Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, WS 2006/07)

Kapitel 1: Zahlen und Rechnen

1.1 Die Zahlbereiche und die Grundrechenarten

Die für die Wirtchaftswissenschaft relevanten **Zahlbereiche** sind:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der **natürliche Zahlen** (ohne Null),

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der **ganze Zahlen**,

$\mathbb{Q}$ die Menge der **rationalen Zahlen** $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$,

$\mathbb{R}$ die Menge der **reellen Zahlen** (Punkte auf der *Zahlengeraden*).

Jeder dieser Zahlbereiche erweitert den vorangehenden,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Die Erweiterungen sind jeweils nötig, weil gewisse Operationen in den kleineren Bereichen nicht ausführbar sind: Subtraktion nicht in $\mathbb{N}$, Division nicht in $\mathbb{Z}$, Wurzelziehen und Grenzwertbildung nicht in $\mathbb{Q}$. (Auch in $\mathbb{R}$ kann man nicht alle Rechenoperationen ausführen, z.B. nicht das Quadratwurzelziehen aus negativen Zahlen. Daher wird in der Mathematik noch ein größerer Zahlbereich eingeführt, der Bereich der sog. *komplexen Zahlen* $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, in dem auch die Zahl $\mathbb{i} = \sqrt{-1}$ existiert; aber dieser Zahlbereich ist für die Wirtschaftswissenschaft von geringer Bedeutung.)

BEISPIELE: 1) Zahlen aus $\mathbb{Q}$:
$\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{-3}{15}$, alle abbrechenden Dezimalbrüche wie $12.394 = 12 + \frac{394}{1000} = \frac{12394}{1000}$, alle periodischen Dezimalbrüche wie $0.2\overline{3} = 0.2333\ldots = \frac{7}{30}$ und $-9.\overline{09} = -9.090909\ldots = -\frac{100}{11}$.

2) Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sog. *irrationale Zahlen*):
$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, die *natürliche Basis* $\mathrm{e} = 2.7182\ldots$, die *Kreiszahl* $\pi = 3.1415\ldots$ und überhaupt alle nichtabbrechenden und nichtperiodischen Dezimalbrüche. ■

Konkrete Zahlen in der Wirtschaftswissenschaft sind immer abbrechende Dezimalbrüche, also rational. Für die mathematische Theorie aber sind irrationale Zahlen unverzichtbar, — sonst könnte man z.B. nicht einmal quadratische Gleichungen lösen, und sehr einfache Funktionen hätten keine Extremstellen mehr. Mit einer solch unbefriedigenden Theorie könnte man auch in der Wirtschaftswissenschaft nichts anfangen.

Für Teilbereiche der Zahlbereiche sind Notationen wie die folgenden praktisch:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen mit Null),

$\mathbb{Q}_{\neq 0} = \{r \in \mathbb{Q} : r \neq 0\}$ (rationale Zahlen ungleich Null),

$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (positive reelle Zahlen).

Die Grundrechenarten **Addition** und **Multiplikation** kann man mit je zwei Zahlen a, b innerhalb jedes Zahlbereichs ausführen. Das Ergebnis heißt die **Summe** $a + b$ der *Summanden* a, b bzw. das **Produkt** $a \cdot b$ (oft einfach ab notiert) der *Faktoren* a, b. Dabei gilt $0 + a = a$ und $1 \cdot a = a$ für alle Zahlen a, d.h. *in einer Summe darf man Summanden mit Wert Null weglassen und in einem Produkt Faktoren mit Wert Eins*, ohne das Ergebnis zu ändern. Man kann auch mehr als zwei Zahlen addieren und multiplizieren. Die wichtigste Rechenregel dafür ist:

- *Die Summe ist unabhängig von der Reihenfolge und von der Art der Zusammenfassung (Klammerung) der Summanden;*
- *das Produkt ist unabhängig von der Reihenfolge und von der Art der Zusammenfassung (Klammerung) der Faktoren.*

BEISPIEL: Was ist günstiger: Erst ein Rabatt auf den Preis und danach die MwSt aufschlagen, oder nach Aufschlag der MwSt den prozentual gleichen Rabatt abziehen?

Was ist günstiger: Sparen mit wachsendem Zins 3%, 4%, 5% oder Sparen mit fallendem Zins 5%, 4%, 3%?

Die Antwort ist sofort klar, wenn man das tut, was bei vielen ähnlichen Fragestellungen angeraten ist, nämlich

- *multiplikativ denken!*

Den Rabattabzug von r% berechnet man nämlich durch Multiplikation des Preises mit dem "Verbilligungsfaktor" $1 - \frac{r}{100}$, den Mehrwertsteuerzuschlag durch Multiplikation mit dem "Verteuerungsfaktor" 1.16 (zur Zeit noch), den jährlichen Zinszuschlag bei Verzinsung mit p% durch Multiplikation des Kapitals mit dem sog. *Aufzinsungsfaktor* $q = 1 + \frac{p}{100}$. Die Alternativen sind daher jeweils gleichwertig, keine ist günstiger; denn die Reihenfolge bei der Multiplikation des Preises bzw. Anfangskapitals mit den diversen Faktoren ist ja egal! ■

Für Summen und Produkte von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind folgende Notationen mit dem **Summenzeichen** bzw. **Produktzeichen** üblich und praktisch:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n , \qquad \prod_{i=1}^{n} a_1 = a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n .$$

Dabei ist der sog. *Laufindex* i ein Buchstabensymbol für die Nummern, mit denen die Summanden oder Faktoren numeriert werden; a_i ist der Summand / Faktor mit Nummer i. Der angegebene *Indexlaufbereich* $i = 1$ bis n zeigt an, dass hier die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ als Nummern verwendet werden. Die Wahl des Buchstaben für den Laufindex ist dabei irrelevant, und als Laufbereich kann auch eine ander Nummernmenge wie etwa $0, 1, \ldots, n-1$ verwendet werden. Also ist die obige Summe bzw. das obige Produkt gleich

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} b_k = b_0 b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} ,$$

wenn immer die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ dieselben sind wie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in irgendeiner Reihenfolge (wobei mehrfach auftretende Zahlen unter den a_i und b_j gleich oft vorkommen). In welcher Reihenfolge man die einzelnen Additionen / Multiplikationen beim Ausrechnen durchführt, ist egal; man darf (und sollte) also möglichst geschickt zusammenfassen.

BEISPIELE: (*Berechnung endlicher Summen*)

1) $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15\,;$

2) $\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 1+4+9+16 = 30\,;$

3) $\sum_{\substack{k=-100\\k\neq 0}}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{-100}+\frac{1}{-99}+\ldots+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100} = 0\,;$

4) bei lauter *gleichen Summanden* $a_i = a$ gilt $\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n} = n\cdot a$, d.h. man kann n gleiche Summanden mit Wert a zu einem Produkt $n\cdot a$ zusammenfassen. ■

Summen, deren Summanden nach einem einfachen Bildungsgesetz gebildet sind, lassen sich unter Umständen durch eine "geschlossene Formel" berechnen, in der kein Summenzeichen mehr vorkommt. Ein einfaches Beispiel für diese Situation, das auch für die Wirtschaftswissenschaft wichtig ist (vgl. Kap. 2) ist folgendes:

BEISPIEL: Die Zahlen a_i bilden eine **arithmetische Progression** (oder: *arithmetische Folge*), wenn die Differenz aufeinander folgender Glieder stets dieselbe ist, $a_{i+1}-a_i = d$. Dann gilt die

- **arithmetische Summenformel:** $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}}$

  in Worten: *Die Summe einer arithmetischen Progression ist der Mittelwert von erstem und letztem Glied multipliziert mit der Anzahl der Summanden.*

(Das gilt auch bei anderer Nummerierung etwa beginnend mit $i=0$. Aber Achtung, bei Nummerierung mit $i=0,1,\ldots,n$ hat man $n+1$ Summanden, also ist der Wert der Summe dann $\frac{1}{2}(n+1)(a_0+a_n)$.) Man erkennt die Gültigkeit dieser Summenformel sofort, wenn man dieselbe Summe mit umgekehrter Reihenfolge der Summanden addiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} & a_1 & + & a_2 & +\ldots+ & a_{n-1} & + & a_n & \\ + & a_n & + & a_{n-1} & +\ldots+ & a_2 & + & a_1 & \\ \hline = & (a_1+a_n) & + & (a_2+a_{n-1}) & +\ \ldots\ + & (a_{n-1}+a_2) & + & (a_n+a_1) & = n\cdot(a_1+a_n) \end{array}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil in der letzten Zeile lauter gleiche Summanden $(a_i+a_{n+1-i}) = (a_1+a_n)$ stehen; denn wenn man in einer arithmetischen Progression von i zu $i+1$ übergeht, so verändert sich a_i um d, aber a_{n+1-i} um $-d$, die Summe (a_i+a_{n+1-i}) also überhaupt nicht. Das Doppelte der zu berechnenden arithmetischen Summe ist also $n(a_1+a_n)$, und die arithmetische Summenformel folgt mit Division durch 2. Hier noch einige konkrete arithmetische Summen:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 100\cdot\frac{1+100}{2} = 100\cdot 50.5 = 5050 \quad \text{(Gauß)},$$

allgemeiner $\quad 1+2+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = n\cdot\frac{1+n}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)\,,$

$$\sum_{j=0}^{100}(\tfrac{1}{2}j-2) = 101\cdot\frac{-2+48}{2} = 101\cdot 23 = 2323\,.$$ ■

BEISPIELE: (*endliche Produkte*)

1) $\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

allgemein heißt $\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die **Fakultät** von $n \in \mathbb{N}$, notiert $n!$;

2) $\prod_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 24^2 = 576;$

3) $\prod_{k=0}^{100} (k-50)(k+50) = 0,$ weil der Faktor zu $k = 50$ null ist und es gilt:

- *Ein Produkt hat den Wert Null, genau wenn einer seiner Faktoren Null ist.*

4) Bei lauter *gleichen Faktoren* $a_i = a$ heißt $\prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ die **Potenz** der *Basis* a mit dem *Exponenten* $n \in \mathbb{N}$. Dafür gelten dann die **Potenzrechenregeln:**

$$a^{m+n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}) = a^m \cdot a^n,$$

$$a^{m \cdot n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n} = \underbrace{(\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m})}_{n} = (a^m)^n,$$

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n} = (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n}) = a^n \cdot b^n.$$

■

Produkte a^k, $a^k b^l$, $a^k b^l c^m$, …von Potenzen von Zahlen oder Variablen $a, b, c, \ldots$ nennt man **Potenzprodukte.** Addiert man Potenzen oder Potenzprodukte, die evtl. zuvor noch mit gegebenen Zahlen multipliziert wurden, so spricht man von einer **Linearkombination** von Potenzen bzw. Potenzprodukten mit den gegebenen Zahlen als *Koeffizienten.* Solche Terme kommen oft vor, z.B. sog. *Polynomausdrücke* wie $3 - 2x + x^3 - 5x^4$. (Dies steht für $3+(-2)x+0x^2+1x^3+(-5)x^4$, die Koeffizienten bei $x^0 = 1, x, x^2, x^3, x^4$ sind also der Reihe nach $3, -2, 0, 1, -5$. Beachte, dass der nicht aufgeschriebene Summand mit x^2 als Null interpretiert werden muss. Dagegen ist der nicht aufgeschriebene Koeffizient von x^3 als 1 zu interpretieren und nicht etwa als 0. Wäre er 0, so würde man den x^3 Term gar nicht aufschreiben!) Ein Polynomausdruck in drei Variablen ist z.B. $2x^3yz^2 - 7xy^4 + \frac{1}{2}y^2z^3 - x^4$ (mit den Koeffizienten $2, -7, \frac{1}{2}, -1$ vor den aufgeführten Potenzprodukten).

Die Grundrechenart **Subtraktion** kann man im Bereich $\mathbb{N}$ nicht uneingeschränkt ausführen, wohl aber innerhalb von $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. In diesen Bereichen gibt es zu jeder Zahl b genau eine Zahl c mit $b + c = 0$. Man nennt c das *additive Inverse*, das *Negative* oder die *Gegenzahl* zu b und bezeichnet diese Zahl mit $-b$. (Auf der Zahlengeraden wird $-b$ gegenüber von b in gleicher Entfernung vom Nullpunkt gezeichnet. Achtung: $-b$ muss nicht unbedingt eine positive Zahl sein, auch wenn das vorangestellte Minuszeichen dies suggeriert; wenn b negativ ist, also links vom Nullpunkt liegt, so liegt $-b$ rechts von Null, ist also positiv! Zur deutlichen Unterscheidung von b und seiner Gegenzahl $-b$ schreibt man manchmal auch $+b$ für b; dann muss natürlich $+b$ auch nicht unbedingt eine positive Zahl sein.) Allgemein ist $-b$ das Produkt von b mit der Gegenzahl zu 1, also $-b = (-1) \cdot b$. Daraus folgen mit $1 \cdot (-1) = -1$ und $(-1) \cdot (-1) = +1$ die bekannten **Vorzeichenregeln** $(-a) \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b)$ ("*Minus mal Plus gleich Minus*") und $(-a) \cdot (-b) = +(ab)$ ("*Minus mal Minus gleich Plus*"). Die **Differenz** $a - b$ von zwei Zahlen a, b wird nun erklärt als die Summe von a und der Gegenzahl zu b, also $a - b := a + (-b) = a + (-1) \cdot b$; dann ist $x = a - b$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x + b = a$.

Ganz analog erklärt man die Grundrechenart **Division**, die man in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ nur eingeschränkt ausführen kann, in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ aber ohne Einschränkungen (außer der einen, dass nicht durch Null dividiert werden darf). In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gibt es zu jeder Zahl $b \neq 0$ genau eine Zahl c mit $bc = 1$. Man nennt diese Zahl c das *multiplikative Inverse*, das *Reziproke* oder den *Kehrwert* von b und schreibt dafür $\frac{1}{b}$, $1/b$, $1\!:\!b$ oder b^{-1}. Der **Quotient** von zwei Zahlen a und $b \neq 0$ wird nun definiert als das Produkt $a \cdot \frac{1}{b}$ von a mit dem Kehrwert von b und er wird $\frac{a}{b}$, a/b, $a\!:\!b$ oder ab^{-1} notiert. Der Quotient $x = \frac{a}{b}$ ist dann die eindeutige Lösung der Gleichung $bx = a$. Beachte, dass dies nur für $b \neq 0$ gilt; denn *Division durch Null ist nicht erklärt und daher nicht erlaubt.* (Für $b = 0$, $a \neq 0$ hat die Gleichung $bx = a$ keine Lösung, für $b = 0$, $a = 0$ ist jede Zahl x eine Lösung.)

Im Unterschied zu Addition und Multiplikation gilt:

- *Bei Subtraktion und Division kommt es auf die Reihenfolge der Zahlen an, bei mehr als zwei Zahlen auch auf die Art der Zusammenfassung (Klammerung). Wenn das Rechenergebnis von der Klammerung abhängt, so muss man auch Klammern setzen!*

Also Vorsicht! Es ist $a - b \neq b - a$ und $a/b \neq b/a$ (außer wenn $a = b$); und $(a - b) + c \neq a - (b + c)$ (außer wenn $c = 0$) sowie $(a/b) \cdot c \neq a/(b \cdot c)$ und $(a/b)/c \neq a/(b/c)$ (außer wenn $c = 1$). Man darf also z.B. nicht $a/b/c$ ohne Klammern schreiben, weil dieser Term je nach Klammerung verschiedene Werte haben kann. Für die Übersichtlichkeit ist es gut, Vereinbarungen zum Einsparen von Klammern zu treffen. Z.B. vereinbart man über *Summen mit wechselnden Vorzeichen*

$$a - b + c - d - e + f + \ldots - z := a + (-b) + c + (-d) + (-e) + f + \ldots + (-z)\,,$$

d.h. man "arbeitet die Summe von links nach rechts ab". Weitere Vereinbarungen zum Klammernsparen sind: *Punktrechnung* ($\cdot$, :) *geht vor Strichrechnung* $(+, -)$, also z.B. $a + bc = a + (b \cdot c)$ (nicht etwa $= (a + b) \cdot c$) und $a/b - c = \frac{a}{b} - c$ (nicht etwa $= \frac{a}{b-c}$), und *Multiplikation geht vor Division*, also z.B. $a/bc = \frac{a}{bc}$ (nicht etwa $= \frac{a}{b} \cdot c$). Aber "$a/b/c$" darf man nicht schreiben, weil es als $(a/b)/c = \frac{a}{bc}$ oder als $a/(b/c) = \frac{ac}{b}$ interpretiert werden könnte, was verschieden ist (außer für $c = 1$).

Oft wird ein Quotient $\frac{a}{b}$ als "Bruch" bezeichnet. Genau genommen ist ein *Bruch* aber ein Paar von Zahlen a und b, genannt *Zähler* und *Nenner* des Bruchs, und wenn $b \neq 0$ ist, so ordnet man einem solchen Bruch eine Zahl als *Wert des Bruches* zu, nämlich das Ergebnis $\frac{a}{b}$ der Division des Zählers durch den Nenner. Brüche mit verschiedenen Zählern und Nennern können durchaus denselben Wert haben, z.B. ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{500}{1000} = \frac{0.25}{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$. (Wir beschränken uns keineswegs darauf, dass Zähler und Nenner immer ganze Zahlen sein sollen, wie man hier sieht.) Für das Umgehen mit Brüchen gelten dann die bekannten **Bruchrechenregeln**, die das Ergebnis von Rechenoperationen mit Bruchwerten wieder als Wert eines Bruchs darstellen (wobei selbstverständlich alle Nenner $\neq 0$ sein müssen):

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a/d}{c/d} \qquad \textit{(Erweitern und Kürzen)},$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \textit{(Multiplikation von Brüchen)},$$

$$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \textit{(Kehrwert und Quotient von Brüchen; "Doppelbruchregeln")}$$

$$\frac{a}{d} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{d} \qquad \textit{(Addition/Subtraktion "gleichnamiger" Brüche)}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad \pm bc}{b \cdot d} \qquad \textit{(Addition/Subtraktion beliebiger Brüche durch "gleichnamig machen")}$$

Noch eine Warnung vor der (in der Schule üblichen) Schreibweise $l\frac{m}{n}$ für sog. *gemischte Brüche*. Damit ist nämlich nicht das Produkt $l \cdot \frac{m}{n}$ gemeint, sondern die Summe $l + \frac{m}{n}$, wobei l, m, n natürliche Zahlen mit $m < n$ sind ("l Ganze und m n-tel"). Also bedeutet $2\frac{1}{3}$ in dieser Schreibweise $\frac{7}{3}$ und nicht $\frac{2}{3}$. Da das zu Missverständnissen führen kann, sollte man die Schreibweise der gemischten Brüche vermeiden.

Brüche mit Nenner 100 kommen in der Wirtschaftswissenschaft besonders oft vor, weil sie Grundlage der **Prozentrechnung** sind. $p\%$ (p Prozent) ist nämlich eine Abkürzung für $\frac{p}{100}$. Diese Zahl kann man dezimal darstellen, indem man in der (von links mit Nullen aufgefüllten) Dezimalbruchdarstellung von p den Dezimalpunkt um zwei Stellen nach links verschiebt. Also ist $12\% = 0.12$, $5\% = 0.05$, $2.5\% = 0.025$ etc. (Mehr zur Prozentrechnung sagen wir in Kap. 2.

Die Dezimalbruchschreibweise reeller Zahlen ist eine Darstellung als Linearkombination von Potenzen der "Basis" 10 mit "Ziffern" 0,1,...,8 oder 9 als Koeffizienten. Bei nichtganzen Zahlen treten dabei auch Potenzen von 10 mit negativem Exponenten auf, d.h. Potenzen von $\frac{1}{10}$. Allgemein erklärt man die **Potenzen mit ganzen Exponenten** zu einer Basis $b \neq 0$ durch $b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wie früher, durch $b^0 := 1$, wenn der Exponent Null ist, und durch $b^{-n} := \underbrace{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b}}_{n} = (\frac{1}{b})^n = 1/b^n$, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl $-n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ist (also $n \in \mathbb{N}$). ("0^0" bleibt undefiniert.) Man kann sich dann leicht davon überzeugen, dass die drei **Potenzgesetze für beliebige ganze Exponenten** genau so gelten, wie wir sie früher aufgeführt haben, und dass außerdem auch noch das weitere Potenzgesetz $(a/b)^n = a^n/b^n = a^n b^{-n}$ für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ gültig ist (vorausgesetzt natürlich die Basen a, b sind nicht Null).

BEISPIEL: Die Potenzen der Zahl 10 mit positiven und negativen Exponenten spielen eine besondere Rolle bei der Darstellung von positiven Zahlen als **Dezimalbruch**.

$$a = d_m \ldots d_2 d_1 d_0 \quad \text{mit Ziffern} \quad d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

ist nämlich die Dezimalschreibweise für die natürliche Zahl

$$a = d_m 10^m + \ldots + d_2 10^2 + d_1 10 + d_0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i,$$

$$b = 0.z_1 z_2 \ldots z_n \quad \text{mit Ziffern} \quad z_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

ist die dezimale Darstellung der rationalen Zahl

$$b = z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + \ldots + z_n 10^{-n} = \sum_{j=1}^{n} z_j 10^{-j},$$

und ein allgemeiner **abbrechender Dezimalbruch** (*endlicher Dezimalbruch*)

$$d_m \ldots d_1 d_0 . z_1 z_2 \ldots z_n \quad \text{mit Ziffern} \quad d_i, z_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

ist nichts anderes als der dezimale Code für die Summe von a und b. In dieser Form kann man genau die rationalen Zahlen schreiben, die als Bruch darstellbar sind mit Zähler aus $\mathbb{N}_0$ und mit einer natürlichen Zahl als Nenner, die nur von den Primzahlen 2 und 5 geteilt wird; denn durch Erweitern kann man dann auch eine Zehnerpotenz als Nenner erreichen.

Alle anderen positiven reellen Zahlen, auch so einfache rationale Zahlen wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1358}{1100}, \ldots$, sind nur als **unendlicher Dezimalbruch**

$$r = d_m \ldots d_1 d_0 . z_1 z_2 \ldots z_n z_{n+1} \ldots$$

darstellbar, mit endlich vielen Ziffern d_i vor und und unendlich vielen Ziffern z_j hinter dem Dezimalpunkt. Diese Darstellung ist eine Abkürzung ist für

$$r = \sum_{i=0}^{m} d_i 10^i \; + \; \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} z_j 10^{-j},$$

d.h. für den Grenzwert bei $n \to \infty$ des Dezimalbruchs, der durch Abbrechen mit der n-ten Stelle nach dem Dezimalpunkt entsteht. (Dieser unterscheidet sich von r höchstens noch um 10^{-n}. Da 10^{-n} mit wachsendem n beliebig klein wird, approximiert der abgebrochene Dezimalbruch die Zahl r beliebig genau, wenn n groß genug gewählt wird. Mehr über Grenzwerte muss man hier nicht wissen.)

Rationale Zahlen kann man übrigens daran erkennen, dass sie eine *periodische Dezimalbruchdarstellung* haben, d.h. ab einer gewissen Stelle nach dem Dezimalpunkt wiederholt sich eine endliche Ziffernfolge (die oft durch Überstreichung gekennzeichnet wird) immer wieder. Zum Beispiel gilt $\frac{1}{3} = 0.\overline{3} = 0.333\ldots$, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} = 0.142857142857142857\ldots$ und $\frac{1358}{1100} = 1.2\overline{345} = 1.23454545\ldots$. Irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, e, π haben dagegen eine unendliche Dezimalbruchdarstellung ohne Periodizität (auch wenn der Taschenrechner bzw. Computer nur endlich viele Stellen zeigt).

Alles, was hier gesagt wurde, gilt übrigens ganz analog, wenn man statt 10 eine andere Zahl aus $\mathbb{N}_{\geq 2}$ als "*Basis des Zahlsystems*" nimmt, wobei als "Ziffern" dann die Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ verwendet werden, die kleiner als die gewählte Basis sind. Eine Rolle spielen hier, besonders in der Informatik, vor allem die Basen 2 (*dyadische Zahldarstellung*, Ziffern 0,1) und 16 (*hexadezimale Zahldarstellung*; Ziffern 0,1,...,15; statt der letzten sechs "Ziffern" 10,11,12,13,14,15 verwendet man dabei die Großbuchstaben A,B,C,D,E,F). ■

Ein wichtiges Rechengesetz, das Addition und Multiplikation verbindet, müssen wir noch ansprechen. Das **Distributivgesetz** besagt in seiner einfachsten Form:

- *Man multipliziert eine Summe mit einem Faktor, indem man jeden Summanden damit multipliziert und die entstehenden Produkte aufsummiert.*

Also: $a(b+c) = ab + ac$ und allgemeiner

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} ab_i \,, \qquad a \cdot (b_1 + \ldots + b_n) = ab_1 + \ldots + ab_n \,.$$

Dies ist nichts anderes als die Regel über das **Ausklammern**: Faktoren, die allen Summanden gemeinsam sind, kann man vor die Klammer (vor die Summe) ziehen. Ein Spezialfall ist die Regel über die **Vorzeichenänderung bei Summen**: Das Negative einer Summe bildet man, indem man jeden einzelnen Summanden durch sein Negatives ersetzt, also bei allen Summanden das Vorzeichen ändert:

$$-(a - b + c - e - f + \ldots - z) = -a + b - c + e + f - \ldots + z \,.$$

(Beachte, dass das links nicht aufgeschriebene Vorzeichen zu a ein "+" ist und auch geändert werden muss. Es wäre aber ein krasser Fehler, allein bei diesem ersten Summanden a das Vorzeichen umzukehren! Das Minuszeichen vor der Klammer bedeutet ja die Multiplikation mit -1, und nach dem Distributivgesetz muss dann zur Auflösung der Klammer *jeder* Summand mit -1 multipliziert werden.)

Eine allgemeinere Version des Distributivgesetzes ist folgende:

- *Man multipliziert Summen miteinander, indem man die Produkte aufaddiert, die entstehen, wenn man auf alle möglichen Arten aus jeder Summe jeweils einen Summanden herausgreift und die herausgegriffenen Zahlen miteinander multipliziert.*

Also:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd\,,\\ (a+b)(c+d+e) &= ac+ad+ae+bc+bd+be\,,\\ (a+b)(c+d)(e+f) &= ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf\,.\end{aligned}$$

BEISPIEL: Eine Folge von Zahlen $a_i \neq 0$ bildet eine **geometrische Progression** (oder: *geometrische Folge*), wenn der Quotient aufeinander folgender Zahlen stets derselbe ist, $a_{i+1}/a_i = q$, also $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3, \ldots$. Die Summe aus den Gliedern einer solchen geometrischen Folge kann man berechnen, wenn $q \neq 1$ ist (im Fall $q = 1$ hat man lauter gleiche Summanden, also kein Problem), und zwar mit folgendem Trick, der das Distributivgesetz und die Potenzgesetze verwendet:

$$\begin{aligned} & (1-q)\cdot(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\\ = \; & (1-q)\cdot(a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1})\\ = \; & a_1\cdot(1-q)\cdot(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})\\ = \; & a_1\cdot(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}-q-q^2-q^3-\ldots-q^n)\\ = \; & a_1\cdot(1-q^n) \;=\; a_1-a_1q^n \;=\; a_1-a_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Also gilt die (auch in ökonomischen Anwendungen wichtige; siehe Kap. 2)

- **geometrische Summenformel:** $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1-a_{n+1}}{1-q}}$

  in Worten: *Die Summe einer geometrischen Progression zum Quotienten* $q \neq 1$ *ist die mit* $1-q$ *dividierte Differenz des ersten Summanden und des ersten nicht mehr berücksichtigten Gliedes.*

Konkret ist z.B.

$$1+2+4+8+16+32 = \frac{1-64}{1-2} = 63 \qquad (q=2)\,,$$

$$\sum_{k=2}^{n} 3^k = \frac{3^2-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-3^2}{2} = \tfrac{3}{2}(3^n-3) \qquad (q=3)\,,$$

$$1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{64} = \frac{1-\frac{1}{256}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{255\cdot 4}{256\cdot 5} = \frac{51}{64} \qquad (q=-\tfrac{1}{4})\,.$$

Wenn q echt zwischen -1 und 1 liegt, so wird $a_{n+1} = a_1 q^n$ mit wachsendem n dem Betrag nach beliebig klein, d.h. die geometrische Summe strebt dann mit $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\frac{a_1}{1-q}$. In der Mathematik schreibt man dafür symbolisch

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

und nennt $\frac{a_1}{1-q}$ den Wert der *unendlichen Reihe* $a_1+a_2+a_3+\ldots$. Konkret ist z.B.

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots = \frac{1/2}{1-1/2} = 1 \qquad (q=\tfrac{1}{2}).$$

Das bedeutet natürlich nicht, dass man unendlich viele Summanden addieren kann, sondern nur, dass die Summen, die man durch Addition der ersten n Glieder erhält, den angegebenen Werten beliebig nahe kommen, wenn n groß genug ist. ∎

Ein anderes Beispiel für die Anwendung des allgemeinen Distributivgesetzes liefern die binomischen Formeln:

BEISPIEL: Die bekannten **binomischen Formeln**

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

und entsprechend (mit $-b$ statt b)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

sowie

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

sind einfache Anwendungen des Distributivgesetzes. Auch

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^3 & = & (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) \\ & = & a\cdot a\cdot a + a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot a + a\cdot b\cdot b \\ & + & b\cdot a\cdot a + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot a + b\cdot b\cdot b \\ & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

kann man (mit etwas Geduld) noch durch direktes Ausmultiplizieren berechnen. Bei Potenzen eines "Binoms" (damit ist eine Summe von zwei Summanden gemeint) mit größeren Exponenten $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots(a+b)}_{n},$$

ist das Ausmultiplizieren problematisch. Klar ist aber nach dem Distributivgesetz, dass das Ergebnis eine Summe von Potenzprodukten der Form $a^{n-i}b^i$ sein wird. Dabei erhält man jedes Potenzprodukt $a^{n-i}b^i$ gerade so oft, wie man aus den n Klammern i-mal den zweiten Summanden b auswählen kann (und aus den restlichen $n-i$ Klammern dann den ersten Summanden a). Eine Zählung ergibt den sog. **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{i} := \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

als Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten (Klammern) i Stück ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen (mit $\binom{n}{i} := 1$ für $i=0$ oder $i=n$). Daher gilt der

- **Binomialsatz:** $$\begin{array}{rl} (a+b)^n & = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \\ & = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n . \end{array}$$

(In dieser Formel sind evtl. auftauchende Terme der Form 0^0 als 1 zu interpretieren.) Die Binomialkoeffizienten sind natürliche Zahlen und können angeordnet werden im sog. *Pascalschen Dreieck*, in dem jede Zahl die Summe der zwei darüber stehenden ist.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

In der binomischen Fomel zum Exponenten n treten gerade die Zahlen als Binomialkoeffizienten auf, die in der n-ten Zeile des Dreicks stehen. ■

Es gibt (seltener gebrauchte) Verallgemeinerungen für Potenzen von "Multinomen" (Summen von mehr als zwei Summanden) $a+b+c$, $a+b+c+d$, $a_1+a_2+\ldots a_m$. Zum Beispiel ist

$$(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k ,$$

wobei über alle Wahlen von i, j, k aus $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit $i+j+k=n$ zu summieren ist, und der allgemeine *Multinomialsatz* besagt für n-te Potenzen von Summen mit m Summanden:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{i_m},$$

wo über alle Wahlen der Exponenten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ aus $\{0, 1, \ldots, n\}$ mit $i_1+i_2+\ldots+i_m=1$ zu summiert wird. All dies ist nichts weiter als das allgemeine Distributivgesetz zusammen mit einer Abzählung, auf wieviele verschiedene Arten dasselbe Potenzprodukt von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ entstehen kann, wenn man sich aus den n Klammern $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$ jeweils einen Summanden herausgreift und die herausgegriffenen Zahlen miteinander multipliziert. Die so bestimmten Anzahlen

$$\binom{n}{i_1\, i_2 \ldots i_m} = \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_m!} \qquad (i_1+i_2+\ldots+i_m = n)$$

sind die Koeffizienten, die im Multinomialsatz auftreten, und heißen dementsprechend *Multinomialkoeffizienten.* (Das sind natürliche Zahlen; die Faktoren der Fakultäten im Nenner lassen sich also allesamt gegen Teiler der Fakultät im Zähler kürzen.)