schließen wir weiter: In $x_0 = 0$ liegt ein globales Minimum vor.

Eine weitere Schwierigkeit tritt hinzu, wenn f auf einem Intervall mit Randpunkten definiert ist. In diesem Fall können Randextrema auftreten:

Bsp. 2: $f : [-\frac{3}{2}, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 - 3x$

Step 1: Lokale Extrema im Inneren?

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, also $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6 < 0$ und $f''(1) = 6 > 0$

Folgerung: Lokales Max. in $x_1 = -1$,
lokales Min. in $x_2 = 1$.

Step 2: Lokale Extrema in den Randpunkten?

Wir haben $f'(x) = 3(x^2-1) > 0$, falls $|x| > 1$.

$\Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend sowohl auf

$[-\frac{3}{2}, -1]$ als auch auf $[1,3]$.

Folgerung: In $x_0 = -\frac{3}{2}$ liegt ein lokales Minimum,
in $x_3 = 3$ ein lokales Maximum vor.

Step 3: Globale Extrema
(Existenz ist gesichert durch den Satz vom Maximum.
Beachte: f ist stetig auf einem Kompaktum!)

Also: Vergleich der Funktionswerte:

$$\underset{\underset{-\frac{3}{2}}{\parallel}}{f(x_0)} = (-\tfrac{3}{2})^3 - 3(-\tfrac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} = \frac{36-27}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\underset{=-1}{f(x_1)} = -1 + 3 = 2; \quad f(\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{x_2}) = 1-3 = -2, \quad f(\underset{\underset{3}{\shortparallel}}{x_3}) = 27-9 = 18$$

Ergebnis: $\max\{f(x) : -\frac{3}{2} \le x \le 3\} = f(3) = 18$

$\min\{f(x) : \quad " \quad\} = f(1) = -2$

Beachte: In den Randpunkten liegt links ein lokales Min. und rechts sogar ein globales Max. vor. Werden sie vernachlässigt, können Fehler auftreten!