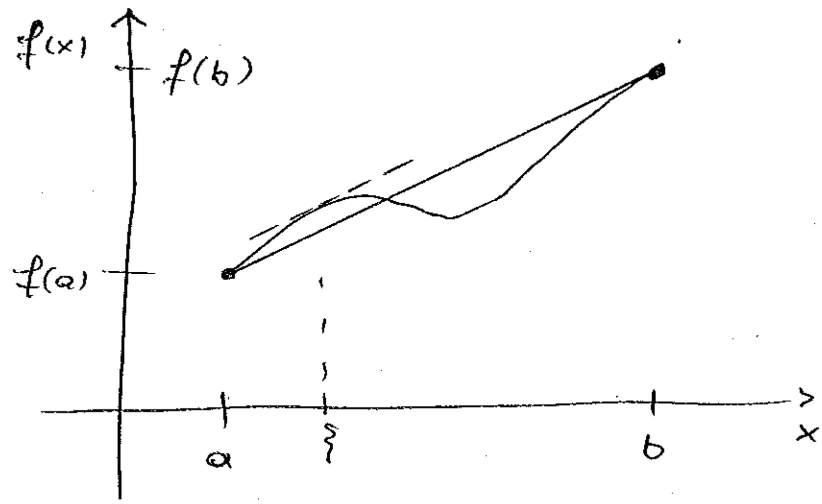
1.5 Die wichtigsten Sätze der Differenzialrechnung

Der <u>Mittelwertsatz (MWS)</u>: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar, so existiert eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

Skizze:



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = Steigung der Strecke ——

$f'(\xi)$ = Steigung der parallelen Tangente - - - - an G_f in $(\xi, f(\xi))$ (ξ ist nicht eindeutig bestimmt)

Der MWS ist der Schlüssel für eine ganze Reihe von Aussagen der Analysis einer Veränderlicher, bei denen aus der Kenntnis der Ableitung(en) auf lokale und zum Teil auch globale Eigenschaften der Funktion selbst geschlossen wird.

Folgerungen aus dem MWS (hierbei: $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall):

(47)

(1) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant.

Begründung: Sind $a < b$ in I, so haben wir

$$f(b) - f(a) \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi)(b-a) \underset{\text{Vor.}}{=} 0 ,$$

also $f(b) = f(a)$ für alle $a, b \in I$.

(2) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $f'(x) = c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$, so existiert ein $d \in \mathbb{R}$, so daß $f(x) = cx + d$.

Begründung: Sei $g(x) = f(x) - cx \Rightarrow g'(x) = 0 \ \forall x \in I$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} \exists\, d \in \mathbb{R}$, so daß $g(x) = d$ bzw. $f(x) = cx + d$.

(3) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, so existiert ein $C \in \mathbb{R}$, für das $f(x) = C \cdot e^x$.

Begründung: $g(x) = e^{-x} \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C$

$\Rightarrow f(x) = e^x \cdot g(x) = C \cdot e^x$.

(4) Ist $I \subset (0, \infty)$ und $f: I \to (0,\infty)$ diffbar mit $\varepsilon_f(x) = r \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$ (eine solche Funktion nennt man <u>isoelastisch</u>). Dann gilt $f(x) = C \cdot x^r$ mit einer reellen Konstante C.

Begründung: $r = \varepsilon_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \ln(f)'(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\ln(f(x)) - \ln(x^r)\right) = \frac{d}{dx} \ln\left(\frac{f(x)}{x^r}\right) = 0$$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{f(x)}{x^r}\right) = \text{konst} \Rightarrow f(x) = Cx^r$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Der folgende "Schrankensatz" ist ebenfalls eine Konsequenz aus dem MWS. Er dient vor allem zu Beweiszwecken:

<u>Schrankensatz:</u> Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar mit

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in [a,b],$$

so ist $\quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$

Begründung: $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \in [m, M]$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a).$$

Wichtig für Extremwertaufgaben, mit denen wir uns im nächsten Abschnitt genauer befassen, ist der folgende

<u>Monotoniesatz:</u> Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar. Dann gelten:

(1) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

(2) f " " fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

(3) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

(4) Ist $f'(x) < 0$ " " $x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

Bem.: In (3) und (4) gilt keine Äquivalenz.

Bsp.: $f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 0$.

Begründung zu Teil (1) des Monotoniesatzes:

"$\Rightarrow$" f monoton wachsend $\Rightarrow \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) \geq 0$

für alle $x \in I$, $h \neq 0$ mit $x+h \in I$ (gilt sowohl für $h>0$ als auch für $h<0$). "$\geq$" bleibt bestehen im Grenzübergang $h \to 0$.

"$\Leftarrow$" $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \geq 0$

$\forall \, a, b \in I$ mit $b > a$.

Folgerung: Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ d'bar, und ist in $x_0 \in I$ $f(x_0) = g(x_0)$, so folgt aus $f'(x) \geq g'(x) \;\; \forall x \in I$, dass

(i) $f(x) \leq g(x) \quad \forall \, x \leq x_0$

(ii) $f(x) \geq g(x) \quad \forall \, x \geq x_0$

Begründung: $h(x) = f(x) - g(x)$. $\leadsto$ $h(x_0) = 0$ und $h'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$, also h monoton steigend $\leadsto$ $h(x) \leq 0$ für $x \leq x_0$ und $h(x) \geq 0$ für $x \geq x_0$ $\leadsto$ Beh.

Anwendung: $1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 1+x$, $g(x) = e^x \Rightarrow f(0) = g(0) = 0$ und

$f'(x) = 1 \leq g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf $[0, \infty)$

$f'(x) = 1 \geq g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ auf $(-\infty, 0]$

Als Anwendung des Monotoniesatzes selbst betrachten wir eine einfache Extremwertaufgabe!

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b \begin{cases} > 0 & \text{für } x > -\frac{b}{2a} \\ = 0 & \text{für } x = -\frac{b}{2a} \\ < 0 & \text{" } x < -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Also ist f monoton

fallend auf $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

steigend " $[-\frac{b}{2a}, \infty)$

und wird damit in $x_0 = -\frac{b}{2a}$ minimal. Es gilt also

$$\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Das Beispiel zeigt, das in einfachen Fällen die Kenntnis der ersten Ableitung bereits ausreichen kann für die Bestimmung aller Extremstellen einer Funktion!

Bsp.: Der Monotoniesatz ist nützlich sowohl zur Lösung von Extremwertaufgaben wie auch zum Beweis einfacher Ungleichungen.

Neben der Monotonie einer Funktion ist ihre Krümmung – d.h. Konvexität oder Konkavität – eine wesentliche Eigenschaft. Für zweimal diff'bare Funktionen ist diese an der zweiten Ableitung ablesbar.

<u>Konvexitätssatz:</u> Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diff'bar. Dann gelten:

(i) f ist konvex auf $I \iff f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$;

(ii) f ist konkav auf $I \iff f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

Nehmen wir Monotoniesatz und Konvexitätssatz zusammen, können wir die in der Ökonomie relevanten Eigenschaften progressiv / degressiv fallend / wachsend mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung charakterisieren:

<u>Folgerung:</u> Für eine zweimal diff'bare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ gelten:

(i) f ist progressiv wachsend $\iff f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$;

(ii) f ist degressiv wachsend $\iff f' \geq 0$ und $f'' \leq 0$;

(iii) f ist progressiv fallend $\iff f' \leq 0$ und $f'' \leq 0$;

(iv) f ist degressiv fallend $\iff f' \leq 0$ und $f'' \geq 0$.

(Hierbei $f' \geq 0 \iff f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, entsprechend für $f' \leq 0$, $f'' \gtreqless 0$.)

Bsp.: Für die Gauss'sche Glockenfunktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = e^{-x^2/2}$$

haben wir nach der Kettenregel

$$f'(x) = -x \cdot e^{-x^2/2} \begin{cases} \geq 0 & \text{auf } (-\infty, 0] \\ \leq 0 & \text{auf } [0, \infty). \end{cases}$$

Also ist f monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$ und monoton fallend auf $[0, \infty)$. Für die zweite Ableitung ergeben die Produkt- und Kettenregel:

$$f''(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ \leq 0 & \text{für } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Also ist f

- konvex auf $(-\infty, -1]$ und auf $[1, \infty)$
- konkav auf $[-1, 1]$.

Eine feinere Differenzierung liefert die Folgerung:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^{-x^2/2}$ ist

- progressiv wachsend auf $(-\infty, -1]$;
- degressiv " " $[-1, 0]$;
- progressiv fallend " $[0, 1]$;
- degressiv fallend " $[1, \infty)$.

Wendepunkte sind in $x_\pm = \pm 1$.
(Nullstellen von f'')

Skizze: