1.4 Die Elastizität differenzierbarer Funktionen

Die Ableitung

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$$

ist ein Maß für die <u>absolute</u> Änderung(srate) der Funktionswerte (geom.: Tangentensteigung). In den Anwendungen ist sie in der Regel dimensionsabhängig, d.h. sie ist mit einer bestimmten Maßeinheit verknüpft.

In den Wirtschaftswissenschaften verwendet man häufig ein dimensionsloses Maß für die relative Änderung von Funktionswerten - relativ sowohl zur unabhängigen Variablen x wie auch zur abhängigen Veränderlichen $f(x)$.

<u>Def.</u>: Es sei $I \subset (0,\infty)$ ein Intervall und $f : I \to (0,\infty)$ eine differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$\varepsilon_f : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \varepsilon_f(x) := \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

die <u>Elastizität</u> von f.

<u>Bem.</u> (1) Wohldefiniert, da $f > 0$ vorausgesetzt ist.

$\varepsilon_f(x) < 0$ ist möglich.

(2) $\operatorname{sign}(\varepsilon_f(x)) = \operatorname{sign}(f'(x))$, da sowohl $x > 0$ also auch $f(x) > 0$ vorausgesetzt ist. $\varepsilon_f(x) > 0$ bedeutet also: Die Tangente an G_f im Punkt

$(x, f(x))$ ist positiv. Entsprechend bedeutet $\varepsilon_f(x) < 0$

eine negative Tangentensteigung.

(3) $|\varepsilon_f(x)|$ gibt (ungefähr) an, um wieviel Prozent sich $f(x)$ ändert, wenn die Variable x sich um ein Prozent ändert.

(4) Sind x und $f(x)$ mit Einheiten verknüpft, etwa

$$[x] = A \quad (m, s, €, kg, \dots) \qquad \text{und}$$

$$[f(x)] = B \quad (\text{—"—})$$

dann ist auch $f'(x)$ dimensionsbehaftet und zwar

$$[f'(x)] = \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = \frac{[f(x)]}{[x]} = \frac{B}{A}.$$

Hieraus ergibt sich, dass $\varepsilon_f(x)$ tatsächlich eine dimensionslose Größe ist, denn

$$[\varepsilon_f(x)] = \left[\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right] = \frac{[x]\,[f'(x)]}{[f(x)]} = \frac{A \cdot \frac{B}{A}}{B} = 1.$$

(5) Weitere Bezeichnungen:

(i) f heißt unelastisch in x $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| < 1$,

(ii) f " elastisch " x $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| > 1$,

(iii) f heißt ausgeglichen elastisch in x $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| = 1$

(iv) f " total unelastisch in x $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| = 0$

(Entsprechend für Intervalle)

Der Begriff der Elastizität soll anhand einiger Beispiele erläutert werden:

Bsp.: (1) $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto f(x) = ax+b$ (affin linear), wobei nur $a, b \geq 0$ mit $a+b>0$ zugelassen sind. Hier ist $f'(x) = a$ und daher $\varepsilon_f(x) = \frac{ax}{ax+b}$.

Fallunterscheidung:

(i) $a=0,\ b>0$: Hier ist $\varepsilon_f(x) = 0 \ \forall x \in (0,\infty)$. Die konstanten Funktionen sind also im gesamten Definitionsbereich total unelastisch.

(ii) $a>0,\ b=0$ (also eine lineare Funktion im eigentlichen Sinn). Hier ist $\varepsilon_f(x) = 1 \ \forall x \in (0,\infty)$, die Funktion ist also auf $(0,\infty)$ ausgeglichen elastisch.

(iii) $a, b > 0 \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \frac{ax}{ax+b} = \frac{1}{1+\frac{b}{ax}} \in (0,1)$.

f ist auf $(0,\infty)$ unelastisch, strebt aber für $x \to \infty$ einem ausgeglichen elastischen Verhalten entgegen.

(2) Wenn wir affin-lineare Funktionen mit $a<0$ betrachten, müssen wir uns auf das Intervall $(0, -\frac{b}{a})$ beschränken, damit $f(x)>0$ ist. Also

$f : (0, -\frac{b}{a}) \longrightarrow (0,\infty)$, wobei jetzt $b>0>a$,

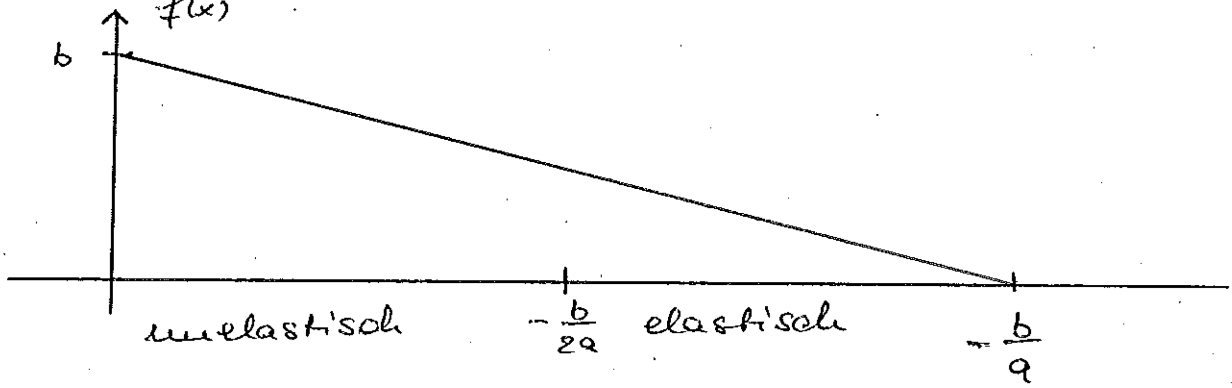
$x \longmapsto f(x) = ax+b$

Hierbei ist stets $0 > a = f'(x)$ und daher auch $\varepsilon_f(x) < 0$. Das Verhalten von f ist also elastisch, falls $\frac{ax}{ax+b} = \varepsilon_f(x) < -1$

$\Leftrightarrow ax < -ax-b \Leftrightarrow 2ax < -b \underset{a<0}{\Leftrightarrow} x > -\frac{b}{2a}$

und unelastisch, falls $x < -\frac{b}{2a}$.

Skizze:



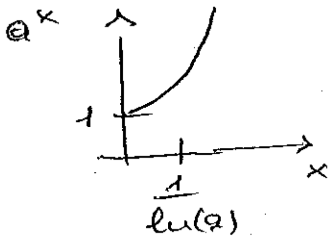
(2) $f(x) = a^x$ für $a > 0$ $(x \in (0,\infty))$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a)\, a^x$

$\Rightarrow \varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot \ln(a) \cdot a^x}{a^x} = x \cdot \ln(a)$

Fallunterscheidung in Abhängigkeit vom Parameter $a > 0$:

(i) $a > 1 \Rightarrow \ln(a) > 0 \Rightarrow \varepsilon_f(x) > 0$



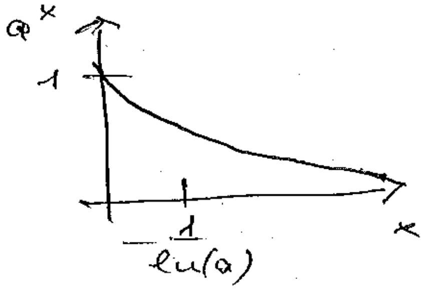
unelastisch für $x \cdot \ln(a) < 1$, also

auf $(0, \frac{1}{\ln(a)})$

elastisch auf $(\frac{1}{\ln(a)}, \infty)$

(ii) $a = 1$: konstante Funktion, total unelastisch

(iii) $a < 1 \Rightarrow \ln(a) < 0 \Rightarrow \varepsilon_f(x) < 0$



unelastisch für $-1 < x \cdot \ln(a)$, also

für $0 < x < -\frac{1}{\ln(a)}$,

elastisch für $x > -\frac{1}{\ln(a)}$

(4) $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto f(x) = x^r$ $\quad r \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot r x^{r-1}}{x^r} = r \quad \text{(unabhängig von } x\text{!)}$$

f verhält sich also elastisch im gesamten Definitionsbereich, wenn $|r| > 1$ ist, und unelastisch, falls $|r| < 1$.

Rechenregeln für Elastizitäten:

1. Faktorregel: Ist $a > 0$, so gilt $\varepsilon_{af}(x) = \varepsilon_f(x)$, denn

$$\varepsilon_{af}(x) = \frac{x\,(af)'(x)}{a f(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} = \varepsilon_f(x)$$

2. Produktregel: $\varepsilon_{f \cdot g}(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$, denn

$$\varepsilon_{f\cdot g}(x) = \frac{x \cdot (f'(x) g(x) + f(x) g'(x))}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} + \frac{x g'(x)}{g(x)} = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)$$

3. Quotientenregel: $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$, denn

$$\varepsilon_{\frac{1}{g}}(x) = -\frac{x \cdot g'(x)}{g(x)^2} \cdot g(x) = -\frac{x g'(x)}{g(x)} = -\varepsilon_g(x).$$

wende jetzt 2. an mit $\frac{1}{g}$ anstelle von g.

4. Kettenregel: $\varepsilon_{f\circ g}(x) = \varepsilon_f(g(x)) \cdot \varepsilon_g(x)$, denn

$$\varepsilon_{f\circ g}(x) = \frac{x\,(f\circ g)'(x)}{f(g(x))} = \frac{x \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)}{f(g(x))}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f'(g(x))}{f(g(x))} \cdot \frac{x \cdot g'(x)}{g(x)} = \varepsilon_f(g(x)) \cdot \varepsilon_g(x)$$

Einfaches Bsp. zu 4.: Ist $h(x) = f(ax)$ mit $a > 0$, so gilt $\varepsilon_h(x) = \varepsilon_f(ax)$, denn für $g(x) = ax$ ist $\varepsilon_g(x) = 1$.