Ausgewählte Kapitel der Analysis: Nichtlineare Dispersive Gleichungen

apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Wintersemester 2017/18

(nicht korrigierte Fassung)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
1.1 Grundlagen . . . 2
1.1.1 Erste Beispiele . . . 3
1.1.2 Das Anfangswertproblem (I) . . . 6
1.1.3 Dispersion . . . 10
1.1.4 Das Anfangswertproblem (II) . . . 12
1.1.5 Das Konzept des Wohlgestellten Problems . . . 13
1.1.6 Erhaltungsgrößen . . . 14
1.2 Datenräume . . . 17
1.2.1 Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen . . . 17
1.2.2 Sobolev-Räume und Besov-Räume . . . 45

2 Die semilineare Schrödingergleichung auf $\mathbb{R}^n$ **63**
2.1 Heuristische Vorbetrachtungen und ein erstes Ergebnis . . . 63
2.2 Strichartz-Abschätzungen . . . 67
2.3 L^2-Theorie . . . 81
2.4 Die lokale H^s-Theorie, $s > 0$ . . . 92

3 Die Fourier-Restriktions-Norm-Methode **99**
3.1 Die Bourgain-Räume $X_{s,b}$ . . . 99
3.2 Abschneidefunktionen und lineare Abschätzungen . . . 106
3.3 Ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz . . . 109
3.4 Anwendung auf gKdV . . . 113
3.4.1 Abschätzungen für freie Lösungen . . . 113
3.4.2 Subkritische LWP-Theorie für gKdV . . . 115

Kapitel 1

Einführung

1.1 Grundlagen

Die Gleichungen (bzw. Gleichungssysteme) mit denen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen wollen, haben die folgende Gestalt:

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u) \tag{1.1}$$

dabei sind:

(i) $u\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{K}^n$ die gesuchte Lösung die von den Orts-/Raum-Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und der Zeit-Variablen $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ abhängt. Gleichung (1.1) ist eine Evolutionsgleichung (partielle Differentialgleichung). Zumeist gilt $N = 1$ (also handelt es sich nicht um ein Differentialgleichungssystem). In Teilen der Vorlesung behandeln wir auch semi-periodische Probleme, in diesem Fall: $u\colon \mathbb{T}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{K}^N$, dabei ist $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$.

(ii) $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ die Zeitableitung von u.

(iii) $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ der Gradient bezüglich der Orts-Variablen, auch manchmal: ∇_x (im Gegensatz zu $\nabla_{x,t}$).

(iv) $\varphi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}^{N\times N}$ die Phasenfunktion. Wenn Gleichung (1.1) eine partielle Differentialgleichung im engeren Sinne ist, dann ist φ ein Polynom, etwa für $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$ und ein Monom $\varphi(\xi) = \xi^\alpha = \prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j}$ haben wir:

$$\varphi(-i\nabla) = \prod_{j=1}^n \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|}\nabla^\alpha$$

(v) $N(u)$ der nichtlineare Teil der Gleichung mit einer nichtlinearen Funktion N, die explizit von u, Ableitungen von u und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch von $\overline{u}$ abhängt. Spätere Einschränkung wird sein, dass die Ableitungs-Ordnung im linearen Teil diejenige in $N(u)$ dominieren soll (das führt zu einer semi-linearen (pseudo-)Differentialgleichung). Methodisch bedeutet das, dass wir den nichtlinearen Teil $N(u)$ als "kleine" Störung der linearen

Gleichung behandeln können — zumindest für kurze Zeiten oder im Fall kleiner Amplitude.

Exkurs: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

wobei $x\xi = \sum_{j=1}^n x_j\xi_j$ das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Falls auch $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ so ist $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = i\xi_j\hat{f}(\xi)$. Nehmen wir jetzt an, φ sei ein Polynom, der Einfachheit halber: $\varphi(\xi) = \xi^\alpha$ und f eine Funktion, die Ableitungen bis zur Ordnung $|\alpha|$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Dann ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi(-i\nabla)f)(\xi) &= (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}\Big(\prod_{j=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^{\alpha_i} f\Big)(\xi) \\ &= (-i)^{|\alpha|} i^{|\alpha|}\varphi(\xi)\hat{f}(\xi) = \varphi(\xi)\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Das heißt, wenn auch noch $\varphi(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, haben wir:

$$\varphi(-i\nabla)f = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F}f$$

wobei die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch:

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Das nehmen wir als Möglichkeit allgemeinere Phasenfunktionen zu definieren, wir setzen

$$\varphi(-i\nabla)f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F}f)(x) \tag{1.2}$$

Wir merken an dieser Stelle an, dass wir eine allgemeinere Definition der Fourier-Transformation benötigen, so dass z.B. die Inverse stets in natürlicher Weise existiert und auch die Ableitungen von Funktionen stets transformiert werden können.
Ist die Funktion φ in Gleichung (1.2) kein Polynom, so nennt man $\varphi(-i\nabla)$ einen Pseudodifferentialoperator und Gleichungen, die solche Operatoren enthalten, heißen Pseudodifferentialgleichungen.
Die Phasenfunktion ist das bestimmende Merkmal des linearen Teils von Gleichung (1.1), und sie bestimmt den dispersiven Charakter der Gleichung.

1.1.1 Erste Beispiele

Beispiel (1) Schrödinger-Gleichung

(1.1) lineare Schrödinger-Gleichung:

$$iu_t + \Delta u = V \cdot u$$

dabei ist $\Delta = \sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial x_j})^2$ der Laplace-Operator und $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein reellwertiges Potential. Diese Gleichung bildet die Grundlage der nicht-relativistischen Quantenmechanik. Man kann das Integral

$$\int_{\Omega\subseteq\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2\mathrm{d}x$$

interpretieren als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des durch u beschriebenen Teilchens zur Zeit t in Ω. Hieran kann man schon sehen, dass es manchmal sinnvoll ist weitere Bedingungen an die Lösung einer Differentialgleichung zu stellen, wie hier zum Beispiel, dass u quadratintegrabel ist. Indem wir schreiben $0 = u_t - i\Delta u = u_t - i\varphi(-i\nabla)u$ können wir ablesen, dass hier für die Phasenfunktion gilt: $\varphi(-i\nabla) = \Delta$, also $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$.

(1.2) semi-lineare Schrödinger-Gleichung (NLS): $iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u$, mit einem $p > 1$. Insbesondere der Fall $p = 3$ (cubic NLS) tritt in einer Vielzahl von Modellgleichungen aus verschiedenen Bereichen der Physik auf. Man kann die rechte Seite als $V \cdot u$ interpretieren mit einem reellen Potential, das hier allerdings von der Unbekannten u abhängt.

(1.3) nichtlineare Schrödinger-Gleichung mit Ableitungen (D(erivative)NLS): hier hat die Nichtlinearität allgemein die Form: $N(u) = P(u, \nabla u, \overline{u}, \nabla\overline{u})$, mit P als Polynom (allgemein), insbesondere ist $N(u) = \frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u)$ eine Modellgleichung in einer Raumdimension, die aus der Plasma-Physik kommt.

(2) Korteweg-de-Vries-Gleichung

(2.1) klassische KdV:

$$u_t + u_{xxx} = (u^2)_x$$

Diese Gleichung wurde 1895 von G. de Vries und D.J. Korteweg aufgestellt um die Bewegung von Oberflächenwellen in langen Kanälen zu beschreiben. Der lineare Teil der Gleichung: $u_t + u_{xxx} = 0$ ist die sogenannte Airy-Gleichung. Die Phasenfunktion für die klassische KdV-Gleichung lautet $\varphi(\xi) = \xi^3$. Verallgemeinerungen der KdV-Gleichung in verschiedener Richtugen werden untersucht, und manche davon treten tatsächlich auch als "Universal-Modelle" für diverse physikalische Phänomene auf.

(2.2) Verallgemeinerungen basieren häufig auf der gKdV-k Gleichung:

$$u_t + u_{xxx} = (u^{k+1})_x \qquad \text{g-KdV-k} \;\; k \in \mathbb{N}$$

Für $k = 1$ bekommen wir die ursprüngliche KdV-Gleichung. Für $k = 2$ die sogenannte modified KdV-Gleichung (mKdV). Zwischen den Lösungen dieser beiden Gleichungen gibt es eine nichtlineare Transformation, die "Miura-map". (Mitunter werden auch nichtganzzahlige Exponenten $\alpha \in]1, \infty[$ untersucht.)

(2.3) Die "dispersion generalized" KdV-Gleichung:

$$u_t - |D_x|^\alpha \partial_x u = (u^{k+1})_x$$

wobei der Pseudodifferentialoperator $|D_x|^\alpha = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\alpha\mathcal{F}$ mit Hilfe der Fourier-Transformation erklärt ist. Hier hat man die Phasenfunktion: $\varphi(\xi) = |\xi|^\alpha\xi$. Spezialfälle sind:

i. $\alpha = 1$, $k = 1$: Benjamin-Ono-Gleichung (BO)

ii. $\alpha = 1$, $k \geq 2$: generalized BO (gBO-k)

Diese erweist sich als deutlich schwieriger als (gKdV) bzw. als der Fall $\alpha > 1$.

(2.4) Es gibt auch Verallgemeinerungen auf höhere Raumdimensionen

(2.4.1) Zakharov-Kuznetsov-Gleichung

$$u_t + \partial_x \Delta u = \partial_x(u^{k+1}) \qquad \text{(gZK-k)} \;\; k \in \mathbb{N}$$

hier $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ der volle Laplace-Operator bezüglich aller Raumvariablen. Hier $u\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}, (x, y, t) \to u(x, y, t)$. Der Fall $k = 1$, $n \in \{2, 3\}$ beschreibt die Ausbreitung nichtlinearer akustischer Wellen in einem magnetisierten Plasma.

(2.4.2) Kadomtsev–Petviashvili equation

$$u_t + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^{-1} \Delta_y u = \partial_x(u^{k+1}) \qquad \text{(gKP-k)} \;\; k \in \mathbb{N}$$

Im Falle $\varepsilon = -1$ heißt diese Gleichung KP-I und bei $\varepsilon = +1$ heißt sie KP-II. Sie wurde 1970 von Kadomtsev und Petviashvili aufgestellt um lange Oberflächenwellen in x-Richtung auf einer Flüssigkeit ($n = 2$) bei langsamer Bewegung in y-Richtung ($k = 1$) zu beschreiben. Die Phasenfunktion ist hier:

$$\varphi(\xi, \eta) = \xi^3 - \varepsilon \frac{|\eta|^2}{\xi}$$

und der Faktor $\frac{1}{\xi}$ bereitet in der Tat gewisse technische Schwierigkeiten.

(2.4.3) Novikov-Veselov-Gleichung ($n = 2$). Reelle Formulierung:

$$u_t - \frac{1}{4}(\partial_x^3 - 3\partial_x \partial_y^2)u = 3\Big(\partial_z(uv) + \partial_{\overline{z}}(u\overline{v})\Big)$$

dabei $\partial_{\overline{z}} v = \partial_z u$ und $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ bzw. $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Also eine quadratische Nichtlinearität mit im wesentlichen einer Ableitung, aber (aufgrund der Pseudodifferentialoperatoren $\partial_{\overline{z}}^{-1}\partial_z$) dennoch recht komplizierter Struktur. Die Phasenfunktion ist hierbei: $\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi\eta^2)$.

(3) nichtlineare Klein-Gordon-Gleichungen (NKG):

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = N(u)$$

Wenn $m = 0$ ist, dann handelt es sich um eine Wellengleichung im engeren Sinne. Die lineare Klein-Gordong-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = V \cdot u$$

wobei eine $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von u unabhängige Potentialfunktion ist, wurde in den 1920er Jahren unabhängig von Schödinger einerseits und Klein & Gordon andererseits vorgeschlagen als grundlegende Gleichung einer relativistischen Formulierung der Quantentheorie. Sie erwies sich als unvereinbar mit der axiomatischen Formulierung der Quantenmechanik, die

wenig später entwickelt wurde (J. v. Neumann u.a.) und die eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit-Variable t verlangt. Dieser Forderung genügt die Dirac-Gleichung, die im Lauf der 1930er Jahre die Klein-Gordon-Gleichung verdrängt hat. Dennoch tritt die nichtlineare KGG — oft in Systemen mit anderen Gleichungen — in verschiedenen physikalischen Theorien an, die Relatvitätstheorie und Quantenmechanik zu verbinden. Als Nichtlinearität trifft man zum Beispiel auf $N(u) = |u|^{p-1}u$ oder $N(u) = P(u, \nabla_{x,t}u)$. Inwiefern handelt es sich hierbei um ein System wie in Gleichung (1.1), denn hier wird zweimal nach der Zeit-Variable abgeleitet?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A^2, \qquad\qquad A^2 = -\Delta + m^2\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial t} + iA\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - iA\Big)\end{aligned}$$

Nun definieren wir:

$$u_\pm = \frac{1}{2i}A^{-1}\Big(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}\Big)u$$

so dass $u_+ + u_- = u$. Dann gilt außerdem:

$$\begin{aligned}\Big(iA \mp \frac{\partial}{\partial t}\Big)u_\pm &= \frac{1}{2i}A^{-1}\Big(iA \mp \frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}\Big)u\\ &= -\frac{1}{2i}A^{-1}\Big(A^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u\\ &= -\frac{1}{2i}A^{-1}N(u_+ + u_-)\end{aligned}$$

Und so erhalten wir ein System wie in Gleichung (1.1):

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} \mp iA\Big)u_\pm = \pm\frac{1}{2i}A^{-1}N(u_+ + u_-)$$

mit $A = \varphi(-i\nabla)$ und $\varphi(\xi) = \sqrt{|\xi|^2 + m^2}$.

1.1.2 Das Anfangswertproblem (I)

Wir betrachten hier zunächst den Fall, dass es sich bei der zu untersuchenden Gleichung um eine homogene lineare Gleichung handelt, also $N(u) = 0$. Die Eindeutigkeit einer Lösung erzwingen wir durch Stellen eines zusätzlichen Anfangswertproblems:

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{1.3}$$

wobei $u_0 \in H$ vorgegeben ist. Dabei wiederum ist H ein Vektorraum von (verallgemeinerten) Funktionen, die auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind (H ist zumeist ein Hilbert-Raum, $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein guter Kandidat). Die Gleichungen (1.1) und (1.3) zusammen bezeichnet man als Cauchy-Problem (zur Gleichung (1.1)).
Wir versuchen mit Hilfe der Fourier-Transformation eine formale Lösung von

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{1.4}$$

zu finden (hierbei nehmen wir an, dass u_0, u ausreichend glatt und auch schnell fallend sind). Die Fourier-Transformation in x alleine (also nur den Orts-Variablen)

beider Gleichungen ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = i\varphi(\xi)\hat{u}(\xi,t), \qquad \hat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi)$$

Fixieren wir nun ξ und setzen $f(t) := \hat{u}(\xi,t)$ so handelt es sich um eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für f:

$$f'(t) = i\varphi(\xi)f(t), \qquad f(0) = \widehat{u_0}(\xi)$$

Natürlich wissen wir, dass diese die eindeutig bestimmte Lösung $f(t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{i\varphi(\xi)t} = \hat{u}(\xi,t)$ besitzt. Nun liefert uns die inverse Fourier-Transformation:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{it\varphi(\xi)} \widehat{u_0}(\xi)\mathrm{d}\xi =: (U_\varphi(t)u_0)(x) \tag{1.5}$$

Man nennt $U_\varphi(t)$ häufig Evolutionsoperatoren, Propagatoren oder ähnliches.
Exkurs: Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Faltung:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

Der Faltungssatz besagt, dass die Fourier-Transformation die Faltung zweier Funktionen in das punktweise Produkt ihrer Fourier-Transformierten überführt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x-y)\mathrm{d}x \right) g(y)\mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x g(y)\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung von Gleichung (1.5) können wir also ergänzen:

$$\hat{u}(\xi,t) = \underbrace{e^{it\varphi(\xi)}}_{=\hat{f}(\xi)} \underbrace{\widehat{u_0}(\xi)}_{=\hat{g}(\xi)} \xRightarrow[\text{der Fourier-Trafo.}]{\text{Eindeutigkeitssatz}} u(x,t) = E_\varphi(t) * u_0(x)$$

wobei $\widehat{E_\varphi(t)}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{it\varphi(\xi)}$. Daran sehen wir, dass $U_\varphi(t)$ ein Faltungsoperator ist. $E_\varphi(t)$ heißt Fundamentallösung für das Cauchy-Problem. Diese interpretieren wir als Lösung von

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = 0, \qquad u(x,0) = \delta_0(x)$$

dabei ist das Dirac-Maß δ_0 definiert durch $\delta_0(A) = \chi_A(0)$ bzw. die Delta-Distribution definiert durch $\delta_0[f] = f(0)$. Das ergibt Sinn, wenn man sich erinnert, dass δ_0 das neutrale Element der Faltung ist. Zusammenfassend wissen wir nun also über unsere gefundenen Faltungsoperatoren:

$$U_\varphi(t)u_0 = E_\varphi(t) * u_0, \qquad \widehat{E_\varphi(t)}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{it\varphi(\xi)} \tag{1.6}$$

Beispiel
Die obige Rechnung ist im Rahmen der $L^1(\mathbb{R}^n)$-Theorie nur teilweise gerechtfertigt und lässt sich in manchen Fällen auch nicht durch eine allgemeinere Theorie von Faltung und Fourier-Transformation rechtfertigen. Betrachten wir dazu drei Beispiele:

(i) $u_t = \Delta u = i\varphi(-i\nabla)u$, also $\varphi(\xi) = i|\xi|^2$ (Wärmeleitungsgleichung). Wichtig zu beachten ist hier, dass mit $|\cdot|$ das reelle Betragsquadrat gemeint ist. Lösungs-Formel (1.5) ergibt:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

dies führt für jedes $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zur Lösung in der oben genannten Weise, da $\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}$ für jedes $t > 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

(ii) $iu_t + \Delta u = 0$, oder auch $u_t = i\Delta u$, also $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$ (Schrödinger-Gleichung). Wieder schauen wir uns die Lösungs-Formel (1.5) an:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-it|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

Dieses Integral existiert für $\widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aber $|e^{-it|\xi|^2}| = 1$ was bedeutet, dass die inverse Fourier-Transformation nicht existiert. Es bedarf also einer allgemeineren Theorie von Faltungen und Fourier-Transformation.

(iii) $u_t = -\Delta u$ (Wärmeleitungsgleichung nach Zeitumkehr). Also:

$$u(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

was wegen des starken Wachstums von $e^{t|\xi|^2}$ nur unter sehr starken Bedingungen an $\widehat{u_0}$ existiert und nicht zu einem akzeptablen Lösungsoperator führt (selbst für Gauß-Funktionen hat man bei dieser Gleichung blow-up in endlicher Zeit).

In der Physik fasst man die Lösung auf als (möglicherweise unendliche) Überlagerung von Funktionen der Form

$$(x,t) \mapsto e^{i(x\xi + t\varphi(\xi))} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \text{ Parameter} \tag{1.7}$$

auf. Diese heißen ebene Wellen, falls stets $|e^{i(x\xi+t\varphi(\xi))}| = 1$ gilt. Man merke, dass das genau dann der Fall ist, wenn φ reell ist.

Definition
Eine Differentialgleichung vom Typ (1.1) heißt (nicht-lineare) Wellengleichung im allgemeinen Sinn, falls $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung (i) Wellengleichungen im engeren Sinne sind Gleichungen zweiter Ordnung mit äquivalentem System zu Gleichung (1.1) mit $\varphi(\xi) = \pm|\xi|$.

(ii) Die Wärmeleitungsgleichung ist keine Wellengleichung, wohl aber die Schrödinger-Gleichung.

(iii) Wenn $\mathrm{Im}(\varphi(\xi)) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ so handelt es sich um eine gedämpfte Wellengleichung. Diese werden wir in dieser Vorlesung nicht untersuchen, obwohl einige der vorgestellten Methoden durchaus auch hierfür geeignet sind.

(iv) Für reelle Phasenfunktionen φ handelt es sich bei den Operatoren $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ um sogenannte unitäre Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Eine lineare Abbildung A auf einem Hilbert-Raum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt unitär, falls $A^{-1} = A^*$ ist, wobei A^* so definiert ist, dass $\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt.

Beweis. Mit dem Satz von Plancherel, der sagt: $\langle f, g\rangle_{L^2_x(\mathbb{R}^n)} = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2_\xi(\mathbb{R}^n)}$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\langle U_\varphi(t)f, g\rangle_{L^2_x} &= \langle \widehat{U_\varphi(t)f}, \hat{g}\rangle_{L^2_\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi(\xi)}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{e^{-it\varphi(\xi)}\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \langle f, U_\varphi(-t)g\rangle_{L^2_x} = \langle f, U_\varphi(t)^* g\rangle_{L^2_x}\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $U_\varphi(t)^* = U_\varphi(-t)$. Außerdem gilt für alle $s, t \in R$:

$$\begin{aligned}U_\varphi(t+s)f &= \mathcal{F}^{-1}e^{i(t+s)\varphi(\xi)}\mathcal{F}f \\ &= \mathcal{F}^{-1}e^{it\varphi(\xi)}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}e^{is\varphi(\xi)}\mathcal{F}f = U_\varphi(t)U_\varphi(s)f\end{aligned}$$

Also können wir insbesondere $\mathrm{Id} = U_\varphi(0) = U_\varphi(t-t) = U_\varphi(t)U_\varphi(-t)$ folgern und damit auch $U_\varphi(t)^{-1} = U_\varphi(-t) = U_\varphi(t)^*$. Also sind $(U_\varphi(t))_{t\in R}$ unitäre Operatoren. □

Ferner gilt

$$\lim_{t\to 0} \|U_\varphi(t)f - f\|_{L^2_x} = 0$$

Das sieht man wieder mit Hilfe des Satzes von Plancherel:

$$\begin{aligned}\|U_\varphi(t)f - f\|_{L^2_x} &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{it\varphi(\xi)}\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)|1 - e^{it\varphi(\xi)}|^2\mathrm{d}\xi \xrightarrow{t\to 0} 0\end{aligned}$$

Denn $|1 - e^{it\varphi(\xi)}|^2$ konvergiert punktweise gegen 0 für $t \to 0$ und ist ferner durch 4 beschränkt, also sind die Voraussetzungen des Lebesgueschen-Konvergenzsatzes erfüllt.

Das heißt wir haben auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ eine stark stetige Familie unitärer Operatoren $(U_\varphi(t))_{t\in R}$ mit den Gruppeneigenschaften wie im obigen Beweis, und solch eine Familie nennt man eine unitäre Gruppe. Dies umfasst die Isometrieeigenschaft $\|U_\varphi(t)u_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$, was als Erhaltungssatz für Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung aufgefaßt werden kann.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und in den "ebenen Wellen" (1.7) auch die Raum-Variable $x \in \mathbb{R}^n$ festhalten. Das Ergebnis sind die von den Parametern $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ abhängigen Funktionen

$$t \mapsto e^{ix\xi + it\varphi(\xi)} =: f(t)$$

die der Schwingungsgleichung $f''(t) = -\varphi(\xi)^2 f(t)$ mit der Frequenz $\varphi(\xi)$ genügt. Die Fourier-Variable ξ wird in der physikalischen Literatur als Wellenzahl (eindimensional) bzw. als Wellenvektor bezeichnet (in der mathematischen Literatur

oft irreführend: Frequenz als Bezeichnung für ξ). Damit wird eine Wellenbewegung als Überlagerung von Schwingungen aufgefaßt, was sicherlich eine intuitiv überzeugende Vorstellung ist, auf der die gesamte Fourier-Analysis basiert.

1.1.3 Dispersion

Bei Abwesenheit von Dämpfung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen gegeben durch die sogenannte Gruppengeschwindigkeit $v_g(\xi) := \nabla_\xi \varphi(\xi)$. Ist diese wie angegeben abhängig vom Wellenvektor ξ, so bedeutet dies, dass sich Beiträge unterschiedlicher (Wellenvektoren bzw.) Frequenzen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten. Dies führt zum "Zerfließen" oder zur Aufspaltung des Anfangsprofils u_0. Diesen Vorgang nennt man Dispersion, er lässt sich beobachten, wenn weißes Licht schräg auf ein (Glas-)Prisma fällt und in die Farben des Regenbogens aufgespalten wird. Dies beruht darauf, dass Licht verschiedener Frequenzen in Glas unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten hat und entsprechend unterschiedlich stark abgelenkt wird.
Mit dem "Zerfließen von Wellenpaketen" durch Dispersion ist ein schwacher Glättungseffekt verbunden, den man sich in der Analyse nichtlinearer dispersiver Gleichungen zunutze macht.

Vergleich

Wärmeleitungsgleichung	Schrödinger-Gleichung
$u_0 \in L^\infty$	$u_0 \in L^2$
$\Rightarrow U_\varphi(t)u_0 \in C^\infty \ \forall t > 0$	$\Rightarrow \lvert D_x\rvert^{\frac{1}{2}} U_\varphi(\cdot) \in L^\infty_x L^2_t$
	$\lVert \lvert D_x\rvert^{\frac{1}{2}} U_\varphi u_0 \rVert_{L^\infty_x L^2_t} \lesssim \lVert u_0 \rVert_{L^2_x}$

Um den für diese Vorlesung zentralen Begriff der Dispersion noch etwas genauer zu erklären, möchten wir kurz eingehen auf zwei lineare Wellengleichungen, die nicht bzw. nur schwach dispersiv sind:

Beispiel (i) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor. Die Gleichung

$$u_t + v \cdot \nabla u = u_t + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \tag{T}$$

heißt Transportgleichung. Wir fordern $v \cdot \nabla = -i\varphi(-i\nabla)$ was wegen $v \cdot \nabla = iv \cdot (-i\nabla)$ für $\varphi(\xi) = -v \cdot \xi$ erfüllt ist. Wir haben $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, insofern handelt es sich bei (T) um eine (lineare) Wellengleichung vom Typ (1.1). Diese ist jedoch nicht dispersiv, denn es ist $\nabla_\xi \varphi(\xi) = -v$ unabhängig von ξ. Lösungsformel (1.5) ergibt für eine Startfunktion $u_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$U_\varphi(t)u_0 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\xi - tv\xi)} \widehat{u_0}(\xi) \mathrm{d}\xi = u_0(x - vt)$$

ein Ergebnis, was man vielleicht auch ohne Fourier-Integrale hätte erraten können. Diese explizite Lösungsformel erklärt offenbar den Namen der Gleichung: Ihre Lösung besteht darin, dass das Anfangsprofil u_0 mit konstanter Geschwindigkeit v durch den $\mathbb{R}^n$ geschoben bzw. transportiert wird, ohne dass dieses Profil dabei deformiert wird (Ein Zerfließen des

Wellenpakets findet bei dieser nichtdispersiven Gleichung also tatsächlich nicht statt).

Ferner erhalten wir ein erstes einfaches und explizites Beispiel für eine unitäre Gruppe.

(ii) Die klassische homogene lineare Wellengleichung

$$\Box u := u_{tt} - \Delta u = 0$$

(a) Die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Wir zerlegen den Differentialoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big)$$

das ist etwas anders als oben. Wir sehen, dass der d'Alembert-Operator $\Box$ in zwei Transport-Operatoren faktorisiert, und demzufolge ist die allgemeine Lösung von $u_{tt} - u_{xx} = 0$ gegeben durch

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t) \qquad (*)$$

mit beliebigen C^2-Funktionen F und G. Ist zusätzlich das Cauchy-Problem

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

gestellt, so ist dessen eindeutige Lösung gegeben durch die sogennante Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)\mathrm{d}y\right).$$

Was wir an (*) ablesen können: Eine lineare Wellenbewegung in einer Raumdimension ist die Überlagerung von zwei reinen Transportvorgängen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten (man spricht von ein- und auslaufenden Wellen). Also: keine Dispersion!

(b) $n \geq 2$. Auch hierfür existieren Lösungsformeln, die die von d'Alembert verallgemeinern, in höheren Dimesnsionen werden diese recht kompliziert. Wir beschränken uns auf die Frage: Dispersiv oder nicht? Wie oben gesehen, ist für die klassische Wellengleichung

$$\varphi(\xi) = \pm|\xi| \qquad \text{(euklidische Norm)}$$

mit $\nabla_\xi \varphi(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$. Wir habe also $|\nabla_\xi \varphi(\xi)| = 1$ (konstant!), aber $\nabla_\xi \varphi(\xi)$ ist nicht unabhängig von ξ. Und tatsächlich lässt sich für freie Lösungen der klassischen Wellengleichung ein Abfall (engl. decay) des Supremums mit der Zeit feststellen:

$$\|U_{\pm|\xi|}(t)u_0\|_{L^\infty_x} \lesssim_{u_0} |t|^{-\frac{n-1}{2}}$$

was bei einem reinen Transportvorgang unmöglich ist. Wir haben also einen schwachen dispersiven Effekt, der darin besteht, dass ein (anfänglich möglicherweise stark konzentriertes) Wellenpaket sich mit der Wellenbewegung in alle Raumrichungen gleichmäßig ausbreitet. Wie oben ablesbar, ist dieser Effekt umso stärker, je größer die Raumdimension ist.

1.1.4 Das Anfangswertproblem (II)

Im folgenden Abschnitt schauen wir uns den Begriff der "milden Lösung" des Cauchy-Problems für die die inhomogenen linearen und die nichtlinearen Gleichungen an.
Zur Lösung des Cauchy-Problems $u(x,0) = u_0(x)$ für die inhomogene lineare Gleichung

$$u_t = i\varphi(-i\nabla)u + f \qquad (f = f(x,t))$$

hat man ähnlich wie bei den gewöhnlichen Differentialgleiungen eine "Variation der Konstanten"- bzw. "Duhamel"-Formel (auch "Duhamelsches Prinzip"): Die eindeutige Lösung des oben genannten Problems ist gegeben durch

$$u(t) = U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{1.8}$$

sofern das Integral auf der rechten Seite existiert und f integrierbar ist, so dass der Hauptsatz gilt. (Die x-Abhängigkeit wurde in dieser Formel unterschlagen.)
Formaler Beweis:

Beweis. Sei u durch Gleichung (1.8) gegeben, also

$$u(t) = U_\varphi(t)\left(u_0 + \int_0^t U_\varphi(-s)f(s)\mathrm{d}s\right)$$

Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t) &= i\varphi(-i\nabla)U_\varphi(t)\left(u_0 + \int_0^t U_\varphi(-s)f(s)\mathrm{d}s\right)\\ &\quad + U_\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U_\varphi(-s)f(s)\mathrm{d}s\\ &= i\varphi(-i\nabla)u + U_\varphi(t)U_\varphi(-t)f(t) = i\varphi(-i\nabla)u + f(t)\end{aligned}$$

□

Wenn f integrierbar ist, aber die Gültigkeit des Hauptsatzes infrage steht (weil f in den x-Variablen z.B. irregulär ist), nennt man u, definiert durch Gleichung (1.8) eine milde Lösung des Cauchy-Problems

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = f, \qquad u(0) = u_0$$

Auf diese Weise umgeht man viele Schwierigkeiten mit Vektorwertigen Integralen und schwachen Regularitäten. In derselben Weise umgehen wir einige Schwierigkeiten für die nichtlineare Gleichung (1.1), indem wir defininieren:

Definition
Unter einer Lösung des Cauchy-Problems

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u), \qquad u(0) = u_0 \in H$$

verstehen wir eine Funktion $u \in C([0,T],H)$, die der Integralgleichung

$$u(t) = U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s)N(u(s))\mathrm{d}s \tag{8'}$$

genügt.

Vorteile bzw. Zweck dieser Definition: Fixpunktgleichung. Man versucht also Fixpunktsätze, insbesondere den Banachschen, zur Lösung des Problems anzuwenden.

1.1.5 Das Konzept des Wohlgestellten Problems[1]

Anfangs- und Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen werden untersucht mit der Zielsetzung, aus der Kenntnis eines Systems zu einem Startpunkt (der am Rand eines Gebietes) Vorhersagen zu treffen über den Zustand des Systems in der Zukunft (bzw. im Inneren des Gebietes). Hierfür ist die Existenz einer Lösung allein nicht ausreichend, ihre Eindeutigkeit ist ebenso erforderlich. Wegen technischer oder prinzipieller Probleme bei der Messung der Daten (= Anfangs- oder Randzustände) benötigt man darüber hinaus die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten. Die Vorhersagen werden umso besser sein, je glatter die Abbildung Daten $\to$ Lösung ist. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition, die im wesentlichen auf Hadamard zurückgeht.

Definition
Wir nennen das Cauchy-Problem zu einer Gleichung vom Typ (1.1) lokal wohlgestellt (engl. locally well-posed, LWP) in einem Datenraum H, wenn zu jedem $u_0 \in H$ ein $T(u_0) > 0$ existiert, so dass folgendes gilt:

(i) Es existiert ein linearer Teilraum $X_T \subseteq C([0,T],H)$ ($\subseteq$ meint hier auch stetig eingebettet) und eine Lösung $u \in X_T$ der Integralgleichung (8′). (Hierbei hängt X_T nur von T, nicht von u_0 ab.)

(ii) Die Lösung ist in X_T eindeutig bestimmt.

(iii) Ist $B_T := \{u_0 \in H \mid \exists \text{ Lösung } u \in X_T \text{ von } (8') \text{ mit } u(0) = u_0\}$ so ist die Lösungsabbildung

$$S_T \colon B_T \to C([0,T],H), \qquad u_0 \mapsto u$$

stetig.

Bemerkung (i) Wir nennen ein solches Cauchy-Problem

(a) schlecht gestellt, wenn es nicht lokal wohlgestellt ist (engl. ill-posedness)

(b) global wohlgestellt (engl. globally well-posed, GWP), wenn (i)-(iii) auf jedem Zeitintervall $[0,T]$ gelten. (Das ist in der Regel bereits dann erfüllt, wenn sich die lokalen Lösungen eines LWP Problems auf jedes beliebige Zeitintervall $[0,T]$ fortsetzen lassen.)

(c) unbedingt wohlgestellt (engl. unconditionally well-posed), wenn $X_T = C([0,T],H)$ gewählt werden kann. (Dies bedeutet lediglich eine Verschärfung der Eindeutigkeitsaussage (ii). Daher spricht man auch von "unconditional uniqueness". Die Unterscheidung zwischen conditional und unconditional ist keine Haarspalterei: Es gibt für Daten sehr geringer Regularität tatsächlich Beispiele von Problemen, die conditionally well-posed aber unconditionally ill-posed sind.)

[1] Dieses Konzept betrifft allgemein alle Rand- und Anfangswertprobleme für partielle Differentialgleichungen, nicht nur die dispersiven. Der Begriff "Wohlgestelltheit" wird aber zugeschnitten auf Evolutionsgleichungen formuliert.

(ii) Ferner werden Wohlgestelltheitsaussagen differenziert nach der Regularität der Lösungsabbildung in Teil (iii) der Definition. So bedeutet etwa

(a) C^0_{unif}-well-posedness, dass S_T auf beschränkten Teilmengen von H gleichmäßig stetig, also uniformly continuous ist,

(b) C^k-well-posedness, dass S_T k-Mal stetig differenzierbar ist usw.

Beweise von ill-posedness beziehen sich häufig auf die Regularität der Lösungsabbildung, etwa wenn gezeigt wird, dass S_T (falls existent) nicht C^k (für ein bestimmtes k) oder nicht C^0_{unif} sein kann. (Aus solchen Ergebnissen kann man oft folgern, dass das betrachtete Problem einer direkten Behandlung mit dem Banachschen Fixpunktsatz nicht zugänglich ist.)

1.1.6 Erhaltungsgrößen

Nichtlineare Wellengleichungen modellieren reale physikalische Phänomene. Daher gibt es (bei den relevanten Gleichungen, jedenfalls) bestimmte physikalische Größen wie Masse, Energie, Impuls, Drehimpuls etc., die zeitlich konstant sind: die sogenannten Erhaltungsgrößen.
Die Masse ist gleich $\|u(t)\|^2_{L^2_x}$ und für semi-lineare Schrödinger-Gleichungen ebenso wie für KdV-ähnliche Gleichungen erhalten. Sie liefert unmittelbar eine sogenannte a priori-Abschätzung: Wenn eine Lösung existiert mit Anfangswert $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle $t > 0$ (für die diese Lösung existiert):

$$\|u(t)\|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}$$

(Wir müssen die Lösung nicht kennen, um diese Beziehung herzuleiten. Die Gleichung und einige Zusatzannahmen sind dafür ausreichend, deshalb die Bezeichnung "a priori Abschätzung".) Da $\|u\|_{L^2_x}$ eine definite Größe ist, d.h. sie ist größer gleich Null mit Gleichheit nur für $u = 0$, erhalten wir eine gewisse Kontrolle über das Wachstum der Lösung, die wir für verschiedene Zwecke verwenden können.
Die kinetische Energie der Lösungen (nicht-)linearer Wellengleichungen ist zumeist ebenfalls eine definite (Erhaltungs)größe, oft gleich $\frac{1}{2}\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2_x}$. (Eine Ausnahme ist die Dirac-Gleichung, deren kinetische Energie das Vorzeichen wechseln kann.) Hieraus kann man häufig ebenfalls eine "a priori Abschätzung" gewinnen.

Beispiel
Masse und Energie semilinearer Schödinger-Gleichungen, also Gleichungen der Form:

$$iu_t + \Delta u = \pm|u|^{p-1}u$$

Um die Erhaltung der L^2-Norm (= Masse) herzuleiten, multiplizieren wir die Gleichung mit $\overline{u}$:

$$iu_t\overline{u} + \overline{u}\Delta u = \pm|u|^{p+1} \tag{S1}$$

Dann gilt auch die komplex Konjugierte Gleichung:

$$-i\overline{u}_t u + u\Delta\overline{u} = \pm|u|^{p+1} \tag{S2}$$

Differenzenbildung ergibt:

$$i(u_t\overline{u} + \overline{u}_t u) + \overline{u}\Delta u - u\Delta\overline{u} = 0 \tag{S1 - S2}$$

Jetzt nehmern wir an, dass u samt 2. x-Ableitungen integrierbar ist und, dass Integration nach x und Zeitableitung vertauschen. Dann folgt (Abhängikeiten von x und t unterdrückt):

$$\begin{aligned} 0 &= i\int_{\mathbb{R}^n} u_t\overline{u} + \overline{u}_t u \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u}\Delta u - u\Delta\overline{u}\mathrm{d}x \\ &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u\nabla\overline{u} - \nabla\overline{u}\nabla u\mathrm{d}x = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Also ist $\|u\|_{L^2}^2$ konstant. Die Regularitätsannahmen an u lassen sich bei stetiger Abhängigkeit der Lösung von den Daten anschließend durch ein Approximationsargument "wegdiskutieren".
Für die Energieerhaltung multiplizieren wir mit

$$\Delta\overline{u} \mp |u|^{p-1}\overline{u}$$

Dann folgt:

$$iu_t\Delta\overline{u} \mp iu_t\overline{u}|u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1}\overline{u}\Delta u = \pm|u|^{p-1}u\Delta\overline{u} - |u|^{2p} \tag{S3}$$

komplex konjugieren ergibt die Gleichung:

$$-i\overline{u}_t\Delta u \pm i\overline{u}_t u|u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1}u\Delta\overline{u} = \pm|u|^{p-1}\overline{u}\Delta u - |u|^{2p} \tag{S4}$$

und dann Differenz bilden:

$$i(u_t\Delta\overline{u} + \overline{u}_t\Delta u \mp (u_t\overline{u} + u\overline{u}_t)|u|^{p-1}) = 0$$

Das können wir nun wieder mit einer Zeitableitung umschreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= u_t\Delta\overline{u} + \overline{u}_t\Delta u \mp |u|^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^2 \\ &= u_t\Delta\overline{u} + \overline{u}_t\Delta u \mp \frac{2}{p+1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1} \end{aligned}$$

Integration ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t\Delta\overline{u} + \overline{u}_t\Delta u \mp \frac{2}{p+1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_t\nabla\overline{u} + \nabla\overline{u}_t\nabla u \pm \frac{2}{p+1}\frac{\partial}{\partial t}|u|^{p+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1}|u|^{p+1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und damit:

$$E(u(t)) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1}|u|^{p+1}\mathrm{d}x = E(u_0)$$

Im Plus-Fall ist das eine definite Größe, die $\|u\|_{L^2}^2$ kontrolliert, der sogenannte "defocusing case". Im Minus-Fall kann man für $p = 1 + \delta$ (wobei das δ dimensionsabhängig ist) noch $E(u(t)) \sim \|u\|_{L^2}^2$ erreichen. Für größere p kann es zum "blow-up" kommen, der sogennante "focusing case".

Bemerkung
Energieerhaltung für nichtlineare Klein-Gordon-Gleichungen werden wir in den Übungen behanden. Eventuell auch noch etwas zu KdV/mKdV, bei denen es eine Folge von Erhaltungsgrößen gibt, die immer höhere Ableitungen enthalten.

Man kann die Erhaltungsgrößen bzw die daraus gewonnenen Abschätzungen zu verschiedenen Zwecken benutzen:

(i) Eindeutigkeitsbeweise: Für lineare Gleichungen ist der Zusammenhang klar: Man betrachtet die Erhaltungsgröße der Differenz zweier Lösungen zum selben Anfangswert. Diese verschwindet für $t = 0$ und also auch für alle $t > 0$. Ist die Erhaltungsgröße definit, kann man die Eindeutigkeit folgern. Dieses Argument kann für nichtlineare Gleichungen variiert werden.

(ii) Fortsetzung lokaler Lösungen zu globalen (bei beliebig großen Daten): Man zeigt (etwa mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes) die lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems für eine Gleichung vom Typ (1.1) mit Daten in einem Datenraum H. In günstigen (d.h. subkritischen, dazu später mehr) Fällen ergibt das Fixpunktargument eine "Lebensdauer" (= Länge des Existenzintervalls der Lösung) $T = T(\|u_0\|_H) > 0$, so dass T eine monoton fallende Funktion ist. Nun kann man zur Zeit $t_1 = T(\|u_0\|_H)$ das Cauchy-Problem mit Anfangsbedingung, sagen wir $\tilde{u}(0) = u(t_1)$ erneut stellen und erhält eine Lösung $\tilde{u} \in C([0,T], H)$ mit $T_1 = T(\|u(t_1)\|_H)$.

Nun kann man die ursprüngliche Lösung u durch $u(t) = \tilde{u}(t - t_1)$ auf das Intervall $[0, t_1] \cup [t_1, t_1 + T_1] = [0, t_1 + T_1]$ stetig fortsetzen. Dieses Fortsetzungsargument lässt sich beliebig oft wiederholen, die Verlängerung des Existenzintervalls also immer weiter verlängern. Nennen wir das Maß der Verlängerung des Existenzintervalls im k-ten Schritt Δ_k. Im allgemeinen wird $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k < \infty$ sein, und es bleibt bei einer lokalen Lösung. Ist aber $\|u(t)\|_H$ eine Erhaltungsgröße, oder auch nur durch eine solche kontrolliert, so erhalten wir mit der Monotonie der Lebensdauerfunktion T, dass $\Delta_k \geq T(cE(u_0)) > 0$, also $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \infty$, was bedeutet, dass die Lösung auf dem gesamten Intervall $[0, \infty[$ existiert.

Randbemerkung: In der Literatur findet man recht raffinierte Varianten dieses Arguments, die allerdings eine genauere Kenntnis der Funktion T erfordern. Diese laufen darauf hinaus, die Folge $(\Delta_k)_k$ der Verlängerungen der Lebensdauer nach unten durch eine divergente Reihe abzuschätzen, etwa $\Delta_k \geq \frac{\varepsilon_0}{k}$ mit einem $\varepsilon_0 > 0$.

(iii) Konstruktion lokaler Lösungen: Für eine bestimmte Phasenfunktion und eine spezielle Nichtlinearität sei bekannt, dass das Cauchy-Problem in keinem "vernünftigen" Datenraum H der direkten Behandlung mit dem Banachschen Fixpunktsatz zugänglich ist. Dies ist zum Beispiel der Fall bei der Benjamin-Ono-Gleichung:

$$u_t + |D_x|\partial_x u = \partial_x(u^2) \tag{BO}$$

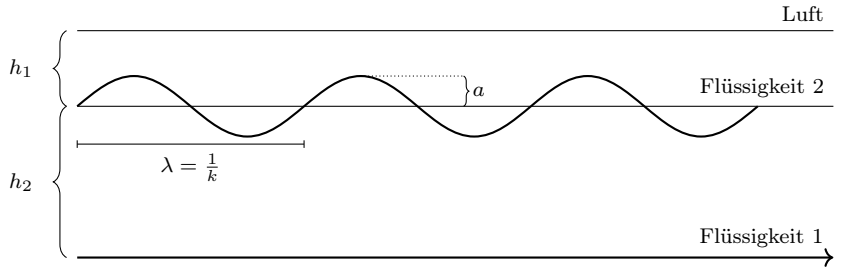
und allen L^2-basierten Sobolevräumen (näheres im nächsten Abschnitt). Dann kann man zum Beispiel die Technik der sogenannten "parabolischen Reularisierung" anwenden und einen weiteren glättenden Term in die Gleichung einbauen:

$$u_t + |D_x|\partial_x u - \varepsilon\partial_x^2 u = \partial_x(u^2) \tag{BO$_\varepsilon$}$$

Für $\varepsilon > 0$ ist die Lösung der homogenen linearen Gleichung dann instantan in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass man die Ableitung auf der Nichtlinearität kontrollieren kann. Der Fixpunktsatz liefert Näherungslösungen u_ε von (BO$_\varepsilon$), ggf. für ebenfalls geglättete Daten $u_{0,\varepsilon}$.

Nun will man zeigen, dass $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ für $\varepsilon \to 0$ gegen eine Lösung von (BO) mit $u(0) = u_0$ konvergiert, und zu diesem Zweck verwendet man die aus Erhaltungssätzen gewonnenen a priori-Abschätzungen.

Die in (i)-(iii) skizzierten Argumente werden in der Literatur als "energy methods" bezeichnet. Sie sind nicht spezifisch für dispersive Gleichungen, sondern finden Anwendung bei alle Evolutionsgleichungen, für die es definite Erhaltungsgrößen gibt.
Es gibt allerdings Weiterentwicklungen (speziell von Punkt (iii)), bei denen man sich den dispersiven Charakter z.B. der Benjamin-Ono-Gleichung zunutze macht.
Exkurs: Die (BO)-Gleichung als Modellgleichung für Wellenbewegung in Flüssigkeiten. Bei einer zwei Schichten-Konfiguration ist (BO) ein angemessenes Modell unter den folgenden Voraussetzungen:



(i) Rand ist fest und eben

(ii) $h_1 \ll h_2$

(iii) $k \cdot h_1 \ll 1$

(iv) $k \cdot h_2 \gg 1$

(v) $a \ll h_1$

(vi) Viskosität vernachlässigbar

Quelle: Ablowitz/Clarkson: *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*; bzw. Ablowitz/Segur: *J. Math. Phy.* (1975).

1.2 Datenräume

1.2.1 Schwartz-Funktionen und temperierte Distributionen

Der in diesem Abschnitt behandelte Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen stellt eine große Klasse von verallgemeinerten Funktionen dar, die in ihrer Gesamtheit einen topologischen Vektorraum bilden. Der Zweck diesen Raum zu betrachten sind unter anderem:

(i) Ausdehung des Definitionsbereichs der Operationen Faltung, Ableitung, Fourier-Transformation, ...

(ii) Alle (Kandidaten für) Datenräume sind zu erhalten als normierte lineare Teilräume von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (oder ggf. als Vektorraum von Äquivalenzklassen)

Eingeführt wurden die temperierten Distributionen von Laurent Schwartz, der sie definierte als topologischen Dualraum[2] einer sehr viel kleineren Klasse von C^∞-Funktionen.

Definition
Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir die Halbnormen

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta f(x)|.$$

Der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \rho_{\alpha,\beta}(f) < \infty\}$ heißt Schwartz-Raum, seine Elemente schnell fallende Funktionen oder auch Schwartz-Funktionen.

Bemerkung (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ umfasst.

(ii) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p \leq \infty$ so ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^{-N} \langle x \rangle^N f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\langle x \rangle^N f(x)|^p \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-pN} \mathrm{d}x < \infty\end{aligned}$$

für ein hinreichend groß gewähltes $N \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq p < \infty$ haben wir also

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$$

wobei beide Inklusionen hier dicht sind (bezüglich der $L^p(\mathbb{R}^n)$-Norm).

(iii) Gauß-Funktionen können ebenfalls ebenfalls zu den Schwartz-Funktionen gehören. Darunter seien Funktionen der Form

$$g_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{-\langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c}$$

verstanden, mit $c \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^n$ und A einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} g_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(A) \text{ ist positiv definit, bzw.} \\ g_A \in L^\infty(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(A) \text{ ist positiv semi-definit und } b \in i\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

(iv) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom, so sind auch $P \cdot f, P(\nabla) f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(v) Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist auch $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(vi) $f(x) = e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, da f nicht differenzierbar ist in $x = 0$. Und $g(x) = \langle x \rangle^{-N} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ da g nicht schnell genug fällt.

[2] Der topologische Dualraum umfasst nur die **stetigen** linearen Funktionale.

Um den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit einer Metrik auszustatten bemerken wir zunächst, dass die Menge aller Multiindexpaare $\{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^{2n}\}$ abzählbar ist, also können wir sie als $\{(\alpha,\beta)_j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ umschreiben. Damit definieren wir $\rho_j := \rho_{(\alpha,\beta)_j}$ und die Metrik

$$d_{\mathcal{S}}(f,g) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f-g)}{1+\rho_j(f-g)}.$$

Ein Ergebnis der Funktionalanalysis besagt, dass dieser (nun) metrische Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit $d_{\mathcal{S}}$ vollständig ist.

Lemma 1 (i) Eine Folge $(f_k)_k$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\alpha,\beta}(f-f_k) = 0.$$

(ii) Eine lineare Abbildung $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig genau dann, wenn für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ endlich viele Paare $(\alpha,\beta)_0, (\alpha,\beta)_1, \ldots, (\alpha,\beta)_N \in \mathbb{N}_0^{2n}$ existieren, so dass:

$$\rho_{\alpha,\beta}(Af) \lesssim \sum_{j=0}^{N} \rho_{(\alpha,\beta)_j}(f). \tag{*}$$

(iii) Eine lineare Abbildung $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to (E, \|\cdot\|_E)$ ist stetig genau dann, wenn endlich viele Paare $(\alpha,\beta)_0, (\alpha,\beta)_1, \ldots, (\alpha,\beta)_N \in \mathbb{N}_0^{2n}$ existieren, so dass:

$$\|Af\|_E \lesssim \sum_{j=0}^{N} \rho_{(\alpha,\beta)_j}(f).$$

Beweis. (iii) lässt sich genauso beweisen wie (ii), insbesondere ist (iii) nützlich für den Fall $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$.
zu (i): Sei $(f_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die gegen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, d.h. es gelte

$$0 = \lim_{k\to\infty} d_{\mathcal{S}}(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f-f_k)}{1+\rho_j(f-f_k)}.$$

Daraus folgern wir für alle $j \in \mathbb{N}_0$ dass $\lim_{k\to\infty} \frac{\rho_j(f-f_k)}{1+\rho_j(f-f_k)} = 0$. Da $\frac{t}{1+t}$ eine stetige Inverse besitzt folgt ebenso: $\lim_{k\to\infty} \rho_j(f-f_k) = 0$.
Umgekehrt gelte nun $\lim_{k\to\infty} \rho_j(f-f_k) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Sei ein $\varepsilon > 0$ vorgelegt und N so groß gewählt, dass $\sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ferner wählen wir k so groß, dass $\rho_j(f-f_k) < \frac{\varepsilon}{2N}$ für alle $j \in \{1,2,\ldots,N-1\}$. Dann folgt:

$$d_{\mathcal{S}}(f,f_k) = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{2^{-j}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\rho_j(f-f_k)}{1+\rho_j(f-f_k)}}_{\leq \rho_j(f-f_k) < \frac{\varepsilon}{2N}} + \sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j} \underbrace{\frac{\rho_j(f-f_k)}{1+\rho_j(f-f_k)}}_{\leq 1} < \varepsilon$$

also haben wir Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
zu (ii): Sei $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und es gelte (*). Ist dann $(f_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nach (i), dass $\lim_{k\to\infty} \rho_j(f-f_k) = 0$ für

alle $j \in \mathbb{N}_0$. Also gilt ebenso: $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \rho_j(f - f_k) = 0$ für festes N. Die Abschätzung (*) ergibt für beliebiges $j \in \mathbb{N}_0$ dann: $\lim_{k\to\infty} \rho_j(A(f - f_k)) = 0$, also auch $\lim_{k\to\infty} \rho_j(Af - Af_k) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, wegen der Linearität von A. Nochmal (i) anwenden zeigt $\lim\limits_{k\to\infty} d_{\mathcal{S}}(Af_k, Af) = 0$, und das ist die Stetigkeit von A in einem beliebigen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Umgekehrt sei $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig. Dann ist A insbesondere stetig in $f = 0$ und das heißt: $\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f)}{1+\rho_j(f)} < \delta$ gilt $\sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(Af)}{1+\rho_j(Af)} < \varepsilon$. Nun sei ein beliebiger Index j_0 vorgegeben. Dann gibt es zu $\varepsilon := 2^{-j_0-1}$ ein $\delta_0 > 0$, sodass for alle f mit $d_{\mathcal{S}}(f, 0) < \delta_0$ gilt: $d_{\mathcal{S}}(Af) < 2^{-j_0-1}$, also insbesondere

$$\begin{aligned} 2^{-j_0} \frac{\rho_{j_0}(Af)}{1 + \rho_{j_0}(Af)} < 2^{-j_0-1} &\Rightarrow \rho_{j_0}(Af) < \frac{1}{2}(1 + \rho_{j_0}(Af)) \\ &\Rightarrow \rho_{j_0}(Af) < 1 \leq \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f)}{1 + \rho_j(f)}, \end{aligned}$$

letzteres für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\delta}{2} \leq d_{\mathcal{S}}(f, 0) < \delta$. Nun ist zunächst für diese f und ein hinreichend großes N

$$1 \leq \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\rho_j(f)}{1 + \rho_j(f)} \leq \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} \frac{\rho_j(f)}{1 + \rho_j(f)} + \frac{1}{2}$$

und also

$$\rho_{j_0}(Af) < 1 \leq \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^{N} \rho_j(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \frac{\delta}{2} \leq d_{\mathcal{S}}(f, 0) < \delta.$$

Ist nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig, wählt man $\lambda > 0$, sodass $\frac{\delta}{2} \leq d_{\mathcal{S}}(\lambda f, 0) < \delta$. Dann ist, da A linear und ρ_{j_0} eine Halbnorm ist

$$\rho_{j_0}(Af) = \frac{1}{\lambda} \rho_{j_0}(A\lambda f) \leq \frac{1}{\lambda} \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^{N} \rho_j(\lambda f) = \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^{N} \rho_j(f).$$

□

Beispiel (i) $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $Af(x) = x^\gamma f(x)$ für ein festes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt

$$\rho_{\alpha,\beta}(Af) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta x^\gamma f(x)| \lesssim \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f(x)|}_{=\rho_{\alpha',\beta'}(f)}$$

weil $\nabla^\beta x^\gamma f = \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\leq|\beta|+|\gamma|} c_{\alpha',\beta'} x^{\alpha'} \nabla^{\beta'} f$ für bestimmte $c_{\alpha',\beta'}$. Daraus folgern wir, dass die Multiplikation mit einem Polynom stetig ist. Ist also $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $M_P\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $M_P f(x) = P(x)f(x)$, so ist M_P stetig.

(ii) $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Af := \nabla^\gamma f$ für ein festes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Hierfür gilt

$$\rho_{\alpha,\beta}(Af) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^\beta \nabla^\gamma f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \nabla^{\beta+\gamma} f(x)| = \rho_{\alpha,\beta+\gamma}(Af)$$

Nach Lemma 1 ist A also eine stetige Abbildung. Daraus folgern wir: Ist $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom, so ist $P(\nabla)\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}$ stets definiert. Wir wissen bereits aus der Harmonischen Analysis: $\widehat{\nabla^\beta f}(\xi) = i^{|\beta|}\xi^\beta \hat{f}(\xi)$, ferner $\widehat{x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\nabla^\alpha \hat{f}(\xi)$ denn:

$$\widehat{x_j f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{-ix\xi} x_j}_{=i\partial_{\xi_j} e^{-ix\xi}} f(x)\mathrm{d}x = i\partial_{\xi_k} \hat{f}(\xi)$$

Beides zusammen gibt:

$$\mathcal{F}(x^\alpha \nabla_x^\beta f)(\xi) = \nabla_\xi^\alpha \xi^\beta f(\xi)$$

Satz 1
Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (i) Mit der Dreiecksungleichung für Integrale gilt

$$\begin{aligned}\rho_{0,0}(\mathcal{F}f) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)| \lesssim \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\langle x\rangle^{2n}\langle x\rangle^{-2n}\mathrm{d}x \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{2n}|f(x)| \lesssim \sum_{|\alpha|\le 2n} \rho_{\alpha,0}(f).\end{aligned}$$

(ii) Und ähnlich wie im Beispiel oben erhalten wir auch

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}f) &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha \nabla_\xi^\beta \mathcal{F}f(\xi)\right| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}\left(\nabla_x^\alpha x^\beta f\right)(\xi)\right| = \rho_{0,0}\left(\mathcal{F}\left(\nabla_x^\alpha x^\beta f\right)\right) \\ &\lesssim \sum_{|\gamma|\le 2n} \rho_{\gamma,0}\left(\nabla^\alpha x^\beta f\right) \lesssim \sum_{|\alpha'|+|\beta'|\le|\alpha|+|\beta|+2n} \rho_{\alpha',\beta'}(f).\end{aligned}$$

(iii) Damit ist gezeigt: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Insbesondere ist $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit gilt die Fourierinversionsformel

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x), \quad \text{kurz } \mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{F}g(-x).$$

Da die Reflexion $Rf(x) = f(-x)$ offensichtlich stetig ist, ist auch $\mathcal{F}^{-1}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig.

□

Beispiel (i) reguläre Distributionen: Sei $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar und

(a) von moderatem Wachstum, d.h. es existiert ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass $|g(x)| \le C\langle x\rangle^N$, oder

(b) $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty[$.

Dann wird durch $T_g[f] := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert. Denn

(a)

$$\begin{aligned}|T_g[f]| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |f(x)| \underbrace{\langle x\rangle^{-N}|g(x)|}_{\leq C} \mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-(n+1)} \langle x\rangle^{N+n+1}|f(x)|\mathrm{d}x \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{N+n+1}|f(x)|\end{aligned}$$

(b) $|T_g[f]| \leq \|g\|_{L^p}\|f\|_{L^{p'}} \lesssim \|g\|_{L^p} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{n+1}|f(x)|$

Wir bemerken: Sind T_{g_1} und T_{g_2} stetige lineare Funktionale, so auch $T_{g_1} + T_{g_2} = T_{g_1+g_2}$. Insofern umfasst dieser Punkt auch die Situation, dass man $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ betrachtet mit:

(a) Es existiert ein $R > 0$ so dass $g\chi_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

(b) Es existiert ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $|x| \geq R$ gilt: $|g(x)| \leq C \cdot \langle x\rangle^N$.

Auch dann ist T_g eine reguläre Distribution, indem man schreibt: $g = g\chi_{B_R(0)} + g\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)}$.

(ii) Borel-Maße: μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, die eine Wachstumsbedingung erfüllen: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-N}\mathrm{d}\mu(x) < \infty$ sind ebenfalls durch $T_\mu[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denn

$$|T_\mu[f]| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |f(x)|\langle x\rangle^{-N}\mathrm{d}\mu(x) \leq C \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^N |f(x)|$$

Spezialfälle von diesem Unterpunkt sind:

(a) endliche Borel-Maße, insbesondere auch Dirac-Maße: $\delta_{x_0}[f] = f(x_0)$ für festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Reihen von Dirac-Maßen, etwa $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\delta_k$, wenn für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt: $c_k \lesssim \langle k\rangle^N$.

(c) $\mu = \lambda^n$ mit $N = n + 1$. Kann nach dem Beispiel oben aber auch mit der Funktion $g \equiv 1$ als reguläre Distribution identifiziert werden.

(d) Flächenmaße die auf einer k-dimensionalen Fläche S ($k \in \{1, \ldots, n-1\}$) konzentriert sind.

$$T_{\sigma_\rho}[f] = \int_S f(x)\rho(x)\mathrm{d}\sigma_x, \qquad \mathrm{d}\sigma_x = \sqrt{g(x)}\mathrm{d}x$$

sofern Flächenmaß und stetige Dichtefunktion $\rho(x)$ der oben genannten Wachstumsbedingung genügen. Dabei ist $g(x)$ die Gram'sche-Determinante $g(x) = \det(\mathrm{D}\,\varphi(x)^T\,\mathrm{D}\,\varphi(x))$, wenn die Fläche S in parametrisierter Form $S = \varphi(T)$, $T \subseteq \mathbb{R}^k$ vorliegt. Dabei muss φ ein C^1-Diffeomorphismus sein.

Zu diesen gehören auch die Maße $\delta(P)$ definiert durch

$$\delta(P)[f] := \int_{\{P=0\}} f(x) \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|}$$

dabei ist $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion für deren Gradienten gilt: $|\nabla P(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\}$. Später werden wir eine Rechtfertigung für diese Interpretation geben.

(iii) $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto T[f] = \nabla^\gamma f(x_0)$ für festes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist linear und stetig, denn

$$|T[f]| = |\nabla^\gamma f(x_0)| \leq \rho_{0,\gamma}(f).$$

(iv) Wenn $n = 1$ gilt, dann ist der Cauchy-Hauptwert der Funktion $\psi(x) = \frac{1}{x}$ definiert als

$$\text{p.v.}\, \frac{1}{x}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$$

ist eine stetige Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\left| \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon<|x|} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right| \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \underbrace{\left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right|}_{:=I_\varepsilon} + \underbrace{\left| \int_{1<|x|} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right|}_{\leq \|f\|_{L^1}}.$$

Zur Abschätzung von I_ε merken wir an, dass

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(0)}{x} \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x \right| \leq \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x) - f(0)}{x} \mathrm{d}x \right|$$
$$\leq \int_{\varepsilon<|x|<1} |f'(\eta)| \mathrm{d}x \leq 2\|f'\|_{L^\infty}$$

Bemerkung
In dem Beispiel (i) und (ii) unterscheidet man im praktischen Gebrauch nicht mehr zwischen Funktion bzw. Maß (g/μ) einerseits und den dadurch induzierten linearen Funktionalen (T_g/T_μ), was nicht selten zu Verwirrung führt. Insbesondere ist die Bezeichnung $\mu[f]$ (anstelle von $T_\mu[f]$) gebräuchlich.

Definition
Der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet, seine Elemente heißen temperierte Distributionen.

In Abgrenzung dazu steht der Begriff Distribution (ohne Zusatz). Diese sind stetige Linearformen auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall würde Stetigkeit einer Linearform T bedeuten:

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt } \exists C_K > 0, N_K \in \mathbb{N}_0\ \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(f) \subseteq K\colon$$
$$|T[f]| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq N_K} \|\nabla^\alpha f\|_\infty$$

Für unsere Zwecke sind Distributionen allerdings nicht von großem Interesse, da wir auf ihnen nicht in vernünftiger Weise die Definition der Fourier-Transformation erweitern können.

Topologie auf und Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Der nächste Schritt ist nun $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit einer Topologie auszustatten. Für gewöhnlich werden die temperierten Distributionen (im Rahmen der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen) mit der schwach-$*$-Topologie σ^* ausgestattet. Dazu definiert man:

Definition
Für jedes $M \in \mathcal{E} := \{M \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid M \text{ endlich}\}$ und ein $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Halbnorm $\|T\|_M := \max_{f \in M} |T[f]|$. Dieses System von (überabzählbar vielen) Halbnormen ergibt ein System von Umgebungen (und legt somit die Topologie auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ fest):

$$U_{\varepsilon,M}(T_0) := \{T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|T - T_0\|_M < \varepsilon\}$$

Eine Menge $U \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt also offen, wenn U eine beliebige Vereinigung solcher Umgebungen $U_{\varepsilon,M}(T_0)$ ist. Dies ist eine Vektorraumtopologie in der die Operationen

$$\begin{aligned} +&: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\ \cdot&: \mathbb{C} \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

stetig sind. Die Topologie ist allerdings, wegen der Überabzählbarkeit des Halbnormen-Systems, nicht metrisierbar.
Eine Folge $(T_k)_k$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt konvergent gegen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ falls für alle Halbnormen $\|\cdot\|_M$, $M \in \mathcal{E}$ gilt: $\lim_{k\to\infty} \|T - T_k\|_M = 0$.

Bezeichnung
Für diese Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir

$$\mathcal{S}' - \lim_{k\to\infty} T_k = T \qquad \text{oder auch} \qquad T_k \to T \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Bemerkung (i) Da $M \in \mathcal{E}$ immer nur endlich viele Elemente enthält, ist die Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ äquivalent dazu, dass für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} T_k[f] = T[f].$$

(ii) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, da σ^* die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft besitzt. Denn sind $T_1, T_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T_1 \neq T_2$ dann existiert ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ so dass $T_1[f] \neq T_2[f]$. Wir setzen $M = \{f\}$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}|T_1[f] - T_2[f]|$. Dann gilt $U_{\varepsilon,M}(T_1) \cap U_{\varepsilon,M}(T_2) = \emptyset$.

Beispiel (i) f, g seien messbar mit moderatem Wachstum und $(f_k)_k$ sei eine Folge messbarer Funktionen so dass

(a) $f_k \to f$ λ^n-fast überall

(b) $|f_k| \leq g$ λ^n-fast überall.

Seien $T = T_f$ und $T_k = T_{f_k}$ die dadurch induzierten regulären Distributionen, so gilt:

$$\mathcal{S}' - \lim_{k\to\infty} T_k = T.$$

Um das einzusehen betrachte man $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{k\to\infty} T_k[h] = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f_k(x)h(x)}_{\substack{|\ldots|\leq g(x)h(x) \\ \text{und } g\cdot h\in L^1(\mathbb{R}^n)}} \mathrm{d}x \overset{\text{LGWS}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)\mathrm{d}x = T[h]$$

(ii) Für eine approximative Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ und eine im Nullpunkt stetige beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0).$$

Also insbesondere gilt das auch für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = \delta_0$$

was auch den Namen *Dirac-Scharen* oder *Dirac-Familien* für approximative Einheiten rechtfertigt.

(iii) Sei $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{R}$ und $P \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ so dass $\nabla P(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und auf $\{P = 0\}$ gelte $|\nabla P(x)|^{-1} \lesssim \langle x\rangle^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x))f(x)\mathrm{d}x = \int_{\{P=0\}} f(x)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|} = \delta(P)[f]$$

was wir auch schreiben können als:

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon \circ P = \delta(P)$$

Um diese letzte Tatsache zu beweisen müssen wir uns an den Gaußschen-Integralsatz (auch Divergenzsatz) erinnern:

Satz (Gaußscher-Integralsatz)
Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand[3] $\partial\Omega$ und $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gelten für $1 \leq j \leq n$:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(x)\nu_j \mathrm{d}\sigma_x$$

und dabei ist ν das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$.

Bemerkung (i) Ist $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ so ist $\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$. Summation über j ergibt die übliche Form:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma$$

(ii) Zur Berechnung des äußeren Einheitsnormalenfelds ν: Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und U eine offene Umgebung von x_0, so dass $\Omega \cap U = \{x \in U \mid P(x) < 0\}$ für eine C^1-Funktion P, so dass $\nabla P \neq 0$ auf U. Dann ist $\nu(x_0) = \frac{\nabla P(x_0)}{|\nabla P(x_0)|}$.

[3] d.h. $\partial\Omega$ ist lokal als Nullstellenmenge einer C^1-Funktion mit nicht-verschwindendem Gradienten darstellbar.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Identität für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, nehmen also insbesondere an, dass $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist. Dann existiert ein $\delta_0 > 0$, sodass auf $\operatorname{supp}(f)$ gilt: $|\nabla P(x)| \geq 2n\delta_0$. Wir zerlegen f in

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

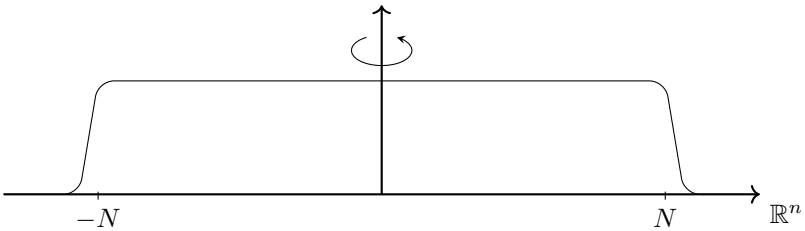
mit $f_k \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, sodass $\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\right| \geq \delta_0$ auf $\operatorname{supp}(f_k)$ gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x)) f_k(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\mathrm{d}(t)\right)\frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nun ist aufgrund der Eigenschaft (ii) einer approximativen Einheit $\left|\int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |K_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t \leq C$ (unabhängig von ε und x) und $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{P(x)}^{\infty} K_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \chi_{\{P<0\}}(x)$. Also gilt mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(P(x)) f_k(x)\mathrm{d}x &= \int_{\{P<0\}} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{f_k(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\{P=0\}} f_k(x)\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}\nu_k(x)\mathrm{d}\sigma_x = \int_{\{P=0\}} f_k(x)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|},\end{aligned}$$

da $\nu_k(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_k}(x)}{|\nabla P(x)|}$. Damit ist die Identität für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gezeigt.
Nun sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $f_N = f\chi_N$ mit einer glatten Abschneidefunktion (engl. *cut-off-function*) χ_N.



Dann gilt $\lim_{N\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |Q(x)(f(x) - f_N(x))| = 0$ für jede Funktion Q moderaten Wachstums, da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aufgrund der Voraussetzung $|\nabla P(x)|^{-1} \lesssim \langle x\rangle^N$ gilt dann

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{P=0\}} f_N(x)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(X)|} = \int_{\{P=0\}} f(x)\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|}\text{[4]},$$

während auf der anderen Seite bereits die gleichmäßige Konvergenz $f_N \to f$ ausreicht, um für $\delta > 0$ vorgegeben und N groß genug

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(P(x))||f(x) - f_N(x)|\mathrm{d}x < \delta$$

zu erreichen. □

[4] Wachstum in $\mathrm{d}\sigma_x = \sqrt{g(t)}d^{n-1}t$ wird stets durch $|\nabla P(x)|^{-1}$ kompensiert.

Bemerkung
Der Fall $n = 1$ wird in den Übungen besprochen.

Indem wir den Gauss'schen Integralsatz wie oben verwenden, können wir auch die folgende — oft sehr nützliche — Verallgemeinerung des Satzes von Fubini beweisen.

Satz (Co-Area Formel)
Sei $P \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ so dass für λ-fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Niveaumenge $\{P = t\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche ist[5], $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig und integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{P=t\}} f(x) \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|} \mathrm{d}t.$$

Beispiel (i) $P(x) = x_k \Rightarrow |\nabla P(x)| = 1,\ \mathrm{d}\sigma_x = \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{k-1}\mathrm{d}x_{k+1} \dots \mathrm{d}x_n$. Dies ergibt also den Satz von Fubini.

(ii) $P(x) = |x|^2 \Rightarrow \nabla P(x) = 2x,\ |\nabla P(x)| = 2|x|$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\{|x|=\sqrt{t}\}} f(x) \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{2|x|} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_{\{|x|=r\}} f(x)\mathrm{d}\sigma_x \mathrm{d}r.$$

Was wir mit der Substitution $\sqrt{t} = r$ erreicht haben, denn dann gilt: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2|x|}$

Beweis. Wir beweisen die Aussage unter der Voraussetzung $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ und $P \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann existieren

(i) $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $|\nabla P(x)| \geq \varepsilon_0\ \forall x \in \operatorname{supp}(f)$

(ii) $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, sodass $a \leq P(x) \leq b\ \forall x \in \operatorname{supp}(f)$ und $\int_{\mathbb{R}} \dots \mathrm{d}t$ reduziert sich auf $\int_a^b \dots \mathrm{d}t$.

O.B.d.A. nehmen wir an, dass für einen Index $j \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{\partial P}{\partial x_j}(x) \neq 0$ ist auf $\operatorname{supp}(f)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_{P(x)}^b \mathrm{d}t \right) \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \mathrm{d}x \overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{P(x)}^b \mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{P<t\}}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_a^b \int_{\{P<t\}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Gauss}}{=} \int_a^b \int_{\{P=t\}} \frac{f(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} \nu_j(x) \mathrm{d}\sigma_x,
\end{aligned}$$

wobei $\nu(x) = \frac{\nabla P(x)}{|\nabla P(x)|}$, also $\frac{\nu_j(x)}{\frac{\partial P}{\partial x_j}(x)} = \frac{1}{|\nabla P(x)|}$. Also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{\{P=t\}} f(x) \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{|\nabla P(x)|}.$$

[5] Dies erfordert insbesondere $\nabla P(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ bis auf eine λ^n-Nullmenge.

Allgemeinere Versionen kann man durch zum Teil aufwändige Approximationsargumente erreichen (vgl. Evans: *Measure Theory and fine properties of functions.* Abschnitt 3.4) □

Wir werden verschiedene lineare Abbildungen $A\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren als *Transponierte* gegebener, ebenfalls linearer Abbildungen $A_0\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Das bedeutet, wir legen AT für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$AT[f] := T[A_0 f] \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

fest (später werden wir dann zumindest in der Bezeichnung nicht mehr zwischen A und A_0 unterscheiden). Aus dieser Definition folgt unmittelbar die Abschätzung

$$|AT[f]| = |T[A_0 f]| \leq \|T\|_{\tilde{M}}$$

für jede endliche Menge $\tilde{M} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die $A_0 f$ enthält. Etwas allgemeiner für $M \in \mathcal{E}$:

$$\|AT\|_M = \max_{\psi \in M} |AT[\psi]| \leq \|T\|_{\tilde{M}}$$

für jede Menge $\tilde{M} \in \mathcal{E}$ mit $A_0(M) \subset \tilde{M}$. Das bedeutet: Sind $M \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wählen wir $\tilde{M} = A_0(M)$ und $\delta = \varepsilon$ und erhalten $A(U_{\tilde{M},\delta}(0)) \subset U_{M,\varepsilon}(0)$. Zu jeder Nullumgebung $U_{M,\varepsilon}(0)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ finden wir also mit $U_{A(M),\varepsilon}(0) = U_{\tilde{M},\delta}(0)$ eine weitere Nullumgebung in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, die von A in $U_{M\varepsilon}(0)$ abgebildet wird, und das ist die Stetigkeit von A im Nullpunkt. Da A linear ist, ist A in jedem $T_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig.
Das gilt für jede lineare Abbildung A, die wie oben definiert ist, und nicht einmal die Stetigkeit von A_0 haben wir hierfür verwendet.

Operationen auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

(1) **Die Distributionsableitung**.

Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann definiert man die distributionelle Ableitung

$$\nabla^\gamma\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto \nabla^\gamma T$$

durch die Regel der partiellen Integration:

$$\nabla^\gamma T[f] := (-1)^{|\gamma|} T[\nabla^\gamma f] \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

hierbei ist ∇^γ auf der rechten Seite der Gleichung die klassische Ableitung und entspricht A_0.

Bemerkung (a) $\nabla^\gamma\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig nach der Vorbemerkung.

(b) Mit diesem allgemeinen Ableitungsbegriff ist jedes $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ beliebig oft differenzierbar.

(c) Ist $g \in C^{|\gamma|}(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla^\gamma g$ von moderatem Wachstum, so ist $\nabla^\gamma T_g = T_{\nabla^\gamma g}$.

Beispiel (a) $\nabla^\gamma T_{\delta_{x_0}}[f] \overset{\text{p.D.}}{=} (-1)^{|\gamma|} T_{\delta_{x_0}}[\nabla^\gamma f] = (-1)^{|\gamma|} \nabla^\gamma f(x_0)$.

(b) Sei $\theta := \chi_{(0,\infty)}$ die sogenannte Heavyside'sche Sprungfunktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist $T_\theta[f] = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ und also $T_\theta'[f] \overset{\text{p.D.}}{=} -T_\theta[f'] = -\int_0^\infty f'(x)\mathrm{d}x = f(0) = T_{\delta_0}[f] \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Das heißt: $T_\theta' = T_{\delta_0}$, was man üblicherweise abkürzt mit $\theta' = \delta_0$.

Bemerkung
Auch für die Distributionsableitung gilt: Ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla T = 0$, so ist T konstant. Das ist weniger leicht einzusehen, als man erwarten sollte. (vgl. Hörmander, Theorem 3.1.4 und 3.1.4'.) Wir werden weiter unten davon Gebrauch machen.

(2) **Multiplikation mit einer C^∞-Funktion moderaten Wachstums**.
Sei $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sodass $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$ existieren, für die

$$|a(x)| \leq C\langle x\rangle^N$$

gilt. Dann ist $a \cdot \varphi$ (punktweise definiert) für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und der Multiplikator

$$M_a \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \mapsto M_a\varphi := a \cdot \varphi$$

ist linear und stetig. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bilden wir das Produkt $a \cdot T$, indem wir

$$a \cdot T[\varphi] := T[a \cdot \varphi]$$

definieren. Dann ist der Multiplikationsoperator

$$M_a \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad T \mapsto M_a T := a \cdot T$$

linear und nach der Vorbemerkung stetig.
Nach einem Satz von Schwartz gibt es **keine** Multiplikation

$$\bullet \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

die assoziativ und kommutativ ist: Wir zeigen, dass es keine Fortsetzung der oben definierten Multiplikation mit diesen Eigenschaften gibt:

Beweis. (a) Für $a \in C^\infty$ moderaten Wachstums ist $a \cdot \delta_0 = a(0)\delta_0$, denn $a \cdot \delta_0[\varphi] \overset{\text{p.D.}}{=} \delta_0[a \cdot \varphi] = a \cdot \varphi(0) = a(0) \cdot \varphi(0)$.
(b) $x \cdot \text{p.v.}\,\frac{1}{x}[\varphi] = \text{p.v.}\,\frac{1}{x}[x\varphi] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x|} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1[\varphi]$, also $x \cdot \text{p.v.}\,\frac{1}{x} = 1$.
Nehmen wir jetzt an, es gebe eine assoziative und kommutative Fortsetzung der oben definierten Multiplikation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot \text{p.v.}\,\frac{1}{x} &\overset{\text{(i)}}{=} (x \cdot \delta_0) \cdot \text{p.v.}\,\frac{1}{x} \overset{\text{Komm.}}{=} (\delta_0 \cdot x)\left(\text{p.v.}\,\frac{1}{x}\right) \\ &\overset{\text{Ass.}}{=} \delta_0 \cdot \left(x \cdot \text{p.v.}\,\frac{1}{x}\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \delta_0 \cdot 1 \overset{\text{Komm.}}{=} 1 \cdot \delta_0 = \delta_0. \end{aligned}$$

Also $\delta_0 = 0$, und das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung (a) Nicht allgemein definiert ist das Produkt einer temperierten Distribution mit schneller als polynomial wachsenden oder weniger regulären Funktionen.

(b) In der Unmöglichkeit einer *vernünftigen* Multiplikation von Distributionen liegt ein wesentliches Problem für die Anwendbarkeit dieser Theorie auf nichtlineare Differentialgleichungen. Selbst einfachste Nichtlinearitäten wie $N(u) = u^2$ sind in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nicht ohne Weiteres definierbar. Sowie man diese nicht mehr punktweise definieren kann, benötigt man Abschätzungen, um sie als Fortsetzung stetiger, multilinearer Operatoren aufzufassen. In der Regel geht man zurück auf Skalen normierter linearer Teilräume von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(3) **Verkettung mit einer affin-linearen Bijektion**.

Es sei $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Lx := Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Wie ist $T \circ L$ sinnvollerweise zu definieren? Dazu starten wir wieder mit einer regulären Distribution T_g und verlangen $T_g \circ L \overset{!}{=} T_{g\circ L}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt das:

$$\begin{aligned}
(T_g \circ L)[f] = T_{g\circ L}[f] &= \int_{\mathbb{R}^n} g(Lx)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(Ax+b)f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Transformation: } y = Ax+b \\ x = A^{-1}(y-b) = L^{-1}(y) \Rightarrow \mathrm{d}x = |\det A|^{-1}\mathrm{d}y\end{array}\right) \\
&= |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(L^{-1}y)\mathrm{d}y = |\det A|^{-1} T_g[f \circ L^{-1}]
\end{aligned}$$

und das hat bereits eine Form, die wir als allgemeinte Definition verwenden können.

Definition
Für L wie oben und $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Verkettung $T \circ L$ durch

$$T \circ L[f] := |\det A|^{-1} T[f \circ L^{-1}].$$

Bemerkung (a) Ist L fixiert, so ist durch $T \mapsto T \circ L$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben, denn $f \mapsto f \circ L^{-1}$ ist linear von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Die Verknüpfung von $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit nichtlinearen Abbildungen $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist im Allgemeinen nicht sinnvoll zu definieren, selbst wenn ψ bijektiv ist. So macht zum Beispiel $\delta_0\left(x^3\right)$ für $n = 1$ keinen Sinn, wie wir bei der Diskussion von $\delta(P)$ in einer Dimension in der Übung sehen werden.

(4) **Faltung von $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$**.

Betrachten wir zunächst den Fall einer regulären Distribution T_h mit einer messbaren Funktion h moderaten Wachstums, also

$$|h(x)| \lesssim \langle x\rangle^N \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}.$$

Dann können wir $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf herkömmliche Weise mit h falten und erhalten

$$\begin{aligned}
|g * h(x)| &\le \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y)\mathrm{d}y\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y\rangle^N \langle y\rangle^{-N-(n+1)} |g(y)| \langle y\rangle^{N+n+1}\mathrm{d}y \le C_g \langle x\rangle^N,
\end{aligned}$$

also wieder eine messbare Funktion moderaten Wachstums, die eine reguläre Distribution T_{g*h} induziert. Wenden wir diese an auf $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich mit Fubini:

$$\begin{aligned} T_{g*h}[f] &= \int_{\mathbb{R}^n} g * h(x) f(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) h(y) f(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(x) \mathrm{d}x \right) h(y) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} Rg * f(y) h(y) \mathrm{d}y = T_h[Rg * f] \end{aligned}$$

mit $Rg(x) = g(-y)$ (Reflexion). Hieraus können wir eine allgemeine Definition erraten:

Definition
Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Faltung $T * g$ durch $T * g[f] = T[Rg * f]$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Da $f \mapsto Rg * f,\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (bei festem $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) eine stetige und lineare Abbildung ist, ist auch

$$*g \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ T \mapsto T * g$$

stetig und linear.

Diese Definition legt auch die **Faltung von Maßen** mit Schwartzfunktionen fest, sofern erstere einer Wachstumsbedingung genügen. Sei μ ein solches Maß. Dann haben wir

$$\begin{aligned} T_\mu * g[f] &\overset{\text{p.D.}}{=} T_\mu[Rg * f] = \int_{\mathbb{R}^n} Rg * f(x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) f(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) \mathrm{d}\mu(x) \right) f(y) \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

also eine reguläre Distribution, die von der Funktion

$$\mu * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \mathrm{d}\mu(y)$$

induziert wird.

Anwendung: Fundamentallösung des Cauchy-Problems für die Transportgleichung, d.h. für $v \in \mathbb{R}^n$ fest

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

Hierzu hatten wir bereits festgestellt, dass die Lösung gegeben ist durch

$$u(x,t) = u_0(x - vt) = U_\varphi(t) u_0(x) \qquad \text{mit } \varphi(\xi) = -v \cdot \xi.$$

Andererseits erhalten wir für das in $v \cdot t \in \mathbb{R}^n$ konzentrierte Dirac-Maß δ_{vt}:

$$\delta_{vt} * u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x-y) \mathrm{d}\delta_{vt}(y) = u_0(x - vt),$$

wobei zunächst $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, man kann aber problemlos $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zulassen. Also ist die Fundamentallösung in diesem Fall durch eine Schar von Dirac-Maßen gegeben.

(5) **Fouriertransformation**.

Definition
$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto \mathcal{F}T := \hat{T}$, definiert durch $\hat{T}[f] := T[\hat{f}]$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, heißt die Fourtransformation temperierter Distributionen, dabei wie immer:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

Hierbei handelt es sich um eine Fortsetzung der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Um dies einzusehen seien $T = T_g$ mit einem $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $h = \overline{\hat{g}}$. Dann gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die Parseval-Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Nun ist $\overline{h} = \hat{g}$ und $\hat{h}(\xi) = \hat{\overline{\hat{g}}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\overline{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{g}(x)\mathrm{d}x} = \overline{g(\xi)}$, also $\overline{\hat{h}}(\xi) = g(\xi)$ und damit

$$\hat{T}_g[f] \overset{\text{p.D.}}{=} T_g[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \overset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x = T_{\hat{g}}[f]$$

für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als *Transponierte* der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und somit linear und stetig. Weiter setzen wir $\check{T}[f] := T[\check{f}]$ für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$\check{f}(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

die inversere Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Dann ist

$$\check{\hat{T}}[f] = \hat{T}[\check{f}] = T[\check{\hat{f}}] = T[f].$$

Das heißt, die Transformation $T \mapsto \check{T}$ ist invers zur Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und aus den gleich Gründen (*Transponiert*) linear und stetig. Damit gilt:

Satz 2
Die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Durch die Definition werden die wesentlichen Eigenschaften der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ beziehungsweise $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ an die distributionelle Fouriertransformation weitergegeben. Wie zum Beispiel:

Lemma 2
Es seien $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gelten:

(a) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \hat{T}$

(b) $\widehat{\xi^\alpha T} = (i\nabla_x^\alpha)\hat{T}$.

Beweis. Es sei im folgenden $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

(a)

$$\widehat{\nabla_\xi^\alpha T}[f] = \nabla_\xi^\alpha T[\hat{f}] = (-1)^{|\alpha|} T[\nabla_\xi^\alpha \hat{f}] = i^{|\alpha|} T[\widehat{x^\alpha f}] = i^{|\alpha|} \hat{T}[x^\alpha f] = (ix)^\alpha \hat{T}[f]$$

(b)

$$\widehat{\xi^\alpha T}[f] = \xi^\alpha T[\hat{f}] = T[\xi^\alpha \hat{f}] = (-i)^{|\alpha|} T[\widehat{\nabla_x^\alpha f}] = (-i)^{|\alpha|} \hat{T}[\nabla_x^\alpha f] = i^{|\alpha|} \nabla_x^\alpha \hat{T}[f]$$

□

Satz (Faltungssatz)
Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gelten:

$$\widehat{f * T} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{T}, \qquad \widehat{fT} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{T}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist bekannt, wenn f und $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind. Dies benutzen wir zum Beweis der zweiten Gleichung: Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{fT}[g] &= f \cdot T[\hat{g}] = T[f\hat{g}] = T[\hat{\check{f}}\hat{g}] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} T[\widehat{\check{f} * g}] \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{T}[R\hat{f} * g] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f} * \hat{T}[g]\end{aligned}$$

Damit ist (ii) gezeigt, was wir jetzt zum Beweis von (i) verwenden können: Dazu sei wieder $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\widehat{f * T}[g] &= f * T[\hat{g}] = T[Rf * \hat{g}] = T[\hat{\hat{f}} * \hat{g}] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} T[\widehat{\hat{f}g}] \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{T}[\hat{f}g] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}\hat{T}[g]\end{aligned}$$

□

Es folgen einige Beispiele der Faltung und Fourier-Transformation von Distributionen. Wir beginnen mit:

Beispiel
Endliche Borel-Maße μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Sei T_μ die hierdurch induzierte Distribution und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}\hat{T_\mu}[f] = T_\mu[\hat{f}] &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathrm{d}\mu(x) f(\xi) \mathrm{d}\xi =: T_{\hat{\mu}}[f]\end{aligned}$$

für die (gleichmäßig stetige) Funktion $\hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathrm{d}\mu(x)$. Speziell:

$$\hat{\delta}_{x_0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathrm{d}\delta_{x_0}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-ix_0\xi}$$

und insbesondere $\hat{\delta}_0 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ (konstante Funktion bzw. die dadurch induzierte Distribution). Kombinieren wir das mit Lemma 2 erhalten wir

$$\widehat{\nabla_x^\alpha \delta_0}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{\delta}_0(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (i\xi)^\alpha$$

bzw. unter Vertauschung von x und ξ:

$$x^\alpha = (2\pi)^{\frac{n}{2}}((-i)^{|\alpha|}\nabla_\xi^\alpha \delta_0)^\wedge(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}((-i\nabla_\xi)^\alpha \delta_0)^\wedge(x)$$

Benutzen wir die Linearität der Fourier-Transformation erhalten wir für ein beliebiges Polynom $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$P(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(P(-i\nabla)\delta_0)^\wedge(x)$$

worauf wir erneut die Fourier-Transformation anwenden können. Dies ergibt:

$$\hat{P} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(P(-i\nabla)\delta_0)^{\wedge\wedge} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}P(-i\nabla)\delta_0 \circ R = (2\pi)^{\frac{n}{2}}P(-i\nabla)\delta_0$$

Wir können also feststellen, dass die Fourier-Transformierte eines Polynoms im Nullpunkt konzentriert ist. Das kann präzisiert werden mit Hilfe des Begriffs des Trägers (engl. *support*) einer Distribution:

Definition
Der Träger $\operatorname{supp}(T)$ einer Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \Rightarrow T[f] = 0$$

z.B. ist $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$, allgemeiner $\operatorname{supp}(\sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \nabla^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$ und die Rechnung oben zeigt, dass für jedes Polynom $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt: $\operatorname{supp}(\hat{P}) = \{0\}$. Auch die Umkehrung dieser Aussage ist richtig, es gilt:

Satz ([6], Proposition 2.4.1)
Ist $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(T) = \{x_0\}$ so existieren $N \in \mathbb{N}$ und $c_\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $T = \sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha \nabla^\alpha \delta_{x_0}$.

Korollar
$P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann ein Polynom, wenn $\operatorname{supp}(\hat{P}) = \{0\}$ gilt.

Beispiel (i) Was ist die Fourier-Transformierte von $\theta = \chi_{]0,\infty[}$? Dazu schreiben wir $\theta(x) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\theta_\varepsilon(x)$ punktweise und durch θ majorisiert, wobei $\theta_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}\chi_{]0,\infty[}$. Die Fourier-Transformation der Approximationen ist leicht:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_\varepsilon(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ix\xi-\varepsilon x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-i\xi-\varepsilon}e^{-ix\xi-\varepsilon x}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{i\xi+\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{\xi-i\varepsilon}\end{aligned}$$

Aufgrund von Beispiel (i) zur Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und wegen der Stetigkeit der Fourier-Transformation folgt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\theta}[f] = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\hat{\theta}_\varepsilon[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{\xi-i\varepsilon}\mathrm{d}x$$

was man häufig abkürzt mit $\hat{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{x-i0}$. Formale Fourier-Inversion ergibt

$$\begin{aligned}\theta[f] = \check{\hat{\theta}}[f] = \hat{\theta}[\check{f}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{\check{f}(x)}{x-i\varepsilon}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}f(\xi)}{x-i\varepsilon}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Bis hierher ist die Rechnung vollkommen in Ordnung. Jetzt folgen zwei Vertauschungen von Grenzprozessen:

$$\begin{aligned}&\overset{?}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\mathrm{d}x\right)f(\xi)\mathrm{d}\xi = T_h[f] \\ &\text{mit } h(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Gilt nun aber auch $\theta = h$? In der Tat handelt es sich um eine "Integraldarstellung" der Heavyside-Funktion. Für $\varepsilon > 0$ existieren die Integrale rechts zwar nicht als Lebesgue-Integrale, aber immerhin (Übung zu Analysis I) als uneigentliche Riemann-Integrale. Anwendung des Residuensatzes nach der Substitution $y = x\xi$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\xi}\mathrm{d}y$ gibt:

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ix\xi}}{x-i\varepsilon}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon}\mathrm{d}y = 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}(z)>0}\mathrm{Res}_z\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon}$$

wobei sich die Summe über die Polstellen der betrachteten Funktion erstreckt, die in der oberen Halbebene liegen. Das ist keine, wenn $\xi < 0$ ist, und genau eine, wenn $\xi > 0$ ist. In diesem Fall ist

$$\mathrm{Res}_{i\xi\varepsilon}\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon} = \lim_{y\to i\xi\varepsilon}(y-i\xi\varepsilon)\frac{e^{iy}}{y-i\xi\varepsilon} = e^{-\xi\varepsilon}$$

und also $h(\xi) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} e^{-\xi\varepsilon}\chi_{]0,\infty[}(\xi) = \theta(\xi)$, jedenfalls für $\xi \neq 0$.

(ii) Betrachten wir weiter die Funktion θ_-, definiert durch

$$\theta_-(x) = \theta(-x) = \left\{\begin{matrix}1, & \text{für } x < 0 \\ 0, & \text{für } x \geq 0\end{matrix}\right\} = \theta\circ R(x),$$

wobei $R\colon x \mapsto -x$ die Spiegelung am Nullpunkt ist. Insbesondere gilt $R^{-1} = R$. In den Übungen werden wir diskutieren, dass für invertierbare lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\widehat{T\circ A} = |\det(A)|^{-1}\hat{T}\circ(A^{-1})^\top$$

ist, im vorliegenden Fall also

$$\hat{\theta}_- = \widehat{\theta\circ R} = \hat{\theta}\circ R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{-x-i0} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{x+i0}.$$

(iii) sign-Funktion und Cauchy-Hauptwert p.v. $\frac{1}{x}$. Wir schreiben für $x \neq 0$: $\operatorname{sign}(x) = \theta(x) - \theta_-(x)$, so dass

$$\widehat{\operatorname{sign}} = \hat{\theta} - \hat{\theta}_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\left(\frac{1}{x - i0} + \frac{1}{x + i0}\right)$$

oder etwas genauer:

$$\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{sign}}[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} + \frac{1}{x + i\varepsilon}\right) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{x(f(x) - f(0))}{x^2 + \varepsilon^2}\mathrm{d}x + \int_{|x| \geq 1} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{6}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\left(\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{f(x) - f(0)}{x}\mathrm{d}x + \int_{|x| \geq 1} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\,\text{p.v.}\,\frac{1}{x}[f]
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\widehat{\operatorname{sign}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\,\text{p.v.}\,\frac{1}{x}.$$

Hieraus folgt p.v. $\frac{1}{x} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{\operatorname{sign}}$ und weiter:

$$\widehat{\text{p.v.}\,\frac{1}{x}} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{\widehat{\operatorname{sign}}} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sign}$$

letzteres, da $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion ist.

(iv) Die Hilbert-Transformation und nochmal die Benjamin-Ono-Gleichung. Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiert man die Hilbert-Transformation als Faltung mit $\frac{1}{\pi}$ p.v. $\frac{1}{x}$, was man gleich punktweise angeben kann als

$$\mathcal{H}g(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{g(x - y)}{y}\mathrm{d}y.$$

(Man sieht leicht ein, dass $\mathcal{H}g \in L^\infty \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$) Dann ist

$$\mathcal{H}g = \frac{1}{\pi}\,\text{p.v.}\,\frac{1}{x} * g$$

und nach dem Faltungssatz

$$\widehat{\mathcal{H}g}(\xi) = \frac{1}{\pi}\left(\text{p.v.}\,\frac{1}{x} * g\right)^\wedge(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}\widehat{\text{p.v.}\,\frac{1}{x}}(\xi)\hat{g}(\xi) = -i\operatorname{sign}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Der Satz von Plancherel ergibt wegen $|-i\operatorname{sign}(\xi)| = 1$

$$\|\mathcal{H}g\|_{L^2_x} = \|\widehat{\mathcal{H}g}\|_{L^2_\xi} = \|\hat{g}\|_{L^2_\xi} = \|g\|_{L^2_x},$$

[6] Denn auf $[-1, 1]$ gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{x}\chi_{]\varepsilon,1]}(|x|)\right)(f(x) - f(0)) = 0$ und als Majorante haben wir nach dem Mittelwertsatz $\sup_{\xi \in [-1,1]} |f'(\xi)|$.

so dass man $\mathcal{H}$ zu einer linearen Isometrie $L^2_x \to L^2_x$ fortsetzen kann. Wegen $\widehat{\mathcal{H}^2 g}(\xi) = -\hat{g}(\xi)$, also $\mathcal{H}^4 = \mathrm{id}$ handelt es sich um einen isometrischen Isomorphismus. Der Pseudodifferentialoperator in der Benjamin-Ono-Gleichung

$$u_t - |D_x|\partial_x u = (u^2)_x \tag{BO}$$

hatten wir erklärt als $|D_x| = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}$, also

$$-|D_x|\partial_x = \mathcal{F}^{-1} - |\xi|(i\xi)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} - i\,\mathrm{sign}(\xi)\xi^2\mathcal{F}$$

so dass wir (BO) schreiben können als

$$u_t - \mathcal{H}\partial_x^2 u = (u^2)_x$$

(v) Die Soklotzki-Formeln. Fassen wir noch einmal die Ergebnisse aus den vorher gegangenen Beispielen zusammen:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{x - i0}; \quad \hat{\theta}_- = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{x + i0}; \quad \widehat{\mathrm{sign}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}$$

andererseits ist $1 = \theta + \theta_-$ und daher $\hat{\theta} + \hat{\theta}_- = \hat{1} = \sqrt{2\pi}\delta_0$. Addition bzw. Subtraktion ergeben:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{1}{x - i0} &= \hat{\theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x} \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\frac{-1}{x - i0} &= \hat{\theta}_- = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

oder nach Multiplikation mit $\pm i\sqrt{2\pi}$:

$$\boxed{\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta_0 + \mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}; \qquad \frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta_0 + \mathrm{p.v.}\,\frac{1}{x}}$$

Diese werden als Soklotzki-Identitäten bezeichnet.

Die Fourier-Transformation Gauß'scher-Funktionen

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine symmetrische und invertierbare Matrix. Wir setzen $A_0 = \mathrm{Re}(A)$ und $A_1 = \mathrm{Im}(A)$, so dass $A = A_0 + iA_1$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Unter einer Gauß-Funktion sei hier (der spezielle Fall)

$$g_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, x \mapsto g_A(x) := \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)$$

(ohne linearen oder konstanten Term im Argument von exp) verstanden. Wir setzen stets voraus, dass

$$A_0 \text{ positiv semidefinit ist} \Rightarrow g_A \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Wenn A_0 positiv definit ist, gilt sogar $g_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Um die Fourier-Transformierte solcher Gauß-Funktionen bestimmen zu können, sind einige Integrale vorbereitend zu berechnen:

(i)
$$I_n := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Denn, für $n = 2$ hat man mit Polarkoordinaten

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\pi$$

Der allgemeine Fall folgt jetzt aus dem Satz von Fubini. (Eine alternative Herleitung mit Hilfe der Coarea-Formel stellt zugleich die Beziehung her zur Oberfläche der Einheitskugel, vgl. Übungen zur Harmonischen Analysis.)

(ii) Es seien $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\tau) > 0$ und

$$I(\tau) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau \frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Dann gilt $I(\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}$, wobei die Wurzel mit dem Hauptzweig gezogen wird. Die Gleichung sieht man ein, denn wegen $\mathrm{Re}(\tau) > 0$ lässt sich Ableitung von $I(\tau)$ unter dem Integral mit Hilfe des Lebesgue'schen Konvergenzsatzes rechtfertigen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \sqrt{\tau} I(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} I(\tau) + \sqrt{\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} I(\tau) \qquad \text{mit} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} I(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-\tau \frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau \frac{x^2}{2}} x^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(x e^{-\tau \frac{x^2}{2}} \right) x \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\tau} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau \frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\tau} I(\tau).
\end{aligned}$$

Insgesamt also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \sqrt{\tau} I(\tau) = 0$ und damit

$$\sqrt{\tau} I(\tau) = 1 \cdot I(1) = \sqrt{2\pi}$$

(iii) Nun sei $H := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ symmetrisch und } \mathrm{Re}(A) \text{ positiv definit}\}$ und wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind, definieren wir

$$\det^{\frac{1}{2}}(A) := \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}$$

wobei die Wurzel mit dem Hauptzweig gezogen wird. Dann ist nämlich

$$(\det^{\frac{1}{2}}(A))^2 = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det(A) \qquad \text{und}$$
$$\det^{\frac{1}{2}} : H \to \mathbb{C}, A \mapsto \det^{\frac{1}{2}}(A)$$

ist eine stetige Funktion. Ist ferner $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, so gilt für alle $A \in H$:

$$\det^{\frac{1}{2}}(AB) = \det^{\frac{1}{2}}(A)\sqrt{\det(B)}.$$

Begründung: Wir haben $(\det^{\frac{1}{2}}(AB))^2 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = (\det^{\frac{1}{2}}(A))^2\det(B)$ und also

$$\det^{\frac{1}{2}}(AB) = \pm\det^{\frac{1}{2}}(A)\sqrt{\det(B)}. \tag{*}$$

Nun ist die Abbildung (bei festem B)

$$A \mapsto \frac{\det^{\frac{1}{2}}(AB)}{\det^{\frac{1}{2}}(A)}, H \to \mathbb{R}$$

stetig und also gilt in (*) für alle $A \in H$ dasselbe Vorzeichen. Für $A = 1$ (Einheitsmatrix) sehen wir, dass dieses das $+$-Zeichen sein muss.

Satz
Für $A \in H = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A \text{ symmetrisch und } \mathrm{Re}(A) \text{ positiv definit}\}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax\rangle/2}\mathrm{d}x = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\det^{\frac{1}{2}}(A)}$$

Beweis. Sei $A = A_0 + iA_1$, wobei A_0 positiv definit ist. Dann existiert eine (eindeutig bestimmte) positiv definite symmetrische Matrix $\sqrt{A_0}$ mit $(\sqrt{(}A_0))^2 = A_0$ und $\det(A_0) = (\det(\sqrt{A_0}))^2$. Dann schreiben wir

$$A = A_0 + iA_1 = \sqrt{A_0}\left(1 + i\left(\sqrt{A_0}\right)^{-1} A_1 \left(\sqrt{A_0}\right)^{-1}\right)\sqrt{A_0}$$

und die hierin enthaltene Matrix $\tilde{A} = \left(\sqrt{A_0}\right)^{-1} A_1 \left(\sqrt{A_0}\right)^{-1}$ ist reell und symmetrisch. Also existieren eine orhtogonale Matrix O und eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mit den Eigenwerten von $\tilde{A}$ als Diagonalelemente, so dass $\tilde{A} = O^\top DO$ und weiter

$$A = \sqrt{A_0}O^\top(1 + iD)O\sqrt{A_0}.$$

Dann ist nach einer der Vorbemerkungen oben:

$$\det^{\frac{1}{2}}(A) = \det(\sqrt{A_0})\det^{\frac{1}{2}}(1 + iD) = \det(\sqrt{A_0})\prod_{j=1}^{n}\sqrt{1 + id_j}.$$

Damit ist alles zurechtgelegt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax\rangle/2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, \sqrt{A_0}O^\top(1+iD)O\sqrt{A_0}x\rangle/2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle O\sqrt{A_0}x, (1+iD)O\sqrt{A_0}x\rangle/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\det(\sqrt{A_0})}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle y, (1+iD)y\rangle/2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\det(\sqrt{A_0})}\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-(1+id_j)\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\det(\sqrt{A_0})}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+id_j}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\det^{\frac{1}{2}}(A)}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung
Für den Hauptzweig der komplexen Logarithmus gilt $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ sofern $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$. Hieraus folgt:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\varepsilon + i\lambda} = \begin{cases} \sqrt{\lambda}e^{i\frac{\pi}{4}}, & \text{für } \lambda > 0 \\ 0, & \text{für } \lambda = 0 \\ \sqrt{-\lambda}e^{-i\frac{\pi}{4}}, & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$$

Sei nun $A_\varepsilon = \varepsilon 1 + iA_1 = U(\varepsilon 1 + iD)U^\top$ mit A_1 reell, symmetrisch, invertierbar, so dass alle Diagonalelemente von $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ von Null verschieden sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \det{}^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\varepsilon + id_j} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{\varepsilon + id_j} = |\det(A_1)|^{\frac{1}{2}} \exp(i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(A_1)) \end{aligned}$$

dabei ist $\operatorname{sign}(A_1) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(d_j)$. Damit kommen wir zu dem Ergebnis:

Satz 3
Sei $A \in C^{n\times n}$ symmetrisch und invertierbar mit $\operatorname{Re}(A)$ positiv semidefinit. Dann gilt für $g_A(x) = \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)$

$$\hat{g}_A(\xi) = \frac{1}{\det{}^{\frac{1}{2}}(A)} g_{A^{-1}}(\xi).$$

Im Fall $A = iA_1$ ist dies aufzufassen als

$$\hat{g}_A(\xi) = \frac{1}{|\det(A_1)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(A_1)\right) \exp(i\langle \xi, A_1^{-1}\xi\rangle/2).$$

Bemerkung
Die wichtigsten Fälle hierbei sind

$$g(x) = \exp(-|x|^2/2) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2)$$

was unter anderem für die Wärmeleitungsgleichung von Bedeutung ist, und zum anderen, mit $A_1 = -1$

$$\tilde{g}(x) = \exp(i|x|^2/2) \Rightarrow \hat{\tilde{g}}(\xi) = \left(\sqrt{i}\right)^n \exp(-i|\xi|^2/2),$$

was für die Schrödinger-Gleichung relevant ist. (Hierbei kann man auch i überall durch $-i$ ersetzen.)

Beweis. Sei $u(x) = g_A(x) = \exp(-\langle x, Ax\rangle/2)$. Dann erhalten wir für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = u(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle x, Ax\rangle/2)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(-\langle x, Ax\rangle/2) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}x_k x_l = -\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}x_l + \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}x_k\right)$$
$$= -\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}x_l = -(Ax)_j$$

Also vektoriell geschrieben:

$$\nabla_x u(x) = -Axu(x) \tag{*}$$

Multiplikation mit A^{-1} ergibt $A^{-1}\nabla_x u(x) = -xu(x)$ und anschließende Fourier-Transformation führt auf

$$A^{-1}i\xi\hat{u}(\xi) = -i\nabla_\xi\hat{u}(\xi),$$
$$\text{also } \nabla_\xi\hat{u}(\xi) = -A^{-1}\xi\hat{u}(\xi). \tag{**}$$

d.h. $\hat{u}$ genügt der gleichen Differentialgleichung (*) wie u, wobei allerdings A^{-1} anstelle von A steht. Wir setzen

$$v(\xi) = \hat{u}(\xi)\exp(\langle\xi, A^{-1}\xi\rangle/2)$$

und erhalten

$$\nabla_\xi v(\xi) = (\nabla_\xi\hat{u}(\xi))\exp(\langle\xi, A^{-1}\xi\rangle/2) + \hat{u}(\xi)\nabla_\xi\exp(\langle\xi, A^{-1}\xi\rangle/2)$$
$$= \exp(\langle\xi, A^{-1}\xi\rangle/2)(\underbrace{-A^{-1}\xi\hat{u}(\xi)}_{\text{aus (**)}} + \underbrace{A^{-1}\xi\hat{u}(\xi)}_{\text{aus (*)}}) = 0$$

Daraus folgt $v(\xi) = c$ für eine absolute Konstante $c \in \mathbb{C}$ und

$$\hat{u}(\xi) = c\exp(-\langle\xi, A\xi\rangle/2).$$

Zur Bestimmung von c sei zunächst $\mathrm{Re}(A) > 0$ angenommen. Dann erhalten wir für $\xi = 0$

$$c = \hat{u}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(\langle x, Ax\rangle/2)\mathrm{d}x = \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A)},$$

wobei sich das letzte Gleichheitszeichen aus dem Satz über die Gauß-Integrale ergibt. Im Fall $\mathrm{Re}(A) = 0$, also $A = iA_1$, setzen wir $A_\varepsilon := \varepsilon 1 + iA_1$ und erhalten (mit der Stetigkeit der Fourier-Transformation und der Inversion von Matrizen):

$$\hat{g}_A(\xi) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\hat{g}_{A_\varepsilon}(\xi) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon)}\exp(-\langle\xi, A_\varepsilon^{-1}\xi\rangle/2)$$
$$= \frac{1}{\lim_{\varepsilon\searrow 0}\det^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon)}\exp(\underbrace{-\langle\xi, (iA_1)^{-1}\xi\rangle/2}_{=i\langle\xi, A_1^{-1}\xi\rangle 2})$$

woraus sich zusammen mit der vohergehenden Grenzwertüberlegung der Zusatz ergibt. □

Anwenden können wir diesen Satz nun zur Lösung des Cauchy-Problems für die Wärmeleitungs- und Schrödinger-Gleichung:

Satz 4
Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ symmetrisch, invertierbar und $\mathrm{Re}(A)$ positiv semidefinit sowie $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei

$$u \in C([0,\infty[, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

eine Lösung des Cauchy-Problems $u(t=0) = u_0$ für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A\nabla_x\rangle u = \sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Dann gilt für $t > 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A)}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle y, A^{-1}y\rangle/4t)u_0(x-y)\mathrm{d}y.$$

Bemerkung
Das Erfülltsein der Differentialgleichung in der Voraussetzung ist im Sinn distributioneller Ableitungen zu verstehen, d.h. wir verlangen für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq \{(x,t) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t \mid t > 0\}$, dass

$$-u\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = u\left[\langle \nabla_x, A\nabla_x\rangle f\right].$$

Beweis. Vorausgesetzt sind $\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A\nabla_x\rangle u$ und $u(t=0) = u_0$. Die partielle Fourier-Transformation bezüglich der Raumvariablen sei mit $\mathcal{F}_x$ bezeichnet. Daher folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x u = -\langle \xi, A\xi\rangle \mathcal{F}_x u. \tag{*}$$

Wir definieren $v \in C([0,\infty[, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ durch

$$v(t) = e^{t\langle \xi, A\xi\rangle}\mathcal{F}_x u(t).$$

Dann ist

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t) = \langle \xi, A\xi\rangle v(t) + e^{t\langle \xi, A\xi\rangle}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x u(t) \overset{(*)}{=} 0,$$

und hieraus können wir folgern, dass v unabhängig von t ist (vgl. Hörmander, Theorem 3.1.4'). D.h. es existiert ein $v_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$v_0 = e^{t\langle \xi, A\xi\rangle}\mathcal{F}_x u(t) \text{ bzw. } \mathcal{F}_x u(t) = e^{-t\langle \xi, A\xi\rangle}v_0$$

Für $t = 0$ sehen wir, dass $v_0 = \mathcal{F}_x u_0 = \hat{u}_0$. Nun verwenden wir wieder die Abkürzung für die Gauß-Funktionen, also

$$e^{-t\langle \xi, A\xi\rangle} = g_{2tA}(\xi).$$

Dann haben wir $\mathcal{F}_x u(t) = g_{2tA}\hat{u}_0$ bzw. nach Fourier-Inversion

$$u(t) = \mathcal{F}_x^{-1}(g_{2tA}\hat{u}_0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\mathcal{F}_x^{-1}g_{2tA}) * u_0.$$

Dabei ist g_{2tA} eine gerade Funktion und also

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x^{-1} g_{2tA}(x) = \mathcal{F}_x g_{2tA}(x) &= \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(2tA)} g_{(2tA)^{-1}}(x) \\ &= \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A)} \exp(-\langle x, (2tA)^{-1}x\rangle/2) \\ &= \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A)} \exp(-\langle x, A^{-1}x\rangle/4t)\end{aligned}$$

Fassen wir die Vorfaktoren zusammen und schreiben die Faltung aus, so ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung (i) Für die Wärmeleitungsgleichung lautet die Integraldarstellung

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} u_0(x-y)\mathrm{d}y,$$

denn hier ist A gerade die Einheitsmatrix.

(ii) Für die Schrödinger-Gleichung $iu_t + \Delta u = 0$ bzw. $u_t - i\Delta u = 0$ haben wir $A = i \cdot 1$, also $A^{-1} = -i \cdot 1$ und das Ergebnis lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|y|^2}{4t}} u_0(x-y)\mathrm{d}y.$$

Das liefert auch für $t < 0$ eine Lösungsformel.

(iii) Wir haben einen Eindeutigkeitssatz bewiesen. Wenn $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist, ergibt sich für $t \neq 0$, dass unser Kandidat für eine Lösung eine $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times]0,\infty[)$-Funktion ist — Differentiation unter dem Integral lässt sich wegen $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rechtfertigen. Eine (etwas längliche) Rechnung zeigt dann, dass die Differentialgleichug auf $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^+_t$ im klassischen Sinn erfüllt ist. (Dies gilt auch für $\mathrm{Re}(A) = 0$ oder lediglich semidefinites A.)

(iv) Anfangswertproblem: In beiden Fällen scheint der Vorfaktor $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}$ für den Grenzwert $t \searrow 0$ etwas Kummer zu bereiten. Für die WLG (allgemeiner für den Fall $\mathrm{Re}(A)$ positiv definit) lässt sich dieses Problem mit einer einfachen Überlegung lösen: Wir stellen fest, dass es sich bei der Funktionenschar

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \qquad (t > 0)$$

um eine approximative Einheit handelt. In der Tat ist

$$G_t(x) = \left(\sqrt{2t}\right)^{-n} G_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right), \qquad G_{\frac{1}{2}}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

und wir wissen $\int_{\mathbb{R}^n} G_{\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x = 1$. Die allgemeineren Konvergenzaussagen für approximative Einheiten ergeben, selbst wenn u_0 lediglich stetig und beschränkt ist, dass

$$\lim_{t \searrow 0} G_t * u_0 = u_0$$

mit lokal gleichmäßiger Konvergenz ist. Für die Schrödinger-Gleichung werden wir die Frage der punktweisen Konvergenz der Lösung gegen die Daten bald sehr leicht beantworten können — jedenfalls für hinreichend gute Daten ($u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist nicht wirklich erforderlich!)

(v) Aus (iii) und (iv) ergibt sich: Für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist mit der Integraldarstellung die Existenzfrage auch gelöst.

(vi) Ist u_0 in einem normierten Funktionenraum X, in dem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt (etwa: $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$) und läßt sich der Lösungsoperator

$$U_\varphi \colon u_0 \mapsto U_\varphi u_0, \qquad U_\varphi(t)u_0 = E_t * u_0$$

$$\text{mit } E_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\det^{\frac{1}{2}}(A)} \exp(-\langle x, A^{-1}x\rangle/2), \text{ wie oben}$$

stetig nach $C([0,\infty[, X)$ fortsetzen,so betrachet man dies ebenfalls als *die Lösung* des Cauchy-Problems, auch wenn Fragen wie punktweise Konvergenz der Lösung gegen die Daten noch ungeklärt sind.

(vii) Dispersive oder time-decay-Abschätzungen: Aus der Integraldarstellung

$$u(x,t) = C_A t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle y, A^{-1}y\rangle/4t) u_0(x-y)\mathrm{d}y$$

folgt unmittelbar die L^∞-L^1-Abschätzung und aus dem Beweis die Identität

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-\frac{n}{2}} \|u_0\|_{L^1_x} \qquad \mathcal{F}_x u(t) = e^{-t\langle \xi, A\xi\rangle}\hat{u}_0,$$

woraus $\|\mathcal{F}_x u(t)\|_{L^2_\xi} \leq \|\hat{u}_0\|_{L^2_\xi}$ und mit Plancherel folgt:

$$\|u(t)\|_{L^2_x} \leq \|u_0\|_{L^2_x} \qquad \text{(Im Fall } \operatorname{Re}(A) = 0 \text{ sogar mit Gleichheit!)}$$

In dieser Situation bietet es sich an, den Interpolationssatz von Riesz-Thorin anzuwenden:

Satz (Riesz-Thorin)
Es seien $1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq \infty$ und, für $j \in \{0,1\}$, $T_j \colon L^{q_j}(\mu) \to L^{p_j}(\nu)$ stetige lineare Abbildungen mit Operatornormen M_j. Auf $L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$ seien T_0 und T_1 identisch und es gebe ein $\theta \in [0,1]$, so dass

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

T sei die Einschränkung von T_0 (bzw. T_1) auf $L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$. Dann gilt für alle $f \in L^{q_0}(\mu) \cap L^{q_1}(\mu)$ die Abschätzung

$$\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_q,$$

die eine eindeutige Fortsetztung von T zu $T_\theta \colon L^q(\mu) \to L^p(\nu)$ erlaubt.

Bemerkung
Der Beweis dieses Satzes, vgl. Harmonische Analysis, verwendet das Maximum-Prinzip für holomorphe Funtionen. Verallgemeinerungen dieses Satzes werden auch als *komplexe Interpolationsmethode* bezeichnet.

Den Satz von Riesz-Thorin wollen wir nun anwenden auf unseren Lösungsoperator

$$T_0\colon L^1_x(\mathbb{R}^n) \to L^\infty_x(\mathbb{R}^n), u_0 \mapsto u(\cdot,t) = U_\varphi(t)u_0$$
$$T_1\colon L^2_x(\mathbb{R}^n) \to L^2_x(\mathbb{R}^n), u_0 \mapsto u(\cdot,t) = U_\varphi(t)u_0,$$

wobei $U_\varphi(t)$ auf eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = \langle \nabla_x, A\nabla_x\rangle$ mit $u(t=0) = u_0$ zur Zeit $t > 0$ abbildet. Mit den Operatornormen $M_0 = C_A t^{-\frac{n}{2}}$ und $M_1 = 1$ ergibt für $p \in]1,2[$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$ und $q \in]2,\infty[$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'}$, so dass $1-\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$ die Abschätzung

$$\|U_\varphi(t)u_0\|_{p'} \le C_A^{1-\theta} t^{-\frac{n}{2}(1-\theta)} \|u_0\|_p \lesssim_A t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|u_0\|_p$$

und erlaubt die Fortsetzung des Lösungsoperators zu

$$U_\varphi(t)\colon L^p_x(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}_x, u_0 \mapsto U_\varphi(t)u_0,$$

mit dem *time-decay-estimate*:

$$\|U_\varphi(t)u_0\|_{L^{p'}_x(\mathbb{R}^n)} \lesssim_A t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \|u_0\|_{L^p_x(\mathbb{R}^n)}.$$

1.2.2 Sobolev-Räume und Besov-Räume

Bezeichnung
Operatoren der Form $M\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \supseteq X \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Mf := \mathcal{F}^{-1}m(\xi)\mathcal{F}f$ mit einer mindestens messbaren Funktion m bezeichnen wir als Fourier-Multiplikatoren. Den Raum aller L^p stetigen Multiplikatoren bezeichnen wir mit M_p.

Definition
Sei $s \in \mathbb{R}$, der Fourier-Multiplikator $\mathcal{J}^s\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \mathcal{J}^s f := \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}f$ heißt Bessel-Potential-Operator der Ordnung $-s$. Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$ erklärt man ferner $\mathcal{I}^s f = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^s \mathcal{F}f$ den Riesz-Potential-Operator der Ordnung $-s$.

Bemerkung
Die Abbildung $\xi \mapsto \langle\xi\rangle^s$ ist C^∞ und von moderatem Wachstum. Also ist $\mathcal{J}^s|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und stetig und linear. Also ist $\mathcal{J}^s\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ als Transponierte wieder stetig und linear. Ferner $\mathcal{J}^s \circ \mathcal{J}^{-s} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$, d.h. $\mathcal{J}^s$ ist ein Isomorphismus.

Definition
Der normierte Vektorraum $H^s_p = H^s_p(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{s,p} < \infty\}$ mit $\|f\|_{s,p} := \|\mathcal{J}^s f\|_p$ heißt der Bessel-Potential-Raum zu den Indices $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty]$. Implizit als Voraussetzung bei der Norm ist hier noch zu bemerken, dass $\mathcal{J}^s f$ eine messbare Funktion sein muss, sodass der Ausdruck $\|\mathcal{J}^s f\|_p$ Sinn ergibt. Speziell für $p = 2$ werden häufig $H^s = H^s_2$ schreiben.

Bemerkung (i) $\mathcal{J}^s\colon H^s_p \to L^p$ ist ein isometrischer Isomorphismus, manchmal schreibt man dafür $H^s_p = \mathcal{J}^{-s}L^p$. Also ist H^s_p ein Banach-Raum. Für $1 \le p < \infty$ ist H^s_p außerdem separabel und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in H^s_p.

(ii) Sei $1 \leq p < \infty$ und $\psi\colon H_p^s \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional, dann ist $\psi_0 = \psi \circ \mathcal{J}^{-s}$ ein stetiges lineares Funktional auf L^p.

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[r, "\mathcal{J}^{-s}"] \arrow[rr, bend right, "\psi_0"'] & H_p^s \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Nach dem Satz über die Dualräume von L^p existiert ein $g_0 \in L^{p'}$ mit $\|g_0\|_{p'} = \|\psi_0\|$, so dass $\psi_0[f] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g_0(x)}\mathrm{d}x$ für alle $f \in L^p$. Wir setzen $g := \mathcal{J}^s g_0 \in H_{p'}^{-s}$. Für $h \in H_p^s$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi)\langle\xi\rangle^s\overline{\hat{g}_0(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mathcal{J}^s h}(\xi)\overline{\hat{g}_0(\xi)}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{J}^s h(x)\overline{g_0(x)}\mathrm{d}x = \psi_0[\mathcal{J}^s h] = \psi[h]. \end{aligned}$$

Zu $\psi \in (H_p^s)'$ existiert also ein $g \in H_{p'}^{-s}$, so dass $\psi[f] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ und dass $\|\psi\| = \|g\|_{-s,p'}$.

(iii) Normabschätzungen in den H_p^s fallen schwer, wenn das $s \in \mathbb{R}$ negativ ist. Meist hilft hier nur ein Zugang über die Identität:

$$\|f\|_{s,p} = \sup_{\substack{g \in H_{p'}^{-s} \\ \|g\|_{-s,p'} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Satz (Multiplikator Satz von Mikhlin (1956))
Sei $m \in C^k(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{n}{2}$, so dass für alle $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \nabla_\xi^\alpha m(\xi)| < \infty. \tag{*}$$

Dann ist für jedes $p \in]1, \infty[$ der Multiplikator $M\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Mf := \mathcal{F}^{-1}m(\xi)\mathcal{F}f$ stetig.

Ein Beweis dieses Satzes ist zu finden in [6], Theorem 6.2.7.

Bemerkung
Der Fall $p = 2$ hat einige Besonderheiten, unter anderem:

(i) Der H^s ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{J}^s f(x)\overline{\mathcal{J}^s g(x)}\mathrm{d}x$$

(ii) Wenn wir auf dieses Skalarprodukt Plancherel anwenden und $f = g$ setzen, so erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}|f(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

(a) Da $s \mapsto \langle\xi\rangle^{2s}$ eine monoton wachsende Funktion ist, gewinnen wir die Abschätzung $\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s+\varepsilon,2}$ für jedes $\varepsilon \geq 0$. Damit bekommen wir, dass $H^{s+\varepsilon} \subseteq H^s$ mit einer stetigen Einbettung. Diese Aussage gilt auch für $p \in]1,\infty[$, was man nach Überprüfung der Mikhlin-Bedingung (*) für $m(\xi) = \langle\xi\rangle^{-\varepsilon}$ einsieht. Insbesondere folgt, wenn $s \geq 0$, dass $H^s \subseteq L^2$.

(b) Ist $s = k \in \mathbb{N}_0$, so gilt $\langle\xi\rangle^{2s} = (1+|\xi|^2)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}|\xi|^{2j}$. Da nun $|\xi|^{2j} = (\sum_{i=0}^n \xi_i^2)^j$ und außerdem $\xi_i^2|\hat{f}(\xi)|^2 = |\widehat{\partial_{x_i} f}(\xi)|^2$. Insofern ist auf H^s eine äquivalente Norm gegeben durch

$$\|f\|_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha f\|_{L^2}.$$

Bereits in den 1930er Jahren hat der russische Mathematiker Sergei L. Sobolev Normen der Form

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\nabla^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \qquad (1 \leq p \leq \infty,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

mit sogennanten *schwachen Ableitungen* ∇^α (definiert durch die Regel der partiellen Integration) engeführt und verwendet. Nach ihm sind die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev-Räume benannt. Auch die Bessel-Potential-Räume (insbesondere für $p = 2$) werden häufig als Sobolev-Räume (oder: verallgemeinerte Sobolev-Räume) bezeichnet. Ebenfalls für $p \in]1,\infty[$ ist durch die Sobolev-Norm eine der Bessel-Potential-Norm äquivalente Norm gegeben. Das sieht man ein nach Überprüfung der Mikhlin-Bedingung (*) für m und $\frac{1}{m}$, wobei

$$m(\xi) = \left|\langle\xi\rangle^{-k}\left(1 + \sum_{|\alpha|\leq k} \xi^\alpha\right)\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Dann betrachtet man noch, dass die Klasse $M_p(\mathbb{R}^n)$ der stetigen Multiplikatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Unteralgebra von $L(L^p(\mathbb{R}^n))$ ist.

Wir formulieren den Einbettungssatz von Sobolev zunächst nur für $p = 2$.

Satz (Einbettungssatz von Sobolev für H^s)
Sei $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > \frac{n}{2}$. Dann ist $H^s \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung.

Beweis. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^s|\hat{f}(\xi)|\mathrm{d}\xi \leq c_s\left(\int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} = c_s\|f\|_{H^s}.$$

Also folgt mit dem Riemann-Lebesgue'schen Lemma für $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass $\hat{\hat{f}} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$. Es ist $\hat{\hat{f}} = f \circ R$.[7] Also ist $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Das heißt, wir haben $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung für $s > \frac{n}{2}$. □

[7] Gegebenenfalls mit Modifikation auf einer λ^n-Nullmenge.

Bemerkung
Anwenden können wir diesen Satz um gleichmäßige Konvergenz der Lösung gegen die Daten im Fall der Schrödinger-Gleichung zu bekommen. Sei $u(t) = e^{it\Delta}u_0$ die Lösung des Cauchy-Problems der Schrödinger-Gleichung $iu_t + \Delta u = 0$ mit $u(t=0) = u_0,\ u_0 \in H^s$. Allgemeiner gilt für $u(t) = U_\varphi(t)u_0,\ u(t) = U_\varphi(t)u_0 = \cdots = \mathcal{F}^{-1}e^{it\varphi(\xi)}\mathcal{F}u_0$ für φ reell:

(i) Ist $u_0 \in H^s$, so gilt $\lim_{t\searrow 0} \|U_\varphi(t)u_0 - u_0\|_{s,2} = 0$.

(ii) Ist darüber hinaus $s > \frac{n}{2}$, so gilt $\lim_{t\searrow 0} U_\varphi(t)u_0(x) = u_0(x)$ mit gleichmäßiger Konvergenz.

Begründung dafür ist

$$\|U_\varphi(t)u_0 - u_0\|_{s,2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \underbrace{|e^{it\varphi(x)} - 1|^2}_{\leq 4} |\widehat{u_0}(\xi)| \mathrm{d}\xi.$$

Der Integrand geht für $t \to 0$ gegen 0. Damit liefert der Lebesgue'sche Konvergenzsatz die erste Behauptung. Die zweite folgt aus

$$\|U_\varphi(t)u_0 - u_0\|_\infty \overset{\text{Einbettungssatz}}{\lesssim_s} \|U_\varphi(t)u_0 - u_0\|_{s,2} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Offene Frage (zur Zeit): Wann gilt punktweise Konvergenz? Für die Schrödinger-Gleichung in einer Dimension ist bekannt, dass dies noch für Daten in $H^{\frac{1}{4}}$ möglich ist, was optimal auf der H^s-Skala ist. Für höhere Dimensionen ist die Frage noch nicht geklärt. Momentan ist bekannt, dass punktweise Konvergenz für Daten in $H^{\frac{1}{2}}$ erreicht werden kann (für alle $n \geq 2$), was aber suboptimal ist, denn bspw. für $n = 2$ wurde bereits $s > \frac{3}{8}$ erreicht.

Satz (Sobolev'scher Einbettungssatz)
Es seien $s > 0,\ 1 < p < q < \infty$. Dann gelten

(i) $H_p^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ für $s - \frac{n}{p} > 0$,

(ii) $H_p^s(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$ für $s - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q}$.

Beweis. Als allgemeine Argumente führen wir an: o.B.d.A. sei $s < n$. Die zu zeigenden Ungleichungen sind

$$\begin{aligned} \|f\|_q &\lesssim_{s,n,p,q} \|\mathcal{J}^s f\|_p && \forall f \in H_p^s(\mathbb{R}^n) \text{ (zunächst } q = \infty \text{ erlaubt)} \\ \|\mathcal{J}^{-s} f\|_q &\lesssim_{s,n,p,q} \|f\|_p && \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

wobei der Bessel-Potential-Operator wegen des Faltungssatzes geschriebene werden kann als $\mathcal{J}^{-s}f = \mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle^{-s}\mathcal{F}f) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} G_s * f$ mit $G_s = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-s}$. Wir

starten mit einer einfachen Substitution $r = At$ für ein $A > 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^\infty r^{\frac{s}{2}} e^{-r} \frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&= A^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-At} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \text{wähle } A = (1+|\xi|^2) \Rightarrow A^{\frac{s}{2}} = \langle\xi\rangle^s. \\
\Rightarrow \langle\xi\rangle^{-s} &= c_s \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t} e^{-|\xi|^2 t} \frac{\mathrm{d}t}{t}. \\
\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-s} &= c_s \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t} \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-|\xi|^2 t}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \tilde{c}_s \int_0^\infty t^{\frac{s-n}{2}} e^{-t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = G_s(x).
\end{aligned}$$

Es folgt eine punktweise Abschätzung:

(i) Für $|x| \geq 2$: $|x| = \frac{|x|}{\sqrt{2t}}\sqrt{2t} \leq \frac{|x|^2}{4t} + t$, andererseits auch: $\frac{1}{t} + t \leq \frac{|x|^2}{4t} + t$. Daraus folgt $\frac{|x|^2}{4t} + t \geq \frac{|x|}{2} + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ und damit

$$\int_0^\infty t^{\frac{s-n}{2}} e^{-t} e^{-\frac{|t|^2}{4t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_0^\infty t^{\frac{s-n}{2}} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{1}{2t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} e^{-\frac{|x|}{2}} \lesssim e^{-\frac{|x|}{2}}$$

(ii) Für $0 < |x| < 2$: $G_s(x) = c_s\left(G_s^1(x) + G_s^2(x)\right)$ mit

$$G_s^1(x) = \int_0^4 t^{\frac{s-n}{2}} e^{-t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad G_s^2(x) = \int_4^\infty t^{\frac{s-n}{2}} e^{-t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq c.$$

Mit der Substitution $r = \frac{t}{|x|^2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
G_s^1(x) &= |x|^{s-n} \int_0^{4|x|^2} r^{\frac{s-n}{2}} \underbrace{e^{-r|x|^2}}_{\leq 1} e^{-\frac{1}{4r}} \frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&\leq |x|^{s-n} \int_0^\infty r^{\overbrace{\frac{s-n}{2} - 1}^{<-1}} e^{-\frac{1}{4r}} \mathrm{d}r \lesssim_{s,n} |x|^{s-n}.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst $G_s(x) \lesssim_{s,n} e^{-\frac{|x|}{2}} \chi_{[2,\infty[}(|x|) + |x|^{s-n} \chi_{]0,2[}(|x|) \lesssim |x|^{s-n} e^{-\frac{|x|}{4}}$.

Weiter ist $G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$ für $s > \frac{n}{r'}$, denn:

$$\begin{aligned}
\|G_s\|_r^r &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{(s-n)r} e^{-r\frac{|x|}{4}} \mathrm{d}x < \infty \\
&\Leftrightarrow \int_0^1 \rho^{(s-n)r} e^{-r\frac{\rho}{4}} \rho^{n-1} \mathrm{d}\rho < \infty \Leftrightarrow (s-n)r + n > 0 \Leftrightarrow s > \frac{n}{r'}.
\end{aligned}$$

Jetzt sehen wir (i) ein wegen:

$$\|f\|_\infty = \|G_s * \mathcal{J}^s f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |G_s * \mathcal{J}^s f(x)| \leq \underbrace{\|G_s\|_{p'}}_{<\infty \text{ für } s > \frac{n}{p}} \|\mathcal{J}^s f\|_p$$

und es gilt $G_s * \mathcal{J}^s f = f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt (i).

Zum einfachen Teil von (ii): Es gelte $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{q}$. Setze $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r'}$, sodass $G_s \in L^r$. Andererseits gilt aber auch $\frac{1}{r'} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'}$, das heißt $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}$, sodass

$$\|f\|_q = \|G_s * \mathcal{J}^s f\|_q \overset{\text{Young}}{\lesssim} \underbrace{\|G_s\|_r}_{\leq c_{s,p,q}} \underbrace{\|\mathcal{J}^s f\|_p}_{=\|f\|_{s,p}}.$$

□

Der Fall $s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$ erweist sich als deutlich schwerer, hierfür sind weitere Argumente notwendig, wie zum Beispiel

Satz (Hardy-Littlewood-Sobolev, (HLS)-Ungleichung)
Sei $0 < \lambda < n,\ r, p \in]1, \infty[$, sodass $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 1 - \frac{\lambda}{n}$. Dann gilt

$$\||\cdot|^{-\lambda} * g\|_p \lesssim_{r,p,\lambda} \|g\|_r.$$

Beispiel
Für welche $s \in \mathbb{R},\ p \in]1, \infty[$ ist $\delta_{x_0} \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest? Da $\delta_{x_0} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, kommen nur negative s in Frage. Es gilt außerdem

$$\|\delta_{x_0}\|_{s,p} = \|\mathcal{J}^s \delta_{x_0}\|_p = \|G_{-s} * \delta_{x_0}\|_p = \|\tau_{x_0} G_{-s}\|_p = \|G_{-s}\|_p \overset{!}{<} \infty.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $-s > \frac{n}{p'}$ wie wir oben gesehen haben, also haben wir $\delta_{x_0} \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ für $s < -\frac{n}{p'}$.

Bemerkung
Anhand unserer Überlegungen zum Beweis des Sobolev'schen Einbettungssatzes sehen wir auch leicht die Translationsinvarianz von $\|\cdot\|_{s,p}$ ein: Betrachten wir, das Faltungen und Translationen vertauschen, erhalten wir zunächst für $s < 0$:

$$\|\tau_{x_0} f\|_{s,p} = \|\mathcal{J}^s \tau_{x_0} f\|_p \overset{s \leq 0}{=} \|G_{-s} * \tau_{x_0} f\|_p = \|\tau_{x_0}(G_s * f)\|_p = \|f\|_{s,p}.$$

Mit einem Dualitätsargument bekommt man das selbe auch für $s > 0$.

Littlewood-Paley-Charakterisierung von H^s_p für $p \in]1, \infty[$

Betrachte $H^s = H^s_2$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi$. Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in $\bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k + N$ mit einer Nullmenge N und messbaren sowie beschränkten Mengen A_k liefert ein Orthogonalsystem $e_k = \mathcal{F}^{-1}\chi_{A_k}$ in H^s, denn:

$$\langle e_k, e_j\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} \chi_{A_k}(\xi)\chi_{A_j}(\xi)\mathrm{d}\xi = \delta_{kj} \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}\mathrm{d}\xi.$$

Nach Normierung ist dies ein Orthonormalsystem, in aller Regel aber kein vollständiges System. Wir wählen $A_0 = B_1(0), A_k = B_{2^k}(0) \setminus B_{2^{k-1}}(0),\ k \geq 1$. Die H^s-Norm erhält damit folgenden äquivalenten Ausdruck:

$$\|f\|^2_{s,2} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_k} \underbrace{\langle\xi\rangle^{2s}}_{\sim 2^{2ks}} |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2ks} \int_{A_k} |\hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Eine Kurzschreibweise für dyadische Zahlen sei im Folgenden $K = 2^k \in 2^{\mathbb{N}_0}$. Vorteil: Die Gewichte $\langle\xi\rangle^{2s}$ werden auf den Annuli A_k auf die Größenordnung K^{2s} *eingefroren*, und diese Zahlen sind oft einfacher zu händeln als die variablen Ausfrücke $\langle\xi\rangle^{2s}$. Die Zerlegung wird dyadisch gewählt, so dass die Folge der Gewichte $(K^{2s})_{K\in 2^{\mathbb{N}_0}}$ eine geometrische wird, die man kontrollieren kann. (Normabschätzungen laufen oft darauf hinaus, geometrische Reihen auszurechnen oder abzuschätzen.) Die dabei verwendeten Abbildungen

$$P_{\Delta k}\colon H^s \to H^s, \quad f \mapsto P_{\Delta k} f = \mathcal{F}^{-1}\chi_{A_k}\mathcal{F}f, \quad P_0 f := \mathcal{F}^{-1}\chi_{B_1(0)}\mathcal{F}f.$$

sind in unserer Situation[8] orthogonale Projektionen im engeren Sinn, das heißt

$$\begin{aligned} &P_{\Delta k}^2 = P_{\Delta k} \quad \text{(Projektionseigenschaft)} \quad \text{sowie} \\ &\operatorname{Im}(P_{\Delta k}) \perp \operatorname{Im}(P_{\Delta l}), \text{ wenn } l \neq k. \quad \text{(Orthogonalitätseigenschaft)} \end{aligned}$$

Wir können die Projektoren $P_{\Delta k}$ auch auffassen als Faltungen mit $\psi_k = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\chi_{A_k}$, sodass $P_{\Delta k} f = \psi_k * f$. Damit

$$\|f\|_{H^s} \sim \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |2^{ks} P_{\Delta k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2ks} \|P_{\Delta k} f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Das Ziel der Littlewood-Paley-Theorie ist es eine entsprechende Darstellung für $p \neq 2$ zu finden und damit einfacher Ergebnisse von dem Hilbert-Raum-Fall $p = 2$ verallgemeinern zu können. Problem ist: wir haben bereits erfahren, dass der Fourier-Multiplikator $\mathcal{F}^{-1}\chi_{B_1(0)}\mathcal{F}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \neq 2$ und $n \geq 2$ nicht stetig ist (siehe [4]). Daher muss man von der Verwendung scharfer charakteristischer Funktionen Abstand nehmen und stattdessen sog. *smooth cut-off-functions* verwenden. Dabei geht zwangsläufig die Orthogonalität im strengen Sinne verloren. Man wählt

(i) $\varepsilon_0 \in]0, \frac{1}{4}[$ und

(ii) eine rotationssymmetrische Schwartz-Funktion ψ mit

  (a) $0 \leq \hat{\psi} \leq 1$,

  (b) $\operatorname{supp}(\hat{\psi}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1 - \varepsilon_0 \leq |\xi| \leq 2\}$,

  (c) $\hat{\psi}(\xi) = 1$ für $\xi \in \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq |\xi| \leq 2 - 2\varepsilon_0\}$,

  (d) $\hat{\psi}(\xi) + \hat{\psi}(\frac{\xi}{2}) = 1$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq |\xi| \leq 4 - 4\varepsilon_0\}$.

Allgemein ist $\hat{\psi}_k(\xi) = \hat{\psi}\left(2^{-k}\xi\right)$, das heißt $\psi_k(x) = 2^{nk}\psi(2^k x)$ für $k \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}_k(\xi) = 1$. Mit dieser Wahl sind $\hat{\psi}_k$ keine Projektoren, als Ersatz haben wir die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\hat{\psi}_k = \hat{\psi}_k \left(\hat{\psi}_{k-1} + \hat{\psi}_k + \hat{\psi}_{k+1} \right) \text{ sowie} \\ &\hat{\psi}_k \hat{\psi}_l = 0 \quad \text{falls } |l - k| \geq 2 \text{ (almost orthogonality).} \end{aligned}$$

[8] bei Verwendung scharfer charakteristischer Funktionen

Wir definieren ferner die radiale Abbildung $\hat{\phi} := 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\psi}_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\hat{\phi}) \subseteq B_1(0)$. Es ist $\phi = \check{\hat{\phi}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit definieren wir die Littlewood-Paley-Projektoren

$$\begin{aligned}
P_{\Delta k} f &= \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}_k \mathcal{F} f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \psi_k * f, && k \in \mathbb{Z},\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
P_0 f &= \mathcal{F}^{-1}\widehat{\phi}\mathcal{F} f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \phi * f, && f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \\
P_k f &= \sum_{j=1}^{k} P_{\Delta j} f + P_0 f, && k \in \mathbb{N}_0,\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) Ist $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und P einer der Operatoren aus $\{P_k, P_{\Delta k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, so ist $Pf \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und Pf sowie alle Ableitungen $\nabla^\alpha Pf, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sind von moderatem Wachstum. Für einen Beweis verweisen wir auf [6], Theorem 2.3.20.

(ii) Es gilt die "Projektionseigenschaft" $P_{\Delta k} = P_{\Delta k}(P_{\Delta(k-1)} + P_{\Delta k} + P_{\Delta(k+1)})$.

(iii) Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

(a) $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_{\Delta k} f$, falls $0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f})$,

(b) $f = P_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta k} f$, beziehungsweise als Operatoridentität

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_{\Delta k} = \mathrm{id}\,.$$

Definition (Littlewood-Paley-Square function)
Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt

$$S(f) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_{\Delta k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

die Littlewood-Paley-Square function. Ferner definieren wir

$$\tilde{S}(f) := \left(|P_0 f|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |P_{\Delta k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Satz (Littlewood-Paley, Version I)
Sei $1 < p < \infty$. Dann sind auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch $\|Sf\|_p$ und $\|\tilde{S}f\|_p$ äquivalente Normen gegeben.

Bemerkung (i) Die Aussage des Satzes gilt nicht für $p = 1$ und $p = \infty$.

(ii) Verschiedene Funktionen ψ und $\tilde{\psi}$ in der Konstruktion von S beziehungsweise $\tilde{S}$ führen zu äquivalenten Normen, setze dazu $\tilde{\psi}_k = \psi_{k-1} + \psi_k + \psi_{k+1}$.

Satz (Littlewood-Paley, Version II)
Sei $1 < p < \infty$ und $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

(i) Ist $\tilde{S}(T) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann existiert ein $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, sodass $T = T_f$ und es gibt eine Konstante $c_{n,p}$, sodass

$$\frac{1}{c_{n,p}} \|\tilde{S}(T)\|_p \leq \|f\|_p \leq c_{n,p} \|\tilde{S}(T)\|_p.$$

(ii) Ist $S(T) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so existiert ein eindeutig bestimmtes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und ein ebenfalls eindeutig bestimmtes Polynom P, sodass $T = T_{f+P}$. Weiter existiert eine Konstante $c_{n,p}$ unabhängig von T, sodass

$$\frac{1}{c_{n,p}} \|S(T)\|_p \leq \|f\|_p \leq c_{n,p} \|S(T)\|_p.$$

Für Beweise dieser beiden Sätze verweisen wir auf [6], Theorem 6.1.2.
Wir definieren uns die Norm

$$|||f|||_{s,p} = \|P_0 f\|_p + \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2ks} |P_{\Delta k} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p .$$

Satz 1
Sei $s \in \mathbb{R}$ und $1 < p < \infty$. Dann

(i) existiert ein $c = c_{n,p,s}$, sodass für alle $f \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$|||f|||_{s,p} \leq c \|f\|_{s,p}.$$

(ii) existiert ein $d = d_{n,p,s}$, sodass gilt: Ist $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $|||f|||_{s,p} < \infty$, so ist $f \in H_p^s(\mathbb{R}^n)$ und es ist

$$\|f\|_{s,p} \leq d |||f|||_{s,p}.$$

Der (immerhin dreiseitige) Beweis dieses Satzes ist zu finden in [7], Theorem 1.3.6.
Die Littlewood-Payley-Zerlegung wird ferner dazu verwendet, um eine weitere, verwandte Skala von Funktionenräumen zu definieren, die noch über einen zusätzlichen (Fein-)Index q verfügen:

Definition (Besov-Raum $B_{p,q}^s$)
Für $s \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ heißt

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{B_{p,q}^s} < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|P_0 f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksq} \|P_{\Delta k} f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{*}$$

und der üblichen Modifikation bei $q = \infty$ der Besov-Raum zu den Indices s, p und q.

Grundlegende Eigenschaften der Besov-Räume $B^s_{p,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

(i) $\mathcal{J}^s \colon B^s_{p,q} \to B^0_{p,q}$ ist ein Isomorphismus, allerdings keine Isometrie.

(ii) $B^0_{p,q}$ wird aufgefasst als abgeschlossener linerarer Teilraum des Raumes $l^q(\mathbb{N}_0, L^p(\mathbb{R}^n))$ der q-summierbaren Folgen mit Werten in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dieser ist nach (i) damit vollständig.

(iii) Für $p, q < \infty$ ist $B^s_{p,q}$ separabel und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter linearer Teilraum.

(iv) Dualität: Seien $p, q < \infty$ und ψ ein stetiges lineares Funktional auf $B^s_{p,q}$. Dann existiert ein $g \in B^{-s}_{p',q'}$ mit $\|\psi\| = \|g\|_{B^{-s}_{p',q'}}$, sodass für alle $h \in B^s_{p,q}$ gilt:

$$\psi[h] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{J}^s h(x) \mathcal{J}^{-s} g(x) \mathrm{d}x.$$

In diesem Sinne ist $\left(B^s_{p,q}\right)' \cong B^{-s}_{p',q'}$.

Beweis. Zu (i) können wir sagen: Wegen (*) reicht der Nachweis von

$$\|\mathcal{J}^s P_0 f\|_p \sim \|\tilde{P}_0 f\|_p \qquad \|\mathcal{J}^s P_{\Delta k} f\|_p \sim 2^{ks} \|\tilde{P}_{\Delta k} f\|_p$$

wobei $\sim$ ein äquivalentes System von Littlewood-Payley-Projektoren (ggf. mit größerem Träger, etwa $\tilde{P}_{\Delta k} = P_{\Delta(k-1)} + P_{\Delta k} + P_{\Delta(k+1)}$) anzeigt, und mit impliziten Konstanten unabhängig von k. Zu beachten ist hierbei $\mathcal{J}^s P_{\Delta k} = P_{\Delta k} \mathcal{J}^s$ (beides sind Fourier-Multiplikatoren). Hierbei reicht der Nachweis einer Ungleichung, sofern die Konstante unabhängig von $s \in [-R, R]$ ist. Es gilt

$$\|\mathcal{J}^s P_{\Delta k} f\|_p = \|(\mathcal{J}^s \psi_k) * f\|_p \overset{\text{Young}}{\leq} \underbrace{\|\mathcal{J}^s \psi_k\|_1}_{\overset{!}{\leq} c_R 2^{ks}} \|\tilde{P}_{\Delta k} f\|_p$$

mit $\psi_k = \psi_k \left(\psi_{k-1} + \psi_k + \psi_{k+1}\right) =: \psi_k \tilde{\psi}_k$. Es gilt außerdem $\|\mathcal{J}^s \psi_k\|_1 \leq c_R \|I^s \psi_k\|_1$, da $1 + |\xi|^2 \lesssim |\xi|^2$. $\mathcal{I}^s \psi_k = 2^{kn} \mathcal{I}^s \psi(2^k \cdot) = 2^{ks} 2^{kn} (\mathcal{I}^s \psi)(2^k \cdot)$, und damit $|\xi|^2 = c_R 2^{ks} \underbrace{\|\mathcal{I}^s \psi_k\|_1}_{\leq 2^s}$.

Zu (iv) gilt etwa: Für einen Banachraum A und $1 \leq q < \infty$ ist $(l^q(A))' \cong l^{q'}(A')$. $\square$

Die Besov-Räume spielen (in dieser Vorlesung jedenfalls) als Datenräume nur in Grenzfällen kritischer Regularität eine Rolle, während man bei Rechnungen von den Normen des öfteren Gebraucht macht.

Satz (Einbettungssatz für Besov-Räume)
Es seien $s \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ 1 < p \leq q < \infty, 1 \leq r, r_1, r_2 \leq \infty, r_1 \leq r_2$. Dann gelten:

(i) $B^{s+\varepsilon}_{p,\infty} \subseteq B^s_{p,1} \subseteq B^s_{p,r_1} \subseteq B^s_{p,r_2} \subseteq B^s_{p,\infty} \subseteq \ldots$ etc.

(ii) $B^s_{p,2} \subseteq H^s_p \subseteq B^s_{p,p}$, falls $p \geq 2$ und $B^s_{p,p} \subseteq H^s_p \subseteq B^s_{p,2}$, falls $p \leq 2$. Insbesondere $H^s = H^s_2 = B^s_{2,2}$.

(iii) $B^s_{p,r} \subseteq C_0$, falls $s > \frac{n}{p}$.

(iv) $B^s_{p,r} \subseteq B^0_{q,r}$, für $s - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{q},\ p \leq q$.

Bemerkung (i) Der Satz zeigt zum einen die Monotonie der Besov-Skala (bei festem s und p) im zweiten Hölder-Exponenten, der hier mit r bezeichnet ist. Zum anderen sehen wir, dass Veränderungen in r durch eine beliebig kleine (positive) Ableitung kontrolliert werden können. Insofern handelt es sich bei r um einen Fein-Index.

(ii) Außerdem wird der Zusammenhang zwischen Besov- und Bessel-Potential-Räumen hergestellt. Durch Veränderung im Fein-Index kann man Besov-Normen durch Sobolev-Normen kontrollieren und umgekehrt, ohne in Regularität (s) oder Integrabilität (p) nachgeben zu müssen.

(iii) Die Teile (iii) und (iv) des Satzes können als Variante des Sobolev'schen Einbettungssatzes aufgefasst werden. Insbesondere werden wir (iii) wegen der strikten Ungleichung für s als einfache Folgerung aus (i), (ii) und dem Einbettungssatz erhalten.

Um den Einbettungssatz zu zeigen, benötigen wir die zwei folgenden Lemmata.

Lemma 1
Ist $a = (a_n)_{n\in I}$ für eine abzählbare Indexmenge I und $\|a\|_p = \left(\sum_{n\in I} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, so gilt für $p \leq q$: $\|a\|_q \leq \|a\|_p$.

Beweis. Klar für $a = 0$. O.E. sei $\|a\|_p = 1$. Dann ist $|a_n| \leq 1\ \forall n \in I \Rightarrow \|a\|_q^q = \sum_{n\in I} |a_n|^q \leq \sum_{n\in I} |a_n|^p \leq 1$. □

Definition
Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Für eine $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$-messbare Funktion f definieren wir die gemischte L^p-Norm durch

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^q \mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemma 2
Ist $q \leq p$, so gilt

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} \leq \|f\|_{L^q_\nu(L^p_\mu)}.$$

Unter der Voraussetzung $q \geq p$ gilt offenbar die umgekehrte Ungleichung.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $q = 1$.

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^1_\nu)} = \left\|\int_Y |f(\cdot,y)| \mathrm{d}\nu(y)\right\|_{L^p_\mu} \overset{\text{Minkowski}}{\leq} \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p_\mu} \mathrm{d}\nu(y) = \|f\|_{L^1_\nu(L^p_\mu)}.$$

Im allgemeinen Fall haben wir

$$\|f\|_{L^p_\mu(L^q_\nu)} = \left\|\left(\int_Y |f(\cdot,y)|^q \mathrm{d}\nu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p_\mu} = \left(\left\|\int_Y |f(\cdot,y)|^q \mathrm{d}\nu(y)\right\|_{L^p_\mu}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \||f|^q\|_{L^{\frac{p}{q}}_\mu(L^1_\nu)} \overset{\text{s.o.}}{\leq} \||f|^q\|_{L^1_\nu\left(L^{\frac{p}{q}}_\mu\right)} = \left\|\|f(\cdot,y)\|^q_{L^p_\mu}\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^1_\nu(y)} = \|f\|_{L^q_\nu(L^p_\mu)}.$$

□

Schreibe $2^n = N$, $Q_0 = P_0$, $Q_k = P_{\Delta k}$ mit dyadischen Indices $N \in 2^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:

$$\|f\|_{B^s_{p,r}} = \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}}} N^{sr} \|Q_N f\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Beweis des Einbettungssatzes. (i) Aufgrund von Lemma 1 ist nur noch die erste Inklusion zu zeigen:

$$\|f\|_{B^s_{p,1}} = \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^s \|Q_N f\|_p = \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon} \underbrace{\left(N^{s+\varepsilon} \|Q_N f\|_p\right)}_{\leq \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \|\ldots\| = \|f\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}}} \lesssim_\varepsilon \|f\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}},$$

da die verbleibende (geometrische) Reihe konvergiert.

(ii) Für $1 < p \leq 2$ gilt

$$\|f\|_{B^s_{p,2}} = \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s} \|Q_N f\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Lemma 2}}{\leq} \left\| \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s} |Q_N f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p = |||f|||_{H^s_p}$$

$$\overset{\text{Lemma 1}}{\leq} \left\| \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{ps} |Q_N f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_p = \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{ps} \|Q_N f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{B^s_{p,p}}.$$

Im Fall $2 \leq p < \infty$ hat man bei den Ungleichungen gerade den umgekehrten Fall. Damit ist (ii) gezeigt.

(iii) Es sei $s > \frac{n}{p}$. Wähle $\varepsilon > 0$, sodass $s - \varepsilon > \frac{n}{p}$. Es folgt

$$B^s_{p,r} \overset{(i)}{\subseteq} B^{s-\varepsilon}_{p,1} \overset{(ii)}{\subseteq} B^{s-\varepsilon}_{p,q} \subseteq H^{s-\varepsilon}_p \subseteq C_0$$

für $q = \min(p, 2)$.

(iv) Wir haben

$$\|f\|_{B^0_{q,r}} = \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} \|\tilde{\psi}_N * \psi_N * f\|_q^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

wobei

$$\|\tilde{\psi}_N * \psi_N * f\|_q \leq \|\tilde{\psi}_N\|_\sigma \|\psi_N * f\|_p$$

mit $\|\tilde{\psi}_N\|_\sigma = N^n \|\tilde{\psi}(N\cdot)\|_\sigma = N^{n\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)} \|\tilde{\psi}\|_\sigma$ und $\frac{1}{q'} = \frac{1}{\sigma'} + \frac{1}{p'}$, damit ist

$$\|\tilde{\psi}_N * \psi_N * f\|_q \lesssim N^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|Q_N f\|_p \Rightarrow \|f\|_{B^0_{q,r}} \lesssim \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2r} \|Q_N f\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

□

Homogene Sobolev- und Besov-Räume

Häufig möchte man sich bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen die Invarianz von Lösungen unter sogennanten Skalentransformationen

$$u \mapsto u_\lambda, u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\beta t), \qquad \alpha, \beta \text{ Parameter}, \ \lambda \in]0, \infty[$$

zu nutze machen. Die bisher dargestellten Normen für Sobolev- und Besov-Räume sind allerdings (wegen der Herausnahme jedwelcher Singularitäten um die kleinen Frequenzen) nicht gut verträglich mit Skalentransformationen, weshalb man sich manchmal auch den homogenen Varianten dieser Räume bedient.

Beispiel
Es sei u eine Lösung der semi-linearen Schödinger-Gleichung $iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u$ mit $u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ dann löst u_λ ebenfalls die semi-lineare Schödinger-Gleichung. Die Wahl von β bestimmt ausschließlich der lineare Teil der Gleichung. Wir gehen mit dem Ansatz $u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^2 t)$ in NLS ein:

$$\begin{aligned}(i\partial_t + \Delta)u_\lambda(x,t) &= \lambda^{\alpha+2}(i\partial_t + \Delta)u_(\lambda x, \lambda^2 t) \\ &= \lambda^{\alpha+2}(|u|^{p-1}u)(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^{\alpha+2-\alpha p}(|u_\lambda|^{p-1}u_\lambda)(x,t)\end{aligned}$$

Löst NLS genau dann, wenn $\alpha = \frac{2}{p-1}$.

Die uns bisher bekannten Normen $\|\cdot\|_{s,p}$, $|||\cdot|||_{s,p}$ und $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$ sind nicht ideal an solche Transformationen angepasst. Das Problem liegt bei den kleinen Frequenzen $|\xi| \leq 1$. Hier erweist es sich als vorteilhaft, die folgenden Halbnormen zu definieren:

Definition

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{H}^s_p} &:= \|\mathcal{I}^s f\|_p, && \mathcal{I}^s = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^s\mathcal{F} = |D_x|^s \\
|||f|||_{\dot{H}^s_p} &:= \left\| \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} (N^s |P_{\Delta N} f|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} &:= \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} N^{sq} \|P_{\Delta N} f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}, && \text{für } q = \infty\text{: } \sup_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} N^s \|P_{\Delta N} f\|_p
\end{aligned}$$

Lemma 3
Für die Halbnormen $|||\cdot|||_{\dot{H}^s_p}$ und $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ sowie $\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$\|f_\lambda\| = \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\| \qquad \text{für } f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

Für $\|\cdot\|_{\dot{H}^s_p}$ auch ohne den Zusatz $\lambda \in 2^{\mathbb{Z}}$.

Beweis. Wir erinnern uns zunächst daran, dass $\psi_N(z) = N^n \psi(Nz)$ woran wir

sehen, dass $\lambda^{-n}\psi_N(\frac{z}{\lambda}) = \left(\frac{N}{\lambda}\right)^n \psi\left(\frac{N}{\lambda}z\right) = \psi_{\frac{N}{\lambda}}(z)$. Und jetzt rechnen wir los

$$\begin{aligned}(P_{\Delta N}f_\lambda)(x) = \psi_N * f_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_N(x-y)f(\lambda y)\mathrm{d}y \\ &= \lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_N(\frac{\lambda x - y}{\lambda})f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_{\frac{N}{\lambda}}(\lambda x - y)f(y)\mathrm{d}y = \psi_{\frac{N}{\lambda}} * f(\lambda x)\end{aligned}$$

Einsetzen in $|||\cdot|||_{\dot{H}^s_p}$ gibt dann

$$\begin{aligned}|||f_\lambda|||_{\dot{H}^s_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{N\in 2^{\mathbb{Z}}}(N^s|P_{\Delta N}f_\lambda|)^2\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{N\in 2^{\mathbb{Z}}}\left(N^s|(P_{\Delta\frac{N}{\lambda}}f)(\lambda x)|\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{M\in 2^{\mathbb{Z}}}(\lambda M)^{2s}|(P_{\Delta M}f)(\lambda x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{s-\frac{n}{p}}|||f|||_{\dot{H}^s_p}\end{aligned}$$

Für $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ verläuft der Beweis analog. □

Nun stellt sich uns allerdings das Problem, dass unsere neuen homogenen Varianten leider nur Halbnormen sind. Aber für diese Unannehmlichkeit gibt es zum Glück ein Standardverfahren, dass uns Abhilfe schafft. Um aus einer Halbnorm $\|\cdot\|_V$ auf einem Vektorraum V eine Norm zu produzieren setze man $N = \{f \in V \mid \|f\|_V = 0\}$ und bilde den Quotienten V/N. Auf V/N ist $\|\cdot\|_V$ dann eine Norm (man identifiziert die Norm einer Äquivalenzklasse mit der eines Vertreters). Man merke die Ähnlichkeit zu der Bildung der L^p-Räume aus den "geschwungenen" $\mathcal{L}^p$-Räumen.
Das selbe Prinzip können wir auch hier anwenden: Dafür überlegen wir zuerst, dass $\|f\| = 0$ genau dann gilt, wenn f ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ ist, hierbei bezeichnet $\|f\|$ eine unserer homogenen Halbnormen. Wir setzen nun

$$\mathcal{Z}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P} = \{[f] \mid f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), g \in [f] \colon \Leftrightarrow g - f \in \mathcal{P}\}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Raum der Polynome auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Definition
Die folgenden Räume heißen die homogenen Sobolev-/Besov-Räume zu den Indizes $s \in \mathbb{R}$, $p \in]1,\infty[$ und $q \in [1,\infty]$

$$\begin{aligned}\dot{H}^s_p &:= \left\{f \in \mathcal{Z}' \mid \|f\|_{\dot{H}^s_p} < \infty\right\} \\ \dot{B}^s_{p,q} &:= \left\{f \in \mathcal{Z}' \mid \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty\right\}.\end{aligned}$$

$\dot{H}^s_p$ wird auch als Riesz-Potential-Raum bezeichnet.

Alternativ kann man auch

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &:= \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid 0 \notin \operatorname{supp}(\hat{f}) \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \nabla_\xi^\alpha \hat{f}(0) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) \mathrm{d}x = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}\end{aligned}$$

definieren. Und tatsächlich kann dann gezeigt werden, dass $\mathcal{Z}'$ der topologische Dualraum von $\mathcal{Z}$ ist. Für $1 \leq p, q < \infty$ ist $\mathcal{Z}$ (genauer: $\mathcal{Z} + \mathcal{P}$) dicht in $\dot{H}_p^s$ bzw. $\dot{B}_{p,q}^s$. Insofern kann man auch $\dot{H}_p^s = \overline{\mathcal{Z}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\dot{H}_p^s}$ und $\dot{B}_{p,q}^s = \overline{\mathcal{Z}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definieren.

Bemerkung
Nun gelten entsprechend

(i) $\mathcal{I}^s \colon \dot{H}_p^s \to L^p$ bzw. $\mathcal{I}^s \colon \dot{B}_{p,q}^s \to \dot{B}_{p,q}^0$ ist ein Isomorphismus.

(ii) $(\dot{H}_p^s)' \cong \dot{H}_{p'}^{-s}$ bzw. $(\dot{B}_{p,q}^s)' \cong \dot{B}_{p',q'}^{-s}$ für $1 \leq p, q < \infty$.

(iii) folgende Einbettungen

(a) Bei $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned}&\dot{B}_{p,q_1}^s \subseteq \dot{B}_{p,q_2}^s && \text{sofern } 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty \\ &\dot{B}_{p,p_*}^s \subseteq \dot{H}_p^s \subseteq \dot{B}_{p,p^*}^s && \text{wobei } 1 < p < \infty \text{ und } p_* = \min(2, p), \\ & && p^* = \max(2, p). \text{ Insbesondere gilt also } \dot{H}^s = \dot{B}_{2,2}^s.\end{aligned}$$

(b) Entsprechend zum Sobolev'schen Einbettungssatz

$$\begin{aligned}&\dot{H}_p^s \subseteq L^q && \text{sofern } s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q},\ 1 < p < q < \infty \\ &\dot{B}_{p_1,q}^s \subseteq \dot{B}_{p_2,q}^s && \text{sofern } s - \frac{n}{p_1} = -\frac{n}{p_2},\ 1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty\end{aligned}$$

Aber Vorsicht: die homogenen Räume sind nicht läger monoton in s. Insbesondere gelten die Einbettungen in (b) tatsächlich nur bei Gleichheit der Sobolev-Zahlen.

Interpolation zwischen Sobolev- und Besov-Räumen

In Verallgemeinerung des Satzes von Riesz-Thorin gilt der folgende Interpolationssatz:

Satz
Es seien $T_i \colon H_{p_i}^{s_i} \to H_{r_i}^{t_i}$ stetige lineare Abbildungen mit $\|T_i\| = M_i$ für $i \in \{0, 1\}$, wobei $s_i, t_i \in \mathbb{R}$, $1 < p_i, r_i < \infty$. Auf $H_{p_0}^{s_0} \cap H_{p_1}^{s_1}$ gelte $T_0 = T_1 =: T$ und für ein $\theta \in]0, 1[$ mögen

$$\begin{aligned}s &= (1-\theta)s_0 + \theta s_1, & t &= (1-\theta)t_0 + \theta t_1 \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, & \frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}\end{aligned}$$

bestehen. Dann erlaubt T eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $\tilde{T}\colon H_p^s \to H_r^t$ mit Operatornorm $\|\tilde{T}\| \leq cM_0^{1-\theta}M_1^\theta$.
Hierbei können die Sobolev-Räume durch die Besov-Räume ersetzt werden, wenn zusätzlich die Bedingungen $s_0 \neq s_1$, $t_0 \neq t_1$ und $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ sowie $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1-\theta}{\tilde{q}_0} + \frac{\theta}{\tilde{q}_1}$ erfüllt sind. Dabei können, aber nur in der Besov-Variante, $p_i, r_i, q_i \in [1, \infty]$ zugelassen werden.
Die Aussage gilt ebenfalls, wenn die Sobolev-/Besov-Räume überall durch ihre jeweiligen homogenen Varianten ersetzt werden. Für einen Beweis dieser Aussagen verweisen wir auf Berg-Löfström, Kapitel 6.4 bzw. Tribel, Kapitel 2.4.

Folgende Verallgemeinerung auf Multilineare Abbildungen (die wir etwas kürzer formulieren) ist insbesondere für das Studium nichlinearer Gleichungen interessant:

Satz
Gilt für eine k-lineare Abbildung M, dass

$$\|M(u_1, \ldots, u_k)\|_{t_i, r_i} \leq M_i \prod_{j=1}^{k} \|u_j\|_{s_{i_j}, p_{i_j}}$$

wobei $i \in \{0, 1\}$, so folgt, dass

$$\|M(u_1, \ldots, u_k)\|_{t,r} \leq cM_0^{1-\theta}M_1^\theta \prod_{j=1}^{k} \|u_j\|_{s_{\theta,j}, p_{\theta,j}}$$

wenn für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt

$$s_{\theta,j} = (1-\theta)s_{0,j} + \theta s_{1,j}, \qquad t = (1-\theta)t_0 + \theta t_1$$
$$\frac{1}{p_{\theta,j}} = \frac{1-\theta}{p_{0,j}} + \frac{\theta}{p_{1,j}} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Wie man bemerkt, findet bei keinem dieser Interpolationssätze ein Skalenwechsel statt (beispielsweise von Sobolev-Räumen zu Besov-Räumen). Solche Ergebnisse kann man allerdings manchmal mit der reellen Interpolationsmethode (also Verallgemeinerungen des Satzes von Marcinkiewicz) erreichen, wie etwa:

Satz
Es seien $T_i\colon H_p^{s_i} \to H_r^{t_i}$ stetige lineare Abbildungen mit Abschätzungen für die Operatornorm $\|T_i\| \leq M_i$. Dann folgt für beliebiges $q \in [1, \infty]$ und feste p, r

$$\|Tf\|_{B_{r,q}^t} \leq cM_0^{1-\theta}M_1^\theta \|f\|_{B_{p,q}^s}$$

Periodische Distributionen

Definition
Eine Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, heißt 2π-periodisch (in jede Koordinatenrichtung), falls für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt $\tau_{2\pi k} f = f$. Der lineare Teilraum aller 2π-periodischen Distributionen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird mit $\mathcal{S}'_\pi(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Bemerkung
Für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\tau_{2\pi k} f[\psi] = f[\tau_{-2\pi k}\psi] = f[\psi(\cdot + 2\pi k)]$$

Satz
$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gehört genau dann zu $\mathcal{S}'_\pi(\mathbb{R}^n)$, wenn eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ von polynomialem Wachstum existiert, so sodass

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\langle k,\cdot\rangle} \qquad \text{(Konvergenz in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn

$$\hat{f} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \delta_k \qquad \text{(Konvergenz in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

Beweis. Zuerst zeigen wir den Zusatz:

$$\begin{aligned}
& f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\langle k,\cdot\rangle} && \text{(Konvergenz in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \\
\Leftrightarrow & f[\psi] = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\psi(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \check{\psi}(k) && \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\
\Leftrightarrow & \hat{f}[\psi] = f[\hat{\psi}] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \psi(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \delta_k[\psi] && \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\
\Leftrightarrow & \hat{f} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \delta_k && \text{(Konvergenz in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))
\end{aligned}$$

Nun ist jede Translation $\tau_{x_0}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig. Daher gilt für $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\langle k,\cdot\rangle}$ und jedes $l \in \mathbb{Z}^n$, dass

$$\tau_{2\pi l} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \underbrace{\tau_{2\pi l} e^{i\langle k,\cdot\rangle}}_{=e^{i\langle k,\cdot\rangle}} = f.$$

Also liegt ein solches f in $\mathcal{S}'_\pi(\mathbb{R}^n)$. Umgekehrt sei $f \in \mathcal{S}'_\pi(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ und jedes $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}[\psi] &= f[\hat{\psi}] = \tau_{2\pi k} f[\hat{\psi}] = f[\tau_{-2\pi k}\hat{\psi}] \\
&= f[(e^{2\pi i\langle k,\cdot\rangle}\psi)^\wedge] = \hat{f}[e^{2\pi i\langle k,\cdot\rangle}\psi] = e^{2\pi i\langle k,\cdot\rangle}\hat{f}[\psi]
\end{aligned}$$

d.h. $\hat{f} = e^{2\pi i\langle k,\cdot\rangle}\hat{f}$ bzw. $\hat{f}[(1 - e^{2\pi i\langle k,\cdot\rangle})\psi] = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nun sein χ_Q eine glatte charakteristische Funktion des Würfels $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$, so dass $1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_{Q-k}$. Dann reicht es zu zeigen, dass $\chi_Q \hat{f} = c_0\delta_0$. Dazu sei zuerst $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(0) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(x) - \psi(0) = \int_0^1 (\psi \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t \quad \text{für } \gamma(t) = tx,\ t \in [0,1] \\
&= \int_0^1 \langle x, \nabla\psi(tx)\rangle \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \qquad \chi_Q(x)\psi(x) &= \sum_{j=1}^n (1 - e^{2\pi i x_j}) \underbrace{\frac{x_j}{1 - e^{2\pi i x_j}} \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t \chi_Q(x)}_{=:\psi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Darauf können wir $\hat{f}$ anwenden und erhalten

$$\hat{f}[\chi_Q \psi] = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}[(1 - e^{2\pi i x_j})\psi_j] = 0.$$

Nun sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}\chi_Q \hat{f}[\psi] &= \chi_Q \hat{f}[\underbrace{\psi - \psi(0)\chi_Q}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), = 0 \text{ in } x=0}] + \chi_Q \hat{f}[\psi(0)\chi_Q] \\ &= \chi_Q \hat{f}[\psi(0)\chi_Q] = \psi(0)\hat{f}[\chi_Q^2]\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Nun kann man Sobolev- und Besov-Räume periodischer Distributionen analog definieren, wir beschränken uns hier auf die Bessel-Potential-Räume:

Definition
Für $s \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ sei

$$H_p^s(\mathbb{T}^n) := \{f \in \mathcal{S}'_\pi(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{s,p} < \infty\}$$

mit der Norm $\|f\|_{s,p} := \|\mathcal{J}_\pi^s f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$, wobei $\mathcal{J}_\pi^s$ der Fourier-Multiplikator mit $(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ ist.

Bemerkung (i) Aufgrund des Satzes von Plancherel gilt insbesondere $\|f\|_{s,2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{2s} |\hat{f}(k)|^2$.

(ii) Der Sobolev'sche Einbettungssatz und die Aussagen des Interpolationssatzes bezüglich der Sobolev-Räume gelten ebenso. Zusätzlich hat man $H_{p_1}^s \subseteq H_{p_2}^s$ für $p_1 \geq p_2$ aufgrund der Kompaktheit von $\mathbb{T}^n$.

(iii) Weiterführende Informationen über Funktionenräume auf $\mathbb{T}^n$ können in Schmeisser/Tribel, *Topics in Fourier Analysis and Function spaces*, Kapitel 3 gefunden werden.

Kapitel 2

Die semilineare Schrödingergleichung auf $\mathbb{R}^n$

Hier betrachten wir (im wesentlichen) das Cauchy-Problem

$$iu_t + \Delta u = \varepsilon |u|^{p-1} u, u(t=0) = u_0 \in X(\mathbb{R}^n), \quad p > 1, \varepsilon \in \{\pm 1\}, \tag{CP}$$

bzw. die entsprechende Integralgleichung

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + c \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^{p-1} u(s) \mathrm{d}s,$$

die wir mit dem Banachschen-Fixpunktsatz behandeln werden. Von hier an wird $e^{it\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}$ den Propagator für die Schrödinger-Gleichung bezeichnen.

2.1 Heuristische Vorbetrachtungen und ein erstes Ergebnis

Frage: Welche der in Kapitel 1.2 vorgestellten Funktionenräume sind als Datenräume geeignet?

(i) Die Erhaltungsgrößen sprechen für L^2 (Masse) und H^1 (führender Term der Energie), vielleicht etwas allgemeiner für die H^s-Skala. Dieses Argument betrifft allerdings in erster Linie nur den Schluss von lokaler auf globale Wohlgestelltheit.

(ii) Wenn wir die Nichtlinearität als Störung des linearen Teils behandeln wollen und Lösungen in $C([0,T], X(\mathbb{R}^n))$ suchen (*persistence property*, gehört bei Evolutionsgleichungen zu den Anforderungen bei Wohlgestelltheit), so sollte

$$e^{it\Delta} \colon X(\mathbb{R}^n) \to X(\mathbb{R}^n)$$

stetig sein. Dies ist auf der L^p-Skala ($1 \le p \le \infty$) (und auf der H^s_p-Skala bei festem s) nur für $p = 2$ der Fall, wie die folgende einfache Überlegung zeigt: Nehmen wir an, für ein $t_0 \neq 0$ und ein $p \neq 2$ gelte

$$\|e^{it_0\Delta} u_0\|_p \le c(t_0) \|u_0\|_p \qquad \forall u_0 \in L^p$$

Dann gilt dies *by duality* ebenso mit $-t_0$ anstelle von t_0, für p' statt p. Also können wir $p > 2$ annehmen. Nun haben wir bereits den time-decay estimate

$$\|e^{it_0\Delta}u_0\|_p \lesssim |t_0|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)}\|u_0\|_{p'} \qquad (p > 2)$$

gezeigt. Damit zusammen ergibt unsere Annahme für alle $u_0 \in L^p \cap L^{p'}$

$$\|u_0\|_p = \|e^{it_0\Delta}e^{-it_0\Delta}u_0\| \leq c(t_0)\|e^{-it_0\Delta}u_0\|_p \leq \tilde{c}(t_0)\|u_0\|_{p'}$$

und damit die stetige Einbettung $L^{p'}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$, was einen Widerspruch bedeutet.

Also sollten wir uns auch bei der lokalen Theorie auf L^2-basierte Räume L^2, H^s, $\dot{H}^s$, $B^s_{2,q}$ und $\dot{B}^s_{2,q}$ als Datenräume beschränken (jedenfalls zunächst).

Bemerkung (i) Dieses einfache Argument geht stets für die Lösungen von $u_t - i\varphi(-i\nabla)u = 0$, wenn φ reell und quadratisch oder höherer Ordnung ist, also insbesondere für die Airy-Gleichung (= linearer Teil von KdV). Für die Wellengleichung geht die time-decay-Abschätzung nur mit einem gewissen Verlust und in höheren ($n \geq 2$) Raumdimensionen. Dann wird die Überlegung etwas komplizierter, führt aber zum selben Ergebnis.

(ii) Das Argument greift nicht für die Transport- oder eindimensionale Wellengleichung.

(iii) Es gibt durchaus fortgeschrittene Theorien jenseits der $B^s_{2,q}/\dot{B}^s_{2,q}$-Skala. Etwa: Gewichtete L^2-basierte Normen, z.B. $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^q \mathrm{d}x)$, oder $\widehat{H}^s_p$ mit Norm $\|f\|_{\widehat{H}^s_p} = \|\langle\xi\rangle\hat{f}\|_{p'}$, oft als $\mathcal{F}L^s_{p'}$ bezeichnet. Dazu sollten aber die Möglichkeiten auf der Standard-Skala zunächst einmal ausgeschöpft sein.

Um für Daten in $H^s(\mathbb{R}^n)$ überhaupt ein erstes Ergebnis zu erhalten, müssen wir die Nichtlinearität in der H^s-Norm abschätzen können. Dazu dient:

Lemma 1 (Sobolev-Multiplication law)
Für $s > \frac{n}{2}$ ist $H^s(\mathbb{R}^n)$ eine Banach-Algebra unter punktweiser Multiplikation, d.h. es gilt die Abschätzung

$$\|fg\|_{s,2} \lesssim \|f\|_{s,2}\|g\|_{s,2}$$

Durch Wahl einer äquivalenten Norm kann man die implizite Konstante zu $c = 1$ machen.

Beweis.

$$\|fg\|^2_{s,2} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{fg}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \qquad \text{mit}$$

$$|\widehat{fg}(\xi)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi_1)\hat{g}(\xi-\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi_1)||\hat{g}(\xi-\xi_1)|\mathrm{d}\xi_1$$

Nun ist $\xi = \xi_1 + \xi - \xi_1$ und daher: $\langle\xi\rangle^s \lesssim \langle\xi_1\rangle^s + \langle\xi-\xi_1\rangle^s$, also:

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^s|\widehat{fg}(\xi)| &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi_1\rangle^s|\hat{f}(\xi_1)||\hat{g}(\xi-\xi_1)|\mathrm{d}\xi_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi_1)|\langle\xi-\xi_1\rangle^s|\hat{g}(\xi-\xi_1)|\mathrm{d}\xi_1 \\ &= c\left(\left((\mathcal{J}^s\tilde{f})\cdot\tilde{g}\right)^\wedge + \left(\tilde{f}\cdot(\mathcal{J}^s\tilde{g})\right)^\wedge\right),\end{aligned}$$

wenn wir $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}|\mathcal{F}f|$ definieren. Damit

$$\|fg\|_{s,2} = \|\mathcal{J}^s(fg)\|_2 \lesssim \|(\mathcal{J}^s\tilde{f}) \cdot \tilde{g}\|_2 + \|\tilde{f} \cdot (\mathcal{J}^s\tilde{g})\|_2.$$

Und dann noch $\|(\mathcal{J}^s\tilde{f}) \cdot \tilde{g}\|_2 \leq \|\mathcal{J}^s\tilde{f}\|_2\|\tilde{g}\|_\infty \lesssim \|\tilde{f}\|_{s,2}\|\tilde{g}\|_{s,2} = \|f\|_{s,2}\|g\|_{s,2}$, wobei im vorletzten Schritt der Sobolev'sche Einbettungssatz benutzt wurde (beachte $s > \frac{n}{2} > 0$) und im letzten, dass $\|f\|_{s,2}$ nur vom Betrag der Fourier-Transformierten von f abhängt. Den zweiten Beitrag schätzt man genauso ab. □

Hiermit können wir unter Beachtung von $\|e^{it\Delta}u_0\|_2 = \|u_0\|_2$ folgendes zeigen:

Lemma 2
Es seien $p > 1$ ganzzahlig und ungerade, $s > \frac{n}{2}$ und $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein $T = T(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$ von (CP).

Beweis. Es sei $B_{R,T}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius R in $C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$. Dann ist $B_{R,T}$, versehen mit der von der Norm $\|u\| := \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{s,2}$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum. R und T werden im Laufe des Beweises gewählt. Wir setzen

$$\Lambda u(t) = e^{it\Delta}u_0 + c\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}N(u(s))\mathrm{d}s$$

und schätzen ab (Konvention: *constants may change from line to line*)

$$\|\Lambda u\| \leq \|u_0\|_{s,2} + c\int_0^t \|N(u(s))\|_{s,2}\mathrm{d}s \leq \|u_0\|_{s,2} + cT\|u\|^p \leq \|u_0\|_{s,2} + cTR^p.$$

Wobei in der vorletzten Ungleichung das Sobolev-Multiplication law benutzt wurde, und danach dass $u \in B_{R,T}$ ist. Für die Differenzabschätzung beachten wir die geometrische Summenformel $a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}$ und die Tatsache, dass die H^s-Norm nicht zwischen u und $\overline{u}$ unterscheidet. Damit erhalten wir

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq cT\|u-v\| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \|u\|^k\|v\|^{p-1-k} \leq cTR^{p-1}\|u-v\|$$

Die letzte Ungleichung gilt, da $u, v \in B_{R,T}$. Jetzt: $\|u_0\|_{s,2} = \frac{R}{2}$, also $R = 2\|u_0\|_{s,2}$ und $cTR^{p-1} = \frac{1}{2}$. Dann ist für $u, v \in B_{R,T}$: $\|\Lambda u\| \leq R$, also $\Lambda u \in B_{R,T}$ und $\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \frac{1}{2}\|u-v\|$. Also ist $\Lambda\colon B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion. Der Banach'sche Fixpunktsatz liefert die Existenz einer Lösung $u \in B_{R,T} \subseteq C([0,T], H^s)$ von (CP), die in $B_{R,T}$ eindeutig ist.
Zur Eindeutigkeit in $C([0,T], H^s)$: Wir nehmen uns zwei Lösungen $u, v \in C([0,T], H^s)$ mit $u(0) = v(0) = u_0$ und setzen $T_* := \inf\{t \in [0,T] \mid u(t) \neq v(t)\}$. Da u und v stetige Funktionen mit Werten in H^s sind, ist T_* wohldefiniert, positiv und es gilt $u(T_*) = v(T_*) =: u_1$. Wiederholung des Arguments führt zum Widerspruch zur Definition von T_*. □

Bemerkung (i) Ist $v_0 \in H^s$ mit $\|v_0\|_{s,2} \leq \|u_0\|_{s,2}$, so gibt es hierzu ebenfalls eine Lösung $v \in B_{R,T}$ mit $v(t=0) = v_0$. Für die Differenz $u - v$ erhalten

wir aus obigen Rechnungen die Abschätzungen

$$\|u-v\| \leq \|u_0-v_0\|_{s,2} + cTR^{p-1}\|u-v\| = \|u_0-v_0\|_{s,2} + \frac{1}{2}\|u-v\|$$

also $\|u-v\| \leq 2\|u_0-v_0\|_{s,2}$. Also ist der Lösungsoperator

$$S\colon H^s \supseteq \overline{B_R(0)} \to C([0,T],H^s)$$

Daten auf Lösungen (mit $R = 2\|u_0\|_2$) und u_0 war gegeben) Lipschitz-stetig. D.h. wir haben die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten, sogar in recht starker Form, nämlich Lipschitz-stetig auf Kugeln im Datenraum. Damit sind alle Anforderungen an lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems erfüllt (LWP).

(ii) Wir haben die Eindeutigkeitsaussage in $C([0,T],H^s)$ und nicht nur in einem kleinen Lösungsraum $X_{S,T} \subsetneq C([0,T],H^s)$, d.h. unser (LWP)-Ergebnis ist unconditional.

(iii) Wir haben $R = 2\|u_0\|_{s,2}$ und $T = \frac{1}{2c}R^{1-p}$ gewählt, also $T \sim \|u_0\|_{s,2}^{1-p}$. D.h. die (durch einmalige Anwendung des Kontraktionsarguments garantierte) Lebensdauer der Lösung (*lifespan*) ist eine monoton fallende Funktion der Norm der Daten. Diese Kontrollierbarkeit der lifespan durch $\|u_0\|_{s,2}$ dient als Ausgangspunkt für eine weitere heuristische Betrachtung:

(iv) Scaling argument und *notion of criticality*. Wir nehmen an, zu $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ gebe es eine Lösung $u \in C([0,T^*],\dot{H}^s(\mathbb{R}^n))$ der semilinearen Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u, u(t=0) = u_0 \tag{NLS}$$

mit endlicher Lebensdauer $T^* < \infty$. (Es gelte z.B. $\lim_{t\to T^*}\|u(t)\|_{\dot{H}^s} = \infty$, oder eine andere Katastrophe möge zur Zeit T^* eintreten.) Wir haben bereits überlegt: Dann ist u_λ, definiert durch $u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda x, \lambda^2 t)$, ebenfalls eine Lösung von (NLS), allerdings mit Anfangswert

$$u_\lambda(x,0) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u_0(\lambda x) =: u_{0,\lambda}(x).$$

Für u_λ ereignet sich die Katastrophe, wenn $\lambda^2 t = T^*$ ist, d.h. die Lebensdauer von u_λ ist $T_\lambda = \frac{T^*}{\lambda^2} \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Andererseits ist (nach früheren Rechnungen)

$$\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{\frac{2}{p-1}+s-\frac{n}{2}}\|u_0\|_{\dot{H}^s} \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{falls } s > \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1} =: s_c \\ \text{const.} & \text{falls } s = s_c \\ 0 & \text{falls } s < s_c \end{cases}$$

Also ist für $s \leq s_c$ nicht mit der Kontrollierbarkeit der Lebensdauer durch die Norm der Daten zu rechnen. s_c heißt die kritische Sobolev-Regularität einer nicht-linearen Wellengleichung, diese wird bestimmt durch das Verhalten der Lösungen bei Skalentransformationen. Wir erwarten

(a) (LWP) mit Kontrolle der lifespan in $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s > s_c$,

(b) (LWP) mit Einschränkungen (ggf. nur für kleine Daten), falls $s = s_c$ ist, und

(c) (IP) (=*ill-posedness*) für $s < s_c$.

Für (NLS) haben wir berechnet $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1}$, d.h. unser $s > \frac{n}{2}$-Ergebnis erlaubt möglicherweise Verbesserungen.

Bemerkung (i) Die scaling-Heuristik kann nur in seltenen Fällen zu einem Beweis der ill-posedness ausgebaut werden, man benötigt dazu ein *blow-up*-result, also den Nachweis, dass in endlicher Zeit tatsächlich eine Katastrophe eintritt.

(ii) Es gibt weitere Obstruktionen für (LWP) außer dem scaling Argument, insofern verwundert es nicht, dass Beispiele für (IP) oberhalb von s_c existieren (z.B. cubic NLS in $H^s(\mathbb{R})$ ist (IP) für $s < 0$ bei $s_c = -\frac{1}{2}$).

(iii) Andererseits ist (mir) ein (WP)-Ergebnis unterhalb der kritischen Sobolev-Regularität s_c nicht bekannt.

2.2 Strichartz-Abschätzungen

Definition
Ein Paar (p, q) von Hölder-Exponenten heißt (Schrödinger-)zulässig (engl. *admissable*), wenn

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$$

gelten.

Satz 1 (Strichartz-Abschätzungen)

(i) Es seien $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann ist für jedes Schrödinger-zulässige Paar

$$u \in L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}, L^2_x(\mathbb{R}^n))$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_2. \tag{2.1}$$

(ii) Es seien (p, q) Schödinger-zulässig, $f \in L^{p'}_t(\mathbb{R}, L^{q'}_x(\mathbb{R}^n))$ und $F(x,t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(x,s)\mathrm{d}s$. Dann ist $F \in L^p_t(\mathbb{R}, L^q_x(\mathbb{R}^n))$ und es gelten

$$\|F\|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(L^{q'}_x)} \tag{2.2}$$

sowie

$$\|\int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} f(\cdot,t)\mathrm{d}t\|_2 \lesssim \|f\|_{L^{p'}_t(L^{q'}_x)} \tag{2.3}$$

In (2.2), (2.3) kann $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges Intervall I mit $0 \in I$ ersetzt werden. Die impliziten Konstanten hängen nur von p,q und n ab.

Bemerkung (i) Strichartz zeigte in [15] den Diagonalfall für $p = q$ nach Vorarbeiten von Stein/Tomas in [16] sowie Segal in [14]. Die Verallgemeinerung auf den Nicht-Diagonalfall $p \neq q$ ist von Ginibre/Velo in [5]. Deren eleganten und einfachen Beweis werden wir unten wiedergeben.

(ii) Für $n = 2$ und $q = \infty$ sind die Aussagen falsch (Montgomery/Smith, 1998).

(iii) Für $n \geq 3$ sind die Endpunkt-Fälle mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ ebenfalls gezeigt worden in [11]. Seither nennt man (p, q) mit $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ auch *admissable*.

(iv) Abschätzung (2.2) ist eine Abschätzung über Lösungen der inhomogenen linearen Gleichung

$$iF_t + \Delta F = if \quad \text{mit } F(x, 0) = 0.$$

Hiervon sind eine Reihe von Verallgemeinerungen bekannt, unter anderem kann auf einer Seite ein admissable pair (p, q) durch ein anderes ersetzt werden (siehe [2], Theorem 2.3.3).

(v) Satz 1 gilt genauso für Lösungen der Gleichung

$$u_t = \langle \nabla_x, A\nabla_x \rangle u(+f),$$

wenn A symmetrisch und invertierbar mit positiv semidefiniten Realteil ist. Für $n = 1$ ebenso für Lösungen des linearen Teils

$$u_t - |D_x|\partial_x u = f$$

der Benjamin-Ono-Gleichung.

Für den Beweis benötigen wir die folgenden Hilfmittel:

(i) Den time-decay-estimate $\|e^{it\Delta}u_0\|_{q'} \lesssim |t|^{-\lambda}\|u_0\|_q$ mit $\lambda = \frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{q'}) = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$ und $1 \leq q \leq 2 \leq q' \leq \infty$,

(ii) die HLS-Ungleichung für die Zeitvariable, also in einer Dimension, d.h.:

$$\||t|^{-\lambda} * g\|_{L_t^\rho} \lesssim \|g\|_{L_t^\sigma}, \quad \text{sofern } \frac{1}{\rho'} = 1 - \lambda + \frac{1}{\sigma'},\ 0 < \lambda < 1$$

(iii) das TT^*-Argument. Dazu zunächst ein Begriff aus der Funktionalanalysis: Sind E, F normierte Räume und $A\colon E \to F$ linear, so heißt $A'\colon F' \to E'$, definiert durch

$$A'\psi[x] := \psi[Ax] \quad \forall x \in E,\ \psi \in F'$$

die zu A duale Abbildung. Für die Operatornormen von A und A' haben wir

$$\begin{aligned}\|A'\| &= \sup_{\substack{\psi \in F' \\ \|\psi\| \leq 1}} \|A'\psi\|_{E'} = \sup_{\substack{\psi \in F' \\ \|\psi\| \leq 1}} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |A'\psi[x]| \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \sup_{\substack{\psi \in F' \\ \|\psi\| \leq 1}} |\psi[Ax]| \overset{1}{=} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|Ax\|_F = \|A\|.\end{aligned}$$

Das bedeutet: A ist stetig genau dann, wenn A' stetig ist. Wenn die Anwendung von $\varphi \in E'$ auf $x \in E$ bzw. von. $\psi \in F'$ auf $y \in F$ sich mit Hilfe von Skalarprodukten darstellen lässt als $\varphi[x] = \langle \varphi, x \rangle$ bzw. $\psi[y] = (\psi, y)$, so nimmt die definierende Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\langle A'\psi, x \rangle = A'\psi[x] = \psi[Ax] = (\psi, Ax).$$

Man schreibt dann oft A^* statt A' und bezeichnet A^* als die adjungierte Abbildung: Hierbei können $\langle , \rangle$ und $(,)$ durchaus verschiedene Skalarprodukte sein.

Lemma 1 (TT^*)
Es seien H ein Hilbert-Raum, B ein Banach-Raum und $T\colon H \to B$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) $T\colon H \to B$ ist stetig (mit Operatornorm $\|T\|$).

(ii) $T^*\colon B' \to H$ ist stetig (mit Operatornorm $\|T^*\| = \|T\|$).

(iii) $TT^*\colon B' \to B$ ist stetig (mit Operatornorm $\|TT^*\| = \|T\|^2$).

Beweis. Nach der Vorbemerkung gilt $\|T^*\| = \|T\|$ und (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Da die Verkettung stetiger Abbildungen stetig und die Operatornorm submultiplikativ ist, folgt (iii) mit "$\leq$" aus (i) und/oder (ii). Nun gelte (iii). Dann ist für $y \in B'$

$$\|T^*y\|_H^2 = \langle T^*y, T^*y \rangle = \langle TT^*y, y \rangle \leq \|TT^*\| \|y\|_{B'}^2$$

und also

$$\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \sup_{\substack{y \in B' \\ \|y\|_{B'} \leq 1}} \|T^*y\|_H^2 \leq \|TT^*\|.$$

□

Anwenden wollen wir dieses Lemma auf den Lösungsoperator der homogenen Gleichung

$$T\colon L^2 \to L_t^p(I, L_x^q), u_0 \mapsto u, \quad u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x).$$

Doch dafür müssen wir uns erst Gedanken darüber machen, was die Dualräume gemischter L^p-Räume sind:

Lemma 2 (Dualräume gemischter L^p-Räume)
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $1 \leq p, q < \infty$. Dann ist

$$\phi\colon L_\mu^{p'}(L_\nu^{q'}) \to (L_\mu^p(L_\nu^q))' \quad \text{definiert durch}$$
$$\phi(g)[f] := \int_{X \times Y} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$$

ein isometrischer Isomorphismus. Hierbei ist

$$L_\mu^p(L_\nu^q) := \left\{ f\colon X \times Y \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist } \mathcal{A} \times \mathcal{C}\text{-messbar}, \ \|f\|_{L_\mu^p(L_\nu^q)} < \infty \right\} \quad \text{mit}$$

$$\|f\|_{L_\mu^p(L_\nu^q)} := \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^q \mathrm{d}\nu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

[1]Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach, sog. Normformel

Nun können wir also die adjungierte Abbildung unseres Lösungsoperators bestimmen

$$T^*\colon L_t^{p'}(I, L_x^{q'}) \to L_x^2 \quad \text{durch}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} T^* f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x &= \langle T^* f, g\rangle_{L^2_{xt}} \overset{!}{=} (f, Tg)_{L^2_t(I,L^2_x)} \\
&= \int_{I\times\mathbb{R}^n} f(x,t)\overline{Tg(x,t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t && T \text{ einsetzen} \\
&= \int_I\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\overline{e^{it\Delta}g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t && (e^{it\Delta})^* = e^{-it\Delta} \\
&= \int_I\int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\Delta}f(x,t)\overline{g(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t && \text{Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_I e^{-it\Delta}f(x,t)\mathrm{d}t\overline{g(x)}\mathrm{d}x \\
&= \langle \int_I e^{-it\Delta}f(\cdot,t)\mathrm{d}t, g\rangle
\end{aligned}$$

und damit können wir ablesen:

$$T^* f(x) = \int_I e^{-it\Delta}f(x,t)\mathrm{d}t$$

und

$$TT^* f(x) = \int_I e^{i(t-s)\Delta}f(x,s)\mathrm{d}s.$$

Jetzt können wir uns dem eigentlichen Beweis von Satz 1 widmen:

Beweis von Satz 1. Wir sehen, dass (2.1) $\Leftrightarrow$ (2.3) *by duality* und außerdem folgen beide aus (2.2), wenn dies auch mit einem beliebigen Intervall I anstelle $[0,t]$ gezeigt wird. Beweisen wir also nun (2.2):

(i) Der Fall $q = 2$, $p = \infty$: Hier haben wir mit $I_t \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$

$$\left\|\int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta}f(s)\mathrm{d}s\right\|_{L_t^\infty(I,L_x^2)} \le \int_I \|e^{i(t-s)\Delta}f(s)\|_{L_x^2}\mathrm{d}s = \|f\|_{L_t^1(I,L_x^2)}$$

(ii) $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$. Die Minkowski-Ungleichung gibt

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta}f(s)\mathrm{d}s\right\|_{L_x^q} &\le \int_I \|e^{i(t-s)\Delta}f(s)\|_{L_x^q}\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{time-decay}}{\lesssim} \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{-\lambda}\chi_I(s)\|f(s)\|_{L_x^{q'}}\mathrm{d}s \\
&= |t|^{-\lambda} * (\chi_I\|f\|_{L_x^{q'}})(t), \qquad \lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right)
\end{aligned}$$

Also bekommen wir mit der HLS-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{I_t} e^{i(t-s)\Delta}f(\cdot,s)\mathrm{d}s\right\|_{L_t^p(I,L_x^q)} &\lesssim \||t|^{-\lambda} * (\chi_I\|f\|_{L_x^{q'}})\|_{L_t^p} \\
&\lesssim \|\chi_I f\|_{L_t^{p'}(L_x^{q'})} = \|f\|_{L_t^{p'}(I,L_x^{q'})}.
\end{aligned}$$

Wobei die Anwendung von HLS erfordert, dass

$$0 < \lambda = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{q} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q} < \frac{1}{2},$$

wie vorausgesetzt, und dass

$$\frac{1}{p'} = 1 - \lambda + \frac{1}{p} \Leftrightarrow \lambda = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{p} \Leftrightarrow \frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q},$$

was ebenfalls vorausgesetzt wurde.

□

Der bilineare Zugang zu Strichartz-Abschätzungen

Der oben dargestellte Standardbeweis der Strichartz-Abschätzungen beruht wesentlich auf den time-decay-estimate, der im periodischen Fall nicht zur Verfügung steht. Hier kann man Teilergebnisse erzielen, indem man auf das einfache Argument

$$\|f\|_{L^4}^2 = \|f^2\|_{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{L^{2k}}^k = \|f^k\|_{L^2}$$

zurückgreift. Für die L^2-Norm rechts kann man sich dann den Satz von Plancherel zunutze machen. Ein erstes Beispiel geht zurück auf Zygmund (1974).

Lemma 3 (Zygmund, Studia Math. 50 (1974))
Sei $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ und $e^{it\partial_x^2}u_0$ die Lösung von $iu_t + \partial_x^2 u = 0$, $u(t=0) = u_0$. Dann gilt

$$\|e^{it\partial_x^2}u_0\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|e^{it\partial_x^2}u_0\|_{L^4_{xt}}^4 &= \|(e^{it\partial_x^2}u_0)^2\|_{L^2_{xt}}^2 = \|\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2\|_{L^2_{\xi t}}^2 \\ &= c\sum_{\xi\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

und wir haben

$$\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2(\xi) = c\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}} e^{-it(\xi_1^2+(\xi-\xi_1)^2)}\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)$$

also

$$|\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2(\xi)|^2 = c\sum_{\xi_1,\eta_1\in\mathbb{Z}} e^{-it(\xi_1^2+(\xi-\xi_1)^2-\eta_1^2-(\xi-\eta_1)^2)}\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)\overline{\hat{u}}_0(\eta_1)\overline{\hat{u}}_0(\xi-\eta_1).$$

Bei Integration über t von $-\pi$ bis π fällt eine Summe auf zwei Summanden zusammen, denn es ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(\xi_1^2+(\xi-\xi_1)^2-\eta_1^2-(\xi-\eta_1)^2)}\mathrm{d}t \neq 0$$

nur dann, wenn $\xi_1^2 + (\xi - \xi_1)^2 = \eta_1^2 + (\xi - \eta_1)^2$, d.h. wenn $\xi_1 = \eta_1$ oder wenn $\xi - \xi_1 = \eta_1$ ist. Also haben wir

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |\mathcal{F}_x(e^{it\partial_x^2}u_0)^2|^2 \mathrm{d}t \\
&= c \cdot \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2 + |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2 \\
&= c \cdot \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2
\end{aligned}$$

Summation über $\xi \in \mathbb{Z}$ liefert

$$\|e^{it\partial_x^2}u_0\|_{L^4_{xt}}^4 = c \cdot \sum_{\xi, \xi_1 \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(\xi - \xi_1)|^2 = c\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}^4.$$

□

Um Lemma 3 auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern zu können, benötigen wir das folgende Ergebnis aus der elementaren Zahlentheorie:

Satz (Hardy-Wright, *Introduction to the theory of numbers*, Theorem 338)
Sei $N \in \mathbb{N}$ und $r(N) := |\{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |\xi|^2 = N\}|$. Dann gilt $r(N) \ll N^\varepsilon$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $c_\varepsilon > 0$, so dass $r(N) \leq c_\varepsilon N^\varepsilon$.

Bemerkung (i) c_ε ist natürlich unabhängig von N.

(ii) Trivial wäre: $r(N) \leq c\sqrt{N}$ (Abstand der Gitterpunkte ≥ 1 und Länge des Kreises $= 2\pi\sqrt{N}$).

(iii) Im Beweis wird die Aussage zurückgeführt auf die entsprechende Abschätzung für die Anzahl $d(N)$ der Teiler einer natürlichen Zahl N. Es gilt $d(N) \ll N^\varepsilon$ (Hardy-Wright, Theorem 315) und $r(N) \leq 4d(N)$.

(iv) Die Abschätzung kann nicht wesentlich verbessert werden, es gilt: Für jedes $\delta \geq 0$ und jedes $c > 0$ wir die Abschätzung $r(N) \leq c\log(1 + N^\delta)$ falsch.

(v) Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $c_\varepsilon > 0$ so dass

$$|\{\xi \in \mathbb{Z}^n \mid |\xi|^2 = N\}| \leq c_\varepsilon N^{\frac{n-2}{2}+\varepsilon}.$$

Letzteres sieht man induktiv ein, indem man schreibt:

$$\{\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbb{Z}^n \mid |\xi|^2 = N\} = \bigcup_{\xi_n \leq N} \{\xi' \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid |\xi'|^2 = N - \xi_n^2\}$$

Für die Anzahl hat man dann nach Induktions-Voraussetzung:

$$\begin{aligned}
|\{\xi \in \mathbb{Z}^n \mid |\xi|^2 = N\}| &\leq \sqrt{N} \cdot |\{\xi' \in \mathbb{Z}^{n-1} \mid |\xi'|^2 = M\}| \quad (M \leq N) \\
&\leq \sqrt{N} \cdot c_\varepsilon N^{\frac{n-3}{2}+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Damit können wir zeigen:

Proposition 1 (Bourgain, 1993)
Es seien $n \geq 2$ und $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $u_0 = P_N u_0$ sowie $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$$

Beweis. Wir schreiben wieder

$$\|u\|^4_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|u^2\|^2_{L^2_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|\mathcal{F}(u^2)\|^2_{L^2_{\xi\tau}(\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z})},$$

wobei $\mathcal{F}$ jetzt die Fourier-Transformation bezüglich der Raum- und Zeitvariablen ist. Mit dem Faltungssatz erhalten wir zunächst

$$\mathcal{F}_x(u^2)(\xi,t) = c\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n} e^{-it(|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2)}\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)$$

und weiter

$$\mathcal{F}(u^2)(\xi,\tau) = c\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n} \delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2}\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1).$$

Das Quadrat des Absolutbetrags hiervon schätzen wir gleich ab mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, wobei wir von $u_0 = P_N u_0 = \mathcal{F}^{-1}\chi_N\mathcal{F}u_0$ und $\delta_{\tau,k} = \delta^2_{\tau,k}$ (Kronecker-Delta!) Gebrauch machen:

$$|\mathcal{F}(u^2)(\xi,\tau)|^2 \leq c^2\Sigma_1(\xi,\tau)\cdot\sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n}\delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2}|\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 \qquad \text{mit}$$

$$\Sigma_1(\xi,\tau) = \sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n}\delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2}\chi_N(\xi_1)\chi_N(\xi-\xi_1)$$

Jetzt sollen die Ergebnisse aus der Zahlentheorie zur Abschätzung von Σ_1 herangezogen werden, was nicht unmittelbar einsichtig ist. Wir schreiben

$$|\xi_1|^2 + |\xi-\xi_1|^2 = 2|\xi_1|^2 - 2\langle\xi,\xi_1\rangle + |\xi|^2 = 2\langle\xi_1-\xi,\xi_1\rangle + |\xi|^2 \quad \text{und}$$

$$\delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2} = \delta_{2\tau,2(|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2)} = \delta_{2\tau-2|\xi|^2,\langle 2(\xi_1-\xi),2\xi_1\rangle}$$

Jetzt führen wir die neue Variable

$$k_1 := 2\xi_1 - \xi \Rightarrow 2(\xi_1-\xi) = k_1 - \xi \text{ und } 2\xi_1 = k_1 + \xi$$

ein, so dass $\langle 2(\xi_1-\xi), 2\xi_1\rangle = \langle k_1-\xi, k_1+\xi\rangle = |k_1|^2 - |\xi|^2$ und $\delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2} = \delta_{2\tau-|\xi|^2,|k_1|^2}$. Betrachten wir noch $\chi_N(\xi_1) = \chi_{2N}(2\xi_1) = \chi_{2N}(k_1+\xi)$ sowie $\chi_N(\xi-\xi_1) = \chi_{2N}(k_1-\xi)$ erhalten wir

$$\Sigma_1(\xi,\tau) \leq \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n}\delta_{2\tau-|\xi|^2,|k_1|^2}\chi_{2N}(k_1+\xi)\chi_{2N}(k_1-\xi).$$

Merken wir an: Wir haben $k_1 = 2\xi_1 - \xi \in \mathbb{Z}^n$. Dass es nicht zu jedem $k_1 \in \mathbb{Z}^n$ ein entsprechendes $\xi_1 \in \mathbb{Z}^n$ gibt, ist kein Fehler, denn indem wir über k_1 anstelle von ξ_1 summieren, vergrößern wir die Summe. Nun haben wir im Summationsgebiet

$$|2k_1| \leq |k_1+\xi| + |k_1-\xi| \leq 4N \Rightarrow |k_1| \leq 2N$$

und also mit $r = 2\tau - |\xi|^2$

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\xi,\tau) &\le \max_{0\le r\le 4N^2} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \delta_{r,|k_1|^2} = \max_{0\le r\le 4N^2} \left|\left\{k_1\in\mathbb{Z}^n \mid |k_1|^2 = r\right\}\right| \\ &\le c_\varepsilon \left(N^2\right)^{\frac{n-2}{2}+\varepsilon} = c_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Zusammenfassung ergibt:

$$|\mathcal{F}(u^2)(\xi,\tau)|^2 \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n} \delta_{\tau,|\xi_1|^2+|\xi-\xi_1|^2} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

Summation über τ:

$$\|\mathcal{F}(u^2)(\xi,\cdot)\|^2_{L^2_\tau(\mathbb{Z})} \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \sum_{\xi_1\in\mathbb{Z}^n} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2$$

und schließlich Summation über $\xi\in\mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned}\|u\|^4_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} &= \|\mathcal{F}(u^2)\|^2_{L^2_{\xi\tau}(\mathbb{Z}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{n-2+\varepsilon} \sum_{\xi,\xi_1\in\mathbb{Z}^n} |\hat{u}_0(\xi_1)\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 \\ &= N^{n-2+\varepsilon}\|\hat{u}_0\|^4_{L^2_\xi(\mathbb{Z}^n)} = N^{n-2+\varepsilon}\|u_0\|^4_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}\end{aligned}$$

Ziehen wir hieraus die vierte Wurzel, ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung (i) Für $n\ge 5$ kann man mit einer bessern Abschätzung für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 5 Quadraten $\varepsilon = 0$ erreichen (Grosswald: *Representations of integers as sums of squares*), mit anderen Argumenten (Bourgain 1993, recht aufwändig) gelingt dies auch für $n = 4$. Für die Anwendungen sind diese Verbesserungen allerdings von recht geringer Bedeutung. Für $n\in\{2,3\}$ wird diese Aussage falsch für $\varepsilon = 0$.

(ii) In einer Raumdimension kann man mit ähnlichen Argumenten zeigen (Bourgain, 1993): Ist $u_0 = P_N u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ und $u(x,t) = e^{it\partial_x^2}u_0$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\varepsilon N^\varepsilon \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})}.$$

Man schreibt dazu $\|u\|^6_{L^6_{xt}} = \|u^3\|^2_{L^2_{xt}}$ und benutzt

$$\left|\left\{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2 \mid 3k_1^2 + k_2^2 = N\right\}\right| \le cd(N) \lesssim N^\varepsilon.$$

Den Beweis dieser Tatsache findet man in Petersson, *Modulfunktionen und quadratische Formen*, Satz 6.2. Auch diese Abschätzung wird für $\varepsilon = 0$ falsch. Offenes Problem ist, ob es eine ähnliche Abschätzung auch für $p\in]4,6[$ gibt.

(iii) Durch dyadische Zerlegung einer Funktion $u_0\in H^s(\mathbb{T}^n)$ erhalten wir als:

Korollar 1 (aus Prop. 1 und (ii) aus der Bemerkung)
Sei $u_0\in H^s(\mathbb{T}^n)$ und $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann hat man die *Strichartz-type-estimates*:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad \|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_s \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} \quad \text{für jedes } s > 0 \\ n \ge 2: &\quad \|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_s \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} \quad \text{für jedes } s > \frac{n-2}{4}\end{aligned}$$

und nach Bem. (i) lässt sich für $n\ge 4$ sogar $s\ge \frac{n-2}{4}$ erreichen.

Beweis. Mit $Q_0 = P_0$ und $Q_N = P_{\Delta N}$ haben wir

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} &\leq \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|Q_N u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \leq_\varepsilon \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^\varepsilon \|Q_N u_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{-\varepsilon} N^s \|Q_N u_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim_\varepsilon \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

für $\varepsilon = \frac{s}{2}$, und genauso für die höherdimensionalen L^4-Abschätzungen. Um Gleichheit für $n \geq 4$ zu erhalten, benutzt man den Satz von Littlewood-Payley:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} &\lesssim \left\| \left(\sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} (Q_N u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|^2_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \left\| \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} (Q_N u)^2 \right\|_{L^2_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \\ &\leq \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|(Q_N u)^2\|_{L^2_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} \|Q_N u\|^2_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \\ &\overset{\text{Prop. 1 und Bem. (i)}}{\lesssim} \sum_{N\in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s} \|(Q_N u)^2\|_{L^2_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|u_0\|^2_{H^s(\mathbb{T}^n)}\end{aligned}$$

□

Bemerkung (iv) Vergleich mit den Strichartz-Abschätzungen im nicht-periodischen Fall: Dort haben wir für

(a) $n = 1$: $\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$

(b) $n = 2$: $\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$

(c) $n = 3$: Die Bedingung für die Strichartz-Abschätzungen lautet $\frac{2}{p} = \frac{n}{2} - \frac{n}{q}$. Mit $n = 3$ und der Wahl $p = 4$ (um vergleichen zu können) ergibt sich $\frac{2}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{q}$, also $q = 3$. Zusammen mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz also:

$$\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{R}^4)} \lesssim \|\mathcal{J}_x^{\frac{1}{4}} u\|_{L^4_t(\mathbb{R}, L^3_x(\mathbb{R}^3))} \lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{1}{4}}}.$$

Das heißt: Auch hier haben wir eine ε-Ableitung Verlust, und zusätzlich den Nachteil, dass die Festlegung des Hölder-Exponenten $q = p = 4$ die Sobolev-Anwendung und den damit verbundenen Ableitungsverlust quasi erzwingt.

(d) $n \geq 4$: Man kann ähnlich argumentieren wie für $n = 3$. Die ε-Ableitung Verlust fällt sogar weg. Die Verschwendung von Ableitungen wegen der Einschränkung auf einen speziellen Hölder-Exponenten fällto umso mehr ins Gewicht.

(v) Ausnutzung der Galileo-Invarianz: Betrachten wir $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\hat{u}_0 = \chi_{B_r(\xi_0)}$, $r \ll |\xi_0| = N$. Dann wird der Ableitungsverlust in (iii) bestimmt von N:

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim N^{\frac{n-2}{4}(+\varepsilon)} \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}$$

während wir für v_0 mit $\hat{v}_0 = \chi_{B_r(0)}$ nur einen Faktor $r^{\frac{n-2}{4}(+\varepsilon)}$ ausgeben müssen. Diesen Mangel kann man ausgleichen, indem man die Invarianz der Schrödinger-Gleichung unter sogenannten Galileo-Transformationen verwendet.

Definition (Galileo-Transformation)
Es sei $u\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $G_{\xi_0}\colon u \mapsto G_{\xi_0}u$, definiert durch

$$G_{\xi_0}u(x,t) := \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)u(x+2t\xi_0,t)$$

eine Galileo-Transformation.

Lemma 4 (Galileo-Invarianz)
Sei $u\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$ eine Lösung der (semi-)linearen Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u = c|u|^{p-1}u, \quad (c \in \mathbb{C},\ p > 1)$$

$\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v = G_{\xi_0}u$. Dann löst v dieselbe Gleichung.

Beweis. Zur Abkürzung schreiben wir manchmal $x' = x + 2t\xi_0$.

$$\begin{aligned} i\partial_t v(x,t) &= (i\partial_t \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2))u(x',t) + \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)iu_t(x',t) \\ &\quad + \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)i\langle \nabla_x u(x',t), 2\xi_0\rangle \\ &= \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)\left[|\xi_0|^2 u(x',t) + iu_t(x',t) + \langle \nabla_x u(x',t), 2i\xi_0\rangle\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x v(x,t) &= (\Delta_x \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2))u(x',t) + \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)\Delta_x u(x',t) \\ &\quad + 2\langle \nabla_x \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2), \nabla_x u(x',t)\rangle \\ &= \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)\left[-|\xi_0|^2 u(x',t) - 2i\langle \nabla_x u(x',t), \xi_0\rangle + \Delta_x u(x',t)\right] \end{aligned}$$

Addition ergibt:

$$\begin{aligned} (i\partial_t + \Delta_x)v(x,t) &= \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)(i\partial_t + \Delta)u(x',t) \\ &\overset{(\text{NLS})}{=} c\cdot \exp(-ix\xi_0 - it|\xi_0|^2)|u(x',t)|^{p-1}u(x',t) = c|v(x,t)|^{p-1}v(x,t). \end{aligned}$$

□

Korollar 2 (aus Prop. 1)
Es seien $B = B_N(\xi_0)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $P_B = \mathcal{F}^{-1}\chi_B\mathcal{F}$ und $u_0 \in L^2_x$ mit $u_0 = P_B u_0$ und $u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \lesssim_\varepsilon N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)} \qquad \text{und} \\ &\|u\|_{L^6_{xt}(\mathbb{T}^2)} \lesssim_\varepsilon N^{\varepsilon}\|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

Beweis. Zuerst stellen wir fest, dass $\|G_{\xi_0}u\|_{L^p_t(L^q_x)} = \|u\|_{L^p_t(L^q_x)}$ und ebenso $\|G_{\xi_0}u_0\|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}$, da weder der Phasenfaktor noch die Verschiebung diese Normen ändern. Dann haben wir für die partielle Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}_x G_{\xi_0}u(\xi,t) = \exp(-it|\xi_0|^2 - 2it\xi\xi_0)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t)$$

und, wenn mit $u_0 = P_B u_0$ auch $u = P_B u$ ist:

$$\begin{aligned} &= \exp(-it|\xi_0|^2 - 2it\xi\xi_0)\chi_B(\xi+\xi_0)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t) \\ &= \exp(-it|\xi_0|^2 - 2it\xi\xi_0)\chi_{B_0}(\xi)\mathcal{F}_x u(\xi+\xi_0,t), \qquad B_0 = B_N(0). \end{aligned}$$

Also haben wir nach Fourier-Rücktransformation

$$G_{\xi_0} P_B u = P_{B_0} G_{\xi_0} u$$

und damit die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}\|P_B u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} &= \|G_{\xi_0} P_B u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} = \|P_{B_0} G_{\xi_0} u\|_{L^4_{xt}(\mathbb{T}^{n+1})} \\ &\overset{\text{Prop. 1}}{\lesssim_\varepsilon} N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon} \|G_{\xi_0} u(t=0)\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)} = N^{\frac{n-2}{4}+\varepsilon} \|u_0\|_{L^2_x(\mathbb{T}^n)}.\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt analog. □

Mit dieser Folgerung kann man dann auch tatsächlich (fast) optimale Ergebnisse erziehlen, dazu muss man allerdings bei den Abschätzungen der Nichtlinearität dyadisch zerlegen, was etwas kompliziert werden kann.
Anwendungen des *bilinear approach* im nicht-periodischen Fall: Hier kann man den $\|f\|_{L^4}^2 = \|f^2\|_{L^2}$-Trick dazu verwenden

(i) Bilineare Verfeinerungen und

(ii) für $n = 1$ Verallgemeinerungen der linearen Strichartz-Abschätzungen

zu zeigen. Beginnen wir mit einer scharfen bilinearen Abschätzung in einer Raumdimension, die einen Gewinn einer halben Ableitung aufweist. Das folgende Lemma ist zurück zu führen auf Ozawa/Tsutsumi (1998).

Lemma 5
Es seien $u_0, v_0 \in L^2_x(\mathbb{R})$ und $u(x,t) = e^{it\partial_x^2} u_0(x)$ sowie $v(x,t) = e^{-it\partial_x^2} v_0(x)$. Dann gilt:

$$\left\| |D_x|^{\frac{1}{2}}(uv) \right\|_{L^2_{xt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0\|_{L^2_x} \|v_0\|_{L^2_x}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ an und berechnen zuerst die partielle Fourier-Transformation $\mathcal{F}_x\left(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right)(\xi,t)$ bezüglich der Ortsvariablen x. Mit dem Faltungssatz erhalten wir

$$\mathcal{F}_x\left(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right)(\xi,t) = \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi_1^2-(\xi-\xi_1)^2)} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\mathrm{d}\xi_1$$

und für das Quadrat des Betrags ein Doppelintegral

$$(*) := \left|\mathcal{F}_x\left(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right)(\xi,t)\right|^2$$

$$= \frac{|\xi|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it(\xi_1^2-(\xi-\xi_1)^2)-\eta_1^2+(\xi-\eta_1)^2)} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\overline{\hat{u}}_0(\eta_1)\overline{\hat{v}}_0(\xi-\eta_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1$$

Für das Argument des exp-Funktion ergibt sich

$$\xi_1^2-(\xi-\xi_1)^2-\eta_1^2+(\xi-\eta_1)^2 = \xi_1^2-\xi^2+2\xi\xi_1-\xi_1^2-\eta_1^2+\xi^2-2\xi\eta_1+\eta_1^2 = 2\xi(\xi_1-\eta_1)$$

was wiederum bedeutet, dass

$$(*) = \frac{|\xi|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it2\xi(\xi_1-\eta_1)} \hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\overline{\hat{u}}_0(\eta_1)\overline{\hat{v}}_0(\xi-\eta_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1$$

Integration nach t liefert

$$\left\|\mathcal{F}_x\left(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right)(\xi,\cdot)\right\|_{L^2_t}^2 = \int_{\mathbb{R}}(*)\mathrm{d}t$$

$$= |\xi|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-it2\xi(\xi_1-\eta_1)}\mathrm{d}t\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\overline{\hat{u}}_0(\eta_1)\overline{\hat{v}}_0(\xi-\eta_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1$$

wobei wir das innere Integral als Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}_t\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)(2\xi(\xi_1-\eta_1)) = \delta_0(2\xi(\xi_1-\eta_1)) = \frac{1}{2|\xi|}\delta_0(\xi_1-\eta_1)$$

auffassen können. Die $|\xi|$-Faktoren heben sich gerade auf,

$$\begin{aligned}\ldots &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\delta_0(\xi_1-\eta_1)\hat{u}_0(\xi_1)\hat{v}_0(\xi-\xi_1)\overline{\hat{u}}_0(\xi_1)\overline{\hat{v}}_0(\xi-\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\eta_1\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{v}_0(\xi-\xi_1)|^2\mathrm{d}\xi_1\end{aligned}$$

Anschließende Integration nach ξ und Plancherel ergeben:

$$\left\||D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right\|_{L^2_{xt}}^2 = \left\|\mathcal{F}_x\left(|D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\right)\right\|_{L^2_{\xi t}}^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{u}_0(\xi_1)|^2|\hat{v}_0(\xi-\xi_1)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi_1 = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2_x}^2\|v_0\|_{L^2_x}^2,$$

und wenn wir hieraus die Wurzel ziehen, folgt die Behauptung. □

Bemerkung (i) Gewinn einer halben Ableitung! (so etwas ist bei den linearen Strichartz-Abschätzungen nicht möglich.)

(ii) Scharf. Es ist eine Gleichung (nicht nur eine Ungleichung), und sogar die Konstante ist exakt bestimmt.

Wir können das Argument zum Beweis von Lemma 5 mit dem Sobolevschen Einbettungssatz und der HLS-Ungleichung verbinden, um eine Verallgemeinerung der Strichartz-Abschätzungen für die Schrödinger-Gleichung in einer Raumdimension zu beweisen, die zuerst Fefferman und Stein gezeigt wurde:

Lemma 6
Es seien $4 < q < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $\hat{u}_0 \in L^{r'}(\mathbb{R})$ und $u = e^{it\partial_x^2}u_0$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^4_t(L^q_x)} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi}.$$

Beweis. Wieder sei $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ angenommen. Wir schreiben

$$\|u\|_{L^4_t(L^q_x)}^2 = \||u|^2\|_{L^2_t(L^{\frac{q}{2}}_x)} \lesssim \||D_x|^\varepsilon|u|^2\|_{L^2_{xt}},$$

letzteres für $\varepsilon - \frac{1}{2} = -\frac{2}{q}$ aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|^4_{L^4_t(L^q_x)} &\lesssim \||D_x|^\varepsilon |u|^2\|^2_{L^2_{xt}} = \ \ldots \text{Rechnung wie zu Lemma 5} \ldots \\
&= c \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{2\varepsilon-1} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 |\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi \\
&= c \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\varepsilon-1} |\hat{u}_0(\xi-\xi_1)|^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi_1 \\
&= c \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi_1)|^2 \left(|\xi|^{2\varepsilon-1} * |R\hat{u}_0|^2\right)(\xi_1) \mathrm{d}\xi_1 \\
&\lesssim \||\hat{u}_0|^2\|_{L^{\frac{r'}{2}}_\xi} \||\xi|^{2\varepsilon-1} * |R\hat{u}_0|^2\|_{L^\rho_\xi}
\end{aligned}$$

aufgrund der Hölderschen Ungleichung, die $1 = \frac{2}{r'} + \frac{1}{\rho}$ erfordert. Für den ersten Faktor haben wir

$$\||\hat{u}_0|^2\|_{L^{\frac{r'}{2}}_\xi} = \|\hat{u}_0\|^2_{L^{r'}_\xi}$$

wie gewünscht. Für den zweiten Faktor verwenden wir die HLS-Ungleichung

$$\||x|^{-\lambda} * f\|_{L^\rho} \lesssim \|f\|_{L^\sigma},$$

deren Voraussetzungen in einer Dimension lauten $0 < \lambda < 1$ und $\frac{1}{\rho'} = (1-\lambda) + \frac{1}{\sigma'}$, hier also mit

$$\lambda = 1 - 2\varepsilon = 1 - 1 + \frac{4}{q} = \frac{4}{q} \in \,]0,1[$$

da $4 < q < \infty$ vorausgesetzt ist, und mit $\sigma = \frac{r'}{2}$ (sowie $f = |R\hat{u}_0|^2$). Die zweite Bedinung lautet

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{r'} = \frac{1}{\rho'} = 2\varepsilon + 1 - \frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{4}{q} + 1 - \frac{2}{r'} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{4}{r'} = 2 - \frac{4}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{r'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},
\end{aligned}$$

wie ebenfalls vorausgesetzt. Also haben wir für den zweiten Faktor

$$\||\xi|^{2\varepsilon-1} * |R\hat{u}_0|^2\|_{L^\rho_\xi} \lesssim \||R\hat{u}_0|^2\|_{L^{\frac{r'}{2}}_\xi} = \|\hat{u}_0\|^2_{L^{r'}_\xi}$$

und damit insgesamt, nach ziehen der vierten Wurzel, wie behauptet:

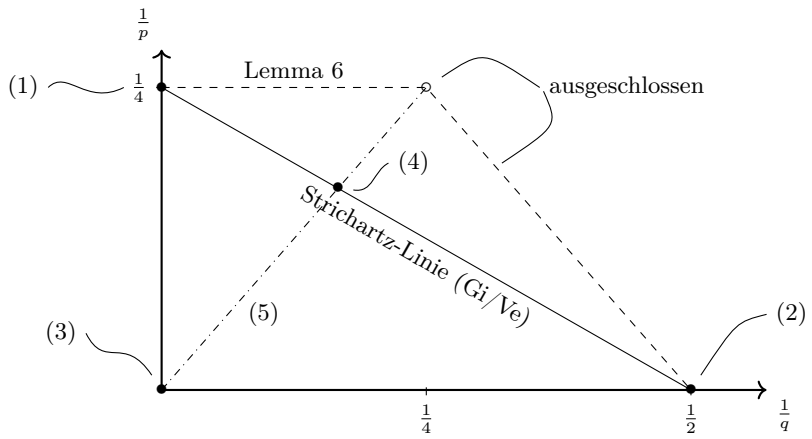
$$\|u\|_{L^4_t(L^q_x)} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi}.$$

□

Inwiefern handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Strichartz-Abschätzungen für die Schrödinger-Gleichung in einer Raumdimension? Diese Frage lässt sich am besten mit Hilfe eines Diagramms beantworten, in dem wir den Geltungsbereich der etwas allgemeineren Abschätzungen

$$\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi} \tag{*}$$

eintragen. Eine scaling-Argument zeigt, dass hierfür die Bedingung $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} + \frac{1}{q}$ notwendig ist. (Die Norm $\|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi}$ verhält sich unter scaling wie $\|u_0\|_{L^r_x}$; im obigen Lemma 6: $p = 4$; in den Strichartz-Abschätzungen für $n = 1$: $r = 2$.) Also können wir die Situation in einem $\frac{1}{p}/\frac{1}{q}$-Diagramm darstellen:



(1) $L_t^4 L_x^\infty$: Endpunkt-Strichartz-Abschätzung, gilt für $n = 1$.

(2) $L_t^\infty L_x^2$: Erhaltung der L_x^2-Norm, sozusagen der andere vielleicht triviale Endpunkt für Strichartz.

Zwischen (1) und (2) ist die Strichartz-Linie, wie von Ginibre/Velo verallgemeinert.

(3) $\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L_{xt}^\infty} \leq \sup_t \|e^{it\xi^2} \hat{u}_0\|_{L_\xi^1} = \|\hat{u}_0\|_{L_\xi^1}$, wenn man hochgreift: Riemann-Lebesgue-Lemma.

(4) Die von Strichartz bewiesene L_{xt}^6-Abschätzung.

(5) Die Diagonale $p = q$: Fefferman und Stein (1970), Restriktionssatz für die Fourier-Transformation.

In der dargestellten Situation kann man nun eine Verallgemeinerung des Interpolationssatzes von Riesz-Thorin auf gemischte L^p-Räume (Bergh-Löfström oder Tribel) verwenden, um zu folgern, dass die Abschätzung (*) in dem gesamten konvexen Bereich gilt, der von

(i) der Lemma 6-Linie einschließlich (1),

(ii) dem Trivialfall (3) und

(iii) der Erhaltung der L^2-Normen (2)

aufgespannt wird.

Korollar (aus Lemma 6)
Es gelte $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} + \frac{1}{q}$. Dann gilt die Abschätzung $\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L_\xi^{r'}}$, sofern eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $0 \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{4}$ und $0 \leq \frac{1}{q} < \frac{1}{4}$ oder

(ii) $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ oder

(iii) $(p, q) = (\infty, 2)$.

Bemerkung
Damit erhalten wir einen Hinweis auf geeignete Datenräume, wenn die Möglichkeiten der H^s-Skala ausgeschöpft sind, zumindest für eine lokale (in t) Theorie: Es sind dies die Räume

$$\widehat{H}^s_r(\mathbb{R}^n) := \left\{ u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|u_0\|_{\widehat{H}^s_r} < \infty \right\}$$

mit $\|u_0\|_{\widehat{H}^s_r} = \|\widehat{\mathcal{J}^s u_0}\|_{L^{r'}_\xi}$. Als $B_{p,k}$ allgemeiner bei Hörmander, als $\widehat{L}^p_s$ bei Christ und Schülern. Beachte: $\|e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi} = \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi}$, der lineare Propagator ist also well-behaved!

Bemerkung
Zu höherdimensionalen Varianten: Das Argument aus dem Beweis vom Lemma kann auch in höheren Raumdimensionen für bilineare Verfeinerungen der Strichartz-Abschätzungen genutzt werden. z.B. gilt in Verschärfung der zweidimensionalen L^4_{xt}-Abschätzung, dass (Bourgain, 1998)

$$\|(|D_x|^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} u_0)(e^{it\Delta} v_0)\|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x} \|\mathcal{J}^s v_0\|_{L^2_x}, \quad s > \frac{1}{2}. \tag{**}$$

Interessant ist das für folgende Frequenzverteilung:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \text{Frequenz von } u_0,\ \xi_2 = \text{diejenige von } v_0, \\ &\xi = \xi_1 + \xi_2 \text{ die des Produkts, } |\xi_1| \gg |\xi_2| \end{aligned}$$

dann kann die halbe Ableitung auf dem *high-frequency-factor* u_0 auf den *low-frequency-factor* v_0 hinübergezogen werden. In Raumdimensionen $n \geq 3$ gilt (**) entsprechend unter der Voraussetzung $s > \frac{n-1}{2}$ (Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka, Tao). Zum Beweis benutzt man die in Kapitel 1 bewiesene Darstellung von $\delta(P)$ und eine dyadische Zerlegung mindestens eines der Faktoren.

2.3 L^2-Theorie

Zur Erinnerung: Wir wollen im folgenden

$$iu_t + \Delta u = \pm |u|^{p-1} u, \quad u(t=0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{NLS}$$

untersuchen, was wir zu

$$u(t) = \Lambda u(t) = e^{it\Delta} u_0 \mp i \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} |u(t')|^{p-1} u(t') \mathrm{d}t'$$

äquivalent erklärt haben. Zur Verfügung haben wir die im letzten Abschnitt (vgl. Satz 1) gezeigten Strichartz Abschätzungen (x-Abhängigkeit in f wurde absichtlich unterdrückt):

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^r_t(L^q_x)} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x} \tag{T}$$

$$\left\| \int_I e^{-it'\Delta} f(t') \mathrm{d}t' \right\|_{L^2_x} \lesssim \|f\|_{L^{r'}_t(L^{q'}_x)} \tag{T^*}$$

$$\left\| \int_I e^{i(t-t')\Delta} f(t') \mathrm{d}t' \right\|_{L^r_t(L^q_x)} \lesssim \|f\|_{L^{r'}_t(L^{q'}_x)} \tag{TT^*}$$

für jedes *Schrödinger-admissable pair* (r,q) für welches

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{r}=\frac{n}{2}-\frac{n}{q}$$

gelten muss. Wir setzen für ein *admissable pair* (r,q), $T>0$ und $R>0$:

$$B_{R,T}:=\left\{f\in L^r_t([-T,T],L^q_x)\mid \|f\|_{L^r_t([-T,T],L^q_x)}\leq R\right\}$$

wobei r,q,T,R noch zu wählen sind. Schauen wir welche Abschätzung wir für unsere Abbildung (später dann hoffentlich Kontraktion) Λ hinbekommen

$$\|\Lambda u\|_{L^r_T(L^q_x)}\leq\underbrace{\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^r_T(L^q_x)}}_{=:I}+\underbrace{\left\|\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^{p-1}u(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L^r_T(L^q_x)}}_{=:II}.$$

Mit (T) sehen wir sofort $I\lesssim\|u_0\|_{L^2_x}$ und nach (TT^*) gilt

$$II\lesssim\||u|^{p-1}u\|_{L^{r'}_t(L^{q'}_x)}=\|u\|^p_{L^{r'p}_T(L^{q'p}_x)}\overset{!}{\lesssim}c_T\|u\|^p_{L^r_T(L^q_x)}.$$

Wir wählen q so dass

$$q'p=q\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}\Leftrightarrow\frac{p+1}{q}=1\Leftrightarrow\boxed{q=p+1}.$$

Wegen der notwendigen Bedinung für *admissable* brauchen wir außerdem

$$\frac{2}{r}=\frac{n}{2}-\frac{n}{p+1}=\frac{n(p-1)}{2(p+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{r}=\frac{n(p-1)}{4(p+1)}\Leftrightarrow\boxed{r=\frac{4(p+1)}{n(p-1)}}.$$

Nun gilt für ein ψ: $\|\psi\|_{L^{r'p}_T}\leq(2T)^\varepsilon\|\psi\|_{L^r_T}$ falls

$$\frac{1}{r'p}=\varepsilon+\frac{1}{r}\Leftrightarrow\varepsilon=\frac{1}{r'p}-\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{1}{rp}-\frac{p}{rp}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{p+1}{r}\right)=\frac{1}{p}\left(1-\frac{n(p-1)}{4}\right)\overset{!}{>}0$$

letzteres genau dann wenn

$$1>\frac{n(p-1)}{4}\Leftrightarrow p-1<\frac{4}{n}\Leftrightarrow 1<p<\frac{4}{n}+1.$$

Erinnerung wir uns an die schon im vorletzten Abschnitt bestimmte kritische Sobolev-Regularität von (NLS): $s_c=\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1}<0\Leftrightarrow p-1<\frac{4}{n}$, so sehen wir, dass wir uns genau im L^2-subkritischen Bereich befinden.
Unter diesen Voraussetzungen haben wir für ein $u\in B_{R,T}$:

$$\|\Lambda u\|_{L^r_T(L^q_x)}\lesssim\|u_0\|_{L^2_x}+cT^\delta R^p\qquad\text{mit}\ \boxed{\delta=\varepsilon p=1-\frac{n(p-1)}{4}}.\qquad(*)$$

Widmen wir uns der Differenzabschätzung die notwendig ist um die Kontraktionseigenschaft für Λ nachzuweisen:

$$\|\Lambda u-\Lambda v\|_{L^r_T(L^q_x)}\overset{(TT^*)}{\lesssim}\||u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\|_{L^{r'}_T(L^{q'}_x)}$$

Es folgt eine punktweise Abschätzung mit dem Mittelwertsatz: $\psi(z) = |z|^{p-1}z$ ist wegen $p > 1$ stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(|z|^2)^{\frac{p-1}{2}}z = \frac{p-1}{2}(|z|^2)^{\frac{p-1}{2}-1}\overline{z}z + (|z|^2)^{\frac{p-1}{2}} = \frac{p+1}{2}|z|^{p-1}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{z}}(|z|^2)^{\frac{p-1}{2}}z = \frac{p-1}{2}|z|^{p-3}z^2.$$

Jedenfalls ist $|D\psi(z)| \lesssim |z|^{p-1}$ und daher liefert der Mittelwertsatz:

$$\big||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\big| \lesssim (|u|^{p-1} + |v|^{p-1})|u-v|$$

und somit für unsere Differenzabschätzung:

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L_T^r(L_x^q)} \lesssim T^\delta \left(\|u\|^{p-1}_{L_T^r(L_x^q)} + \|v\|^{p-1}_{L_T^r(L_x^q)}\right)\|u-v\|_{L_T^r(L_x^q)}$$

d.h. für $u, v \in B_{R,T}$ gilt dann:

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L_T^r(L_x^q)} \leq cT^\delta R^{p-1}\|u-v\|_{L_T^r(L_x^q)} \tag{**}$$

Satz 1
Sei $u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^n)$ und $p \in]1, \frac{4}{n}+1[$ sowie $q = p+1$ und $r = \frac{4(p+1)}{n(p-1)}$. Dann existiert ein $T = T(\|u_0\|_{L_x^2}) > 0$ und eine Lösung $u \in C([-T,T], L_x^2) \cap L_T^r(L_x^q)$ von (NLS) mit $u(t=0) = u_0$. Diese ist eindeutig in $L_T^r(L_x^q)$.

Beweis. Nach obigen Abschätzungen ist für $u, v \in B_{R,T}$:

$$\|\Lambda u\|_{L_T^r(L_x^q)} \lesssim c\|u_0\|_{L_x^2} + cT^\delta R^p, \quad \|\Lambda u - \Lambda v\|_{L_T^r(L_x^q)} \lesssim cT^\delta R^{p-1}\|u-v\|_{L_T^r(L_x^q)}$$

wobei ohne Einschränkung überall die selbe Konstante c steht. Wir wählen $R = 2c\|u_0\|_{L_x^2}$ und T so dass $cT^\delta R^{p-1} = \frac{1}{2}$, d.h. $T = \left(\frac{R^{1-p}}{2c}\right)^{\frac{1}{\delta}}$, und damit ist $\Lambda\colon B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine Lösung $u \in L_T^r(L_x^q)$, die in $B_{R,T}$ eindeutig ist.
Wir zeigen jetzt, dass $u \in C([-T,T], L_x^2)$. Wir wissen ja jetzt bereits, dass

$$u(t) = \underbrace{e^{it\Delta}u_0}_{=:I(t)} \mp i \underbrace{\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^{p-1}u(t')\mathrm{d}t'}_{=:II(t)}$$

wobei $I\colon [-T,T] \to L_x^2$ stetig ist, wenn $u_0 \in L_x^2$, da $(e^{it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe ist. Für $II(t)$ benutzten wir (T^*):

$$\|II(t) - II(t+h)\|_{L_x^2} = \left\|\int_t^{t+h} e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^{p-1}u(t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_x^2} \lesssim |h|^\delta\|u\|_{L_T^r(L_x^q)} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Die Eindeutigkeit bekommen wir mit dem selben Argument wie zuvor. □

Bemerkung (i) Unsere Argumente zeigen in vollem Umfang die bedingte lokale Wohlgestelltheit, wofür uns noch die stetige Abhängigkeit der Lösung

von den Daten fehlt. Ist nämlich $v_0 \in L^2_x$ mit $\|v_0\|_{L^2_x} \leq \|u_0\|_{L^2_x}$ so zeigen unsere Abschätzungen

$$\|u-v\|_{L^r_T(L^q_x)} \overset{(T)}{\leq} c\|u_0-v_0\|_{L^2_x} + \underbrace{cT^\delta R^{p-1}}_{=\frac{1}{2}} \|u-v\|_{L^r_T(L^q_x)}$$

Woraus dann folgt

$$\|u-v\|_{L^r_T(L^q_x)} \leq 2c\|u_0-v_0\|_{L^2_x}.$$

Ferner

$$\|u-v\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \lesssim T^\delta \|u-v\|_{L^r_T(L^q_x)} \leq \underbrace{cT^\delta R^{p-1}}_{=\frac{1}{2}} \|u-v\|_{L^r_T(L^q_x)} \lesssim \|u_0-v_0\|_{L^2_x}.$$

(ii) Für die Lebensdauer haben wir $T = \left(\frac{R^{1-p}}{2c}\right)^{\frac{1}{\delta}} = \tilde{c}\|u_0\|_{L^2_x}^{\frac{1-p}{\delta}}$. Insofern lässt sich die lokale Lösung zu einer globalen Lösung

$$\tilde{u} \in L^\infty_t(L^2_x) \cap C(\mathbb{R}, L^2_x) \cap L^r_{t,loc}(L^q_x)$$

fortsetzten. Wir haben also globale Wohlgestelltheit.

Satz 2 (kritischer Fall)
Es sei $u_0 \in L^2_x(\mathbb{R}^n)$ und $p = \frac{4}{n} + 1$. Dann existiert ein $T = T(u_0) > 0$ und eine Lösung $u \in C([-T,T], L^2_x) \cap L^r_{Tx}$, $r = p+1$ mit $u(t=0) = u_0$ von (NLS). Diese ist eindeutig in L^r_{Tx}.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass (r,q) mit $r = q = p+1$ im kritischen Fall $p = 1 + \frac{4}{n}$, d.h. $r = q = 2 + \frac{4}{n}$, *admissable pair* für die Strichartz-Abschätzungen ist. Insbesondere ist $u_1 \in L^r_{tx}$ (global!) definiert durch $u_1(t) = e^{it\Delta}u_0 \in L^r_{x,t}$. Da $r < \infty$ ist, gilt also: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $T = T(\varepsilon, u_0) > 0$ so dass $\|u_1\|_{L^r_{Tx}} \leq \varepsilon$. Für ein solches T betrachten wir wieder

$$B_{R,T} := \left\{ f \in L^r_{Tx} \mid \|f\|_{L^r_{Tx}} \leq R \right\}.$$

R und ε werden in wenigen Zeilen gewählt. Dann schätzen wir ab:

$$\|\Lambda u\|_{L^r_{Tx}} \leq \varepsilon + c\||u|^{p-1}u\|_{L^{r'}_{Tx}} = \varepsilon + c\|u\|^p_{L^r_{Tx}} \leq \varepsilon + cR^p.$$

Außerdem für

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{L^r_{Tx}} \leq c\||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\|_{L^{r'}_{Tx}} \leq \underbrace{cR^{p-1}}_{\overset{!}{=}\frac{1}{2}} \|u-v\|_{L^{r'}_{Tx}}.$$

Hierbei ist die (am Ende in beiden Abschätzungen identische) Konstante c unabhängig von T. Wähle nun $R = (2c)^{\frac{1}{1-p}}$, $\varepsilon = \frac{R}{2}$, dann folgt dass $\Lambda\colon B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist.
Zur Stetigkeit der so erhaltenen Lösung: Für den Duhamel-Term

$$\|II(t) - II(t+h)\|_{L^2_x} = \left\| \int_t^{t+h} e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^{p-1}u(t')\mathrm{d}t' \right\|_{L^2_x}$$
$$\overset{(T^*)}{\lesssim} \||u|^{p-1}u\|_{L^{r'}_t([t,t+h],L^{r'}_x)} \leq \|u\|^p_{L^r_t([t,t+h],L^r_x)} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

Bemerkung
Die Teilmengen des Datenraums $L^2(\mathbb{R}^n)$, zu deren Elemente es Lösungen gleicher Lebensdauer T gibt, sind im kritischen Fall nicht mehr Kugeln bezüglich der Norm (mit verschiedenen Radien), sondern die Mengen

$$\left\{u_0 \in L^2_x(\mathbb{R}^n) \mid \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^r_{T,x}} \leq R\right\}, \quad R > 0.$$

Auf diesen Mengen kann man jetzt ähnlich wie oben wieder die Lipschitz-Stetigkeit des Lösungsoperators zeigen.

Bisher haben wir den globalen Charakter der Strichartz-Abschätzungen noch nicht ausgenutzt. Dieser kann vewendet werden, um im kritischen Fall globale Wohlgestelltheit bei kleinen Daten zu zeigen, das bedeutet (vorläufige allgemeine Formulierung): Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $u_0 \in X$ mit $\|u_0\|_X \leq \varepsilon_0$ genau eine Lösung $u \in C(\mathbb{R}, X) \cap \ldots$ existiert. Diese hängt stetig von den Daten ab. Der Beweis dieser Aussage für (NLS) mit $p = 1 + \frac{4}{n}$ und Daten in L^2 ist nach dem bisher Besprochenen nicht mehr schwiergig: Anstelle der Kleinheit des Zeitintervalls benutzt man die Kleinheit der Daten, um die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes zu gewährleisten. Dazu aber später mehr. Mit denselben Abschätzungen, die zum Beweis dieser Aussage (also GWP bei kleinen Daten) erforderlich sind, kann man häufig auch Aussagen über das asymptotische Verhalten der globalen Lösungen für $t \to \pm\infty$ zeigen, in der Regel nämlich, dass sie sich annähernd wie Lösungen der homogenen linearen Gleichung verhalten, allerdings mit anderen Daten. Dieses Phänomen nennt man Streuung, es erinnert an die Kometenbewegung oder profaner an Billiard. Also zunächst einige Grundbegriffe der Streutheorie (engl. *scattering theory*):

Grundlagen der Streutheorie

Wir befinden uns in der allgemeinen Situation: Gegeben seien ein Datenraum X und eine globale Lösung

$$u \in C(\mathbb{R}, X) \cap L^\infty_t(X)$$

einer nichtlinearen Wellengleichung

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u) \tag{NLE}$$

mit Anfangswert $u_0 \in X$. $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sei der lineare Propagator.

Definition (Streuzustände)
Wenn der Grenzwert

$$u_+ := \lim_{t\to\infty} U_\varphi(-t)u(t) \quad \text{(Konvergenz in der Norm auf } X\text{)}$$

existiert, so heißt u_+ der Streuzustand (engl. *scattering state*)(von u) bei $+\infty$. Entsprechend heißt

$$u_- := \lim_{t\to-\infty} U_\varphi(-t)u(t) \quad \text{(Konvergenz in der Norm auf } X\text{)}$$

der Streuzustand von u bei $-\infty$.

Bemerkung (i) Üblicherweise ist X ein Hilbertraum (z.B. $X = H^s$ oder $X = \dot{H}^2$) und $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe auf X. Das Konzept macht auch Sinn, wenn X lediglich ein Banach-Raum ist (z.B. $X = B^s_{2,q}$ oder $X = \dot{B}^s_{2,q}$ mit $q \neq 2$) und $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von Isometrien.

(ii) Unter den in (i) genannten Voraussetzungen ist die definierende Eigenschaft der Streuzustände äquivalent zu

$$0 = \lim_{t\to\pm\infty} \|u_\pm - U_\varphi(-t)u(t)\|_X = \lim_{t\to\pm\infty} \|U_\varphi(t)u_\pm - u(t)\|_X,$$

d.h. die Lösung u des nichtlinearen Problems verhält sich asymptotisch (genauer: im Grenzwert $t \to \pm\infty$) wie eine Lösung der homogenen linearen Gleichung mit Anfangswert u_+ bzw. u_-.

(iii) Stationäre (also zeitunabhängige) Lösungen der homogenen linearen Gleichung sind in der Definition der Streuzustände durchaus zugelassen, diese könnten sogar attraktiv sein (d.h. sie könnten Streuzustand für eine Vielzahl von Lösungen u sein). Das ist jedoch nicht das, was man eigentlich unter Streuung versteht.

Man definiert ferner die Mengen $R_\pm$, die aus Daten $u_0 \in X$ bestehen, so dass es eine eindeutige globale Lösung u von (NLE) mit $u(t = 0) = u_0$ gibt und der Streuzustand $u_\pm$ von u bei $\pm\infty$ existiert. Sowie die Operatoren

$$U_\pm \colon X \supseteq R_\pm \to X, u_0 \mapsto U_\pm(u_0) := u_\pm.$$

Definition (Wellenoperatoren und Streuoperator)
Sind die Operatoren $U_\pm$ injektiv, so heißen ihre Inversen

$$W_\pm := U_\pm^{-1} \colon U_\pm(R_\pm) \to R_\pm, u_\pm \mapsto W_\pm(u_\pm) := u_0$$

die Wellenoperatoren (engl. *wave operators*) für die Gleichung (NLE). Schließlich setzt man $\Omega_\pm := U_\pm(R_+ \cap R_-)$ und nennt

$$S \colon \Omega_- \to \Omega_+, u_- \mapsto S(u_-) := U_+(W_-(u_-)) = u_+$$

den Streuoperator (engl. *scattering operator*).

Bemerkung (i) Die Existenz der Wellenoperatoren schließt also einen attraktiven Streuzustand aus.

(ii) Es seien $u_\pm \in X$. Dann ist $u_+ = S(u_-)$ genau dann, wenn ein eindeutig bestimmtes $u_0 \in X$ mit globaler Lösung $u \in C(\mathbb{R}, X) \cap L^\infty_t(\mathbb{R}, X)$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{t\to\pm\infty} U_\varphi(-t)u(t) = u_\pm.$$

Für die semilineare Schrödinger-Gleichung mit L^2-kritischem Exponenten $p = 1 + \frac{4}{n}$ können wir die Existenz des Streuoperators in einer ε-Kugel um den Nullpunkt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Hilfe der Strichartz-Abschätzungen beweisen (engl. *nonlinear small data scattering*). Genauer:

Satz 3
Es seien $n \geq 1$, $p = 1 + \frac{4}{n}$ und $r = p + 1$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $u_0 \in B_{\varepsilon_0}(0) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

(i) Es existiert eine eindeutige Lösung

$$u \in C(\mathbb{R}, L^2_x) \cap L^\infty_t(\mathbb{R}, L^2_x) \cap L^r_{xt}$$

von (NLS) mit $u(t=0) = u_0$. Diese hängt stetig von u_0 ab.

(ii) Für jedes solche u existieren die Streuzustände

$$u_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it\Delta} u(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

und die Abbildungen

$$U_\pm \colon L^2_x \supseteq B_{\varepsilon_0}(0) \to L^2_x$$

sind injektiv.

(iii) Die Wellenoperatoren

$$W_\pm \colon U_\pm(B_{\varepsilon_0}(0)) \to B_{\varepsilon_0}(0)$$

sind stetig und es existieren offene Nullumgebungen $B_\pm := U_\pm(B_{\varepsilon_0}(0))$, so dass der Streuoperator $S \colon B_- \to B_+$, $u_- \mapsto S(u_-) = u_+$ stetig ist.

Beweis. □

An dieser Stelle kann man die Theorie noch etwas verfeinern und entsprechende Ergebnisse für Daten $u_0 \in B^0_{2,q}$, $1 \le q \le \infty$, zeigen. Für $q = \infty$ treten gewisse Probleme auf, z.B. ist die eindeutige Lösung nur noch schwach stetig. (Planchon, 2000, zwei Arbeiten zu NLS/NLW, in beiden Daten in $B^s_{2,q}$ bzw. $\dot{B}^2_{2,q}$, für $s \ge 0$). Aus Zeitgründen müssen wir auf die Diskussion dieser Ergebnisse hier verzichten.
Was jedoch auch im subkritischen Fall unmöglich ist, ist die Verallgemeinerung der WP-Theorie auf Daten in $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s < 0$, obwohl das scaling-argument diese Möglichkeit nahelegt. Tatsächlich hat man für $s < 0$ ill-posedness im C^0_{unif}-Sinn, das bedeutet: Der Lösungsoperator

$$S \colon H^s \supseteq B \to C([0,T], H^s), u_0 \mapsto S(u_0) = u$$

(Daten auf Lösung) ist auf Kugeln $B \subseteq H^s$ nicht gleichmäßig stetig. (Damit ist nicht gesagt, dass ein solcher Lösungsoperator existiert.) Das (relativ) einfache Argument zum Beweis dieser Aussage wurde von Kenig, Ponce und Vega in 2001 entwickelt und soll hier im speziellen Fall $n = 1$ und $p = 3$ (cubic NLS in 1D) erläutert werden: Betrachtet wird also das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ für die Gleichung

$$iu_t + \Delta u + |u|^2 u = 0 \tag{*}$$

Proposition 1
Es sei $s \in]-\frac{1}{2}, 0[$. Wenn der Lösungsoperator

$$S \colon H^s(\mathbb{R}) \supseteq B \to C([-T,T], H^s(\mathbb{R})), u_0 \mapsto S(u_0) = u$$

für das Problem (*) existiert, so ist S nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $T > 0$ vorgegeben. Wir konstruieren ein Folgenpaar $((u_N, v_N))_{N\in\mathbb{N}}$ von Lösungen mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es existiert ein $M > 0$, so dass $\|u_N(0)\|_{s,2} \leq M$ und $\|v_N(0)\|_{s,2} \leq M$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{N\to\infty} \|u_N(0) - v_N(0)\|_{s,2} = 0$ und

(iii) Es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|u_N(T) - v_N(T)\|_{s,2} \geq \varepsilon_0$ für alle $N \geq N_0$.

Dann folgt die Behauptung für $B = B_M(0)$. Durch scaling kann hierbei ein beliebig kleiner, positiver Kugelradius M erzeugt werden. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{2}\,\mathrm{sech}(x) && \Rightarrow f'' = f - f^3 = f - |f|^2 f; \\ f_\omega(x) &:= \omega f(\omega x) && \Rightarrow f''_\omega = \omega^2 f_\omega - f_\omega^3; \end{aligned}$$

$$u_{N,\omega}(x,t) := e^{-it(N^2-\omega^2)} e^{iNx} f_\omega(x - 2tN) \text{ löst cubic NLS.}$$

Das haben wir in den Übungen nachgerechnet, siehe Problem 2 und Aufgabe 6. Der Übergang von der einparametrigen Lösungsschar $(u_{0,\omega})_{\omega>0}$ zu der zweiparametrigen Schar $(u_{N,\omega})_{N,\omega>0}$ ist möglich aufgrund der Galilei-Invarianz der NLS. Insofern kann man sagen, dass das nachfolgende ill-posedness-Argument auf der Galilei-Invarianz beruht. Ähnlich wie die scaling-symmetry die Bedinung $s \geq s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1}$ liefert, führt also die Galilei-Invarianz auf $s \geq 0$ als notwendige Bedinung für LWP.
Wir fixieren zunächst nur den folgenden Zusammenhang zwischen ω und N:

$$\omega := \omega(N) = N^{-2s}.$$

Dann haben wir

$$\mathcal{F}_x u_{N,\omega}(\xi,t) = e^{-it(N^2-\omega^2)} e^{2itN\xi} \underbrace{\hat{f}_\omega(\xi - N)}_{=\hat{f}\left(\frac{\xi-N}{\omega}\right)},$$

d.h. $\mathcal{F}_x u_{N,\omega}(t)$ ist konzentiert in $B_\omega(N)$ und das unabhängig von t. Damit ergibt sich für die H^s-Norm:

$$\begin{aligned} \|u_{N,\omega}(t)\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} \left|\hat{f}\left(\frac{\xi - N}{\omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\sim N^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}\left(\frac{\xi - N}{\omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\xi \quad \eta = \frac{\xi - N}{\omega} \Rightarrow \mathrm{d}\xi = \omega \mathrm{d}\eta \\ &= N^{2s}\omega = 1. \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $u_N = u_{N,\omega}$, $\tilde{N} := N - \frac{N^{-\varepsilon}}{N^{2s}}$ für $0 < \varepsilon \ll |s|$ und $v_N := u_{\tilde{N},\omega}$. Dann gibt es Konstanten $0 < \varepsilon_0 < M$, so dass

$$\varepsilon_0 \leq \|u_N(0)\|_{s,2},\ \|v_N(0)\|_{s,2},\ \|u_N(T)\|_{s,2},\ \|v_N(T)\|_{s,2}, \leq M,$$

insbesondere ist Teil (i) der Behauptung erfüllt. Ferner haben wir, weil

$$\mathrm{supp}(\mathcal{F}_x u_N(T)), \mathrm{supp}(\mathcal{F}_x v_N(T)) \subseteq B_\omega(N) \textit{ essentially}$$

die Gleichung

$$\|u_N(T) - v_N(T)\|_{s,2} = N^s \|u_N(T) - v_N(T)\|_2,$$

und (bis auf Phasenfaktoren) ist $u_N(T) = \exp(\ldots) f_\omega(x - NT) = \exp(\ldots)\omega f(\omega(x - 2NT))$ und $v_N(T) = \exp(\ldots)\omega f(\omega(x - 2\tilde{N}T))$, d.h. $u_N(T)$ und $v_N(T)$ haben für hinreichend großes N auf disjunkten Mengen[2] konzentrierte L^2-Dichten. Daraus folgt

$$\|u_N(T) - v_N(T)\|_2 \geq \frac{1}{2}(\|u_N(T)\|_2 + \|v_N(T)\|_2) \geq \sqrt{\omega}$$

Also haben wir

$$\|u_N(T) - v_N(T)\|_{s,2} \gtrsim N^s \sqrt{\omega} \geq \varepsilon_0.$$

Damit ist (iii) gezeigt. Schließlich haben wir noch

$$\begin{aligned}
\|u_N(0) - v_N(0)\|_{s,2}^2 &\sim N^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}\left(\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}\right) - \hat{f}\left(\frac{\xi - N}{\omega}\right) \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= N^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\frac{\xi - N}{\omega}}^{\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}} \hat{f}'(\eta) \mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq N^{2s} \frac{|\tilde{N} - N|}{\omega} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{\xi - N}{\omega}}^{\frac{\xi - \tilde{N}}{\omega}} |\hat{f}'(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \qquad \left(\begin{array}{c} \frac{\xi - N}{\omega} < \eta < \frac{\xi - \tilde{N}}{\omega} \\ \Leftrightarrow \eta\omega + \tilde{N} < \xi < \eta\omega + N \end{array} \right) \\
&= N^{2s} \frac{|\tilde{N} - N|}{\omega} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(\eta)|^2 \int_{\eta\omega + \tilde{N}}^{\eta\omega + N} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= N^{2s} |N - \tilde{N}|^2 \frac{1}{\omega} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \\
&= cN^{4s} \frac{N^{-2\varepsilon}}{N^{4s}} = cN^{-2\varepsilon} \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

und das ist Teil (ii) der Behauptung. □

Bemerkung (i) Wie im Beweis angesprochen, basiert das Argument auf die Galilei-Invarianz der Gleichung und damit auf der Struktur der Nichtlinearität $N(u) = |u|^2 u$. Betrachtet man andere cubische Nichtlinearitäten, so ist LWP in $H^2(\mathbb{R})$ mit $s < 0$ möglich, und zwar für (siehe [9])

$$\begin{aligned}
N_1(u) = u^3 \text{ sowie } N_2(u) = \overline{u}^3, &\quad s > -\frac{5}{12} \\
N_3(u) = |u|^2 \overline{u} = \overline{u}^2 u, &\quad s > -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

(untere Schranken möglicherweise technisch bedingt. $s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1} = -\frac{1}{2}$.)

(ii) Das Argument ist verallgemeinerbar, sofern man über (halbwegs) explizite und stark konzentrierte Lösungen (wie die sech-solutions) verfügt. Das ist der Fall bei (NLS)

$$iu_t + \Delta u + |u|^{p-1} u = 0$$

[2] nämlich: $B_{\frac{1}{\omega}}(2NT)$ und $B_{\frac{1}{\omega}}(2\tilde{N}T)$

in einer Raumdimension, $p \in]1,5[$ und bei positivem Vorzeichen (focusing case, die Energie ist möglicherweise nicht definiert). Hier hat man also *ill-posedness below* L^2. Im defocusing case stehen solche Lösungen nicht zur Verfügung, man verwendet Näherungslösungen, um zum selben Ergebnis zu gelangen, und das Argument wird deutlich aufwändiger (siehe [3]).

(iii) Relativ leicht ist eine Modifikation (ebenfalls von Kenig, Ponce und Vega) der obigen Rechnug auf eine komplexe Version der mKdV-Gleichung. Dort wird C^0_{unif}-illposedness für complex mKdV in $H^s(\mathbb{R})$ für $s < \frac{1}{4}$ gezeigt. Führt man diese Überlegungen weiter, hat man die selbe Aussage für mKdV selbst. Wird das dann noch mit der Miura-Transformation

$$v \mapsto v_x + \lambda v^2 =: u$$

verknüpft, erhält man C^0_{unif}-illposedness für KdV in $H^s(\mathbb{R})$, sofern $s < -\frac{3}{4}$ ist. (Alles in Kenig, Ponce, Vega, 2001 und [3]).

(iv) Wir finden also bei einer Reihe wichtiger nichtlinearer dispersiver Gleichungen (insbesondere in einer Raumdimension) eine beträchtliche Lücke zwischen der Vorhersage aufgrund der scaling-Heuristik einerseits und dem bestmöglichen Ergebnis, was die gleichmäßig stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten umfasst. In dieser Situation hat man im Prinzip zwei Möglichkeiten für weitere Untersuchungen:

(a) Man geht zu einem schwächeren Begriff von Wohlgestelltheit über und verlangt nur die Stetigkeit oder schwache Stetigkeit des Lösungsoperators. Dieser Weg wurde eingeschlagen von Koch und Tataru (2006, 2010) und von Christ, Colliander und Tao (2006). Bisher erreicht: A priori-Abschätzungen und Existenz von Lösungen in $C([-T,T], H^s(\mathbb{R}))$ bei Daten in $H^s(\mathbb{R})$ mit $s \geq -\frac{1}{4}$ (bei cubic NLS in einer Raumdimension), desgleichen für mKdV ($s > -\frac{1}{8}$), KdV ($s \geq -1$) (Koch et al.). (Aufwändig. Work in progress. Den gesamten Stand der Dinge können wir hier leider nicht darstellen.)

(b) Die zweite Möglichkei besteht darin, die H^s-Skala zu verlassen und andere Datenräume zu betrachten. Die Kenntnis der Fefferman-Stein Abschätzung (für $n = 1$)

$$\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L^q_{xt}} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}}$$

unter der Voraussetzung $\frac{1}{r} = \frac{3}{q}$ und $\frac{1}{q} < \frac{1}{4}$ legt die Vermutung des Datenraums

$$X = \widehat{L^r_x} := \left\{ u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \|u_0\|_{\widehat{L^r_x}} := \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}_\xi} < \infty \right\}$$

nahe.

Bemerkung (i) Diese Räume verhalten sich unter Skalentransformationen wie L^r und damit wie H^s, sofern $s - \frac{1}{2} = -\frac{1}{r}$ ist. Der für cubic NLS interessante Bereich $s \in]-\frac{1}{2}, 0[$ entspricht also auf der $\widehat{L^r}$-Skala dem Intervall $\frac{1}{r} \in]\frac{1}{2}, 1[$. Der kritische Raum wird $\widehat{L^1}$, das sind temperierte Distributionen mit beschränkter Fourier-Transformierter.

(ii) Die Hausdorff-Young Ungleichung

$$\|\hat{f}\|_{L^{r'}} \lesssim \|f\|_{L^r}, \quad \text{für } 1 \leq r \leq 2$$

zeigt: Für $1 \leq r \leq 2$ ist $L^r \subseteq \widehat{L^r}$ mit einer stetigen Einbettung, d.h. in diesem Bereich ist der *hat-space* sogar der größere Raum. Da Hausdorff-Young auch für die inverse Fourier-Transformation gilt, kehrt sich diese Einbettung für $r \in [2, \infty]$ gerade um. Mit Hilfe von (Hausdorff-Young und) Fefferman-Stein können wir zeigen:

Proposition 2
Sei $\frac{4}{3} < r < 2$. Dann ist das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0 \in \widehat{L^r}$ für die cubic NLS

$$iu_t + u_{xx} = \pm |u|^2 u$$

(in einer Raumdimension) lokal wohlgestellt.

Beweis. (zu finden in Cazenave, Vega, Vilela, 2001). Hier eine Skizze: Es seien

$$B_{R,T} := \left\{ u \in C([-T,T], \widehat{L^r}) \cap L^{3r}_{Tx} \mid \|u\| \leq R \right\}$$

mit

$$\|u\| = \sup_{|t| \leq T} \|u(t)\|_{\widehat{L^r}} + \|u\|_{L^{3r}_{Tx}}$$

und

$$\Lambda u(t) = e^{it\partial_x^2} u_0 \mp iG(t), \quad G(t) = \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t') \mathrm{d}t'.$$

Dann hat man

$$\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{\widehat{L^r}} = \|e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0\|_{L^{r'}} = \|\hat{u}_0\|_{L^{r'}} = \|u_0\|_{\widehat{L^r}}$$

sowie

$$\|e^{it\partial_x^2} u_0\|_{L^{3r}_{Tx}} \lesssim \|u_0\|_{\widehat{L^r}}$$

aufgrund der Abschätzung von Fefferman und Stein. Die Nichtlinearität schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
\sup_{|t| \leq T} \|G(t)\|_{\widehat{L^r}} &= \sup_{|t| \leq T} \| \int_0^t e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t') \mathrm{d}t' \|_{\widehat{L^r}} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \int_0^T \| |u(t')|^2 u(t') \|_{\widehat{L^r}} \mathrm{d}t' \\
&\overset{\text{H.Y.}}{\lesssim} \int_0^T \|u^3(t')\|_{L^r} \mathrm{d}t' \lesssim T^{\frac{1}{r'}} \|u\|^3_{L^{3r}_{Tx}}.
\end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
\|G(t)\|_{L^{3r}_{Tx}} &\leq \int_0^T \|e^{i(t-t')\partial_x^2} |u(t')|^2 u(t')\|_{L^{3r}_{Tx}} \mathrm{d}t' \\
&\overset{\text{Fe-St}}{\lesssim} \int_0^T \| |u(t')|^2 u(t') \|_{\widehat{L^r}} \mathrm{d}t' \lesssim T^{\frac{1}{r'}} \|u\|^3_{L^{3r}_{Tx}}
\end{aligned}$$

Ähnlich die Differenzabschätzung. Dann $R = 2c\|u_0\|_{\widehat{L^r}}$, c die größte auftretende Konstante, anschließend T hinreichend klein. Zur Stetigkeit der Lösung: Approximation durch glatte Lösungen oder duale Version von Fefferman-Stein. Für den Rest sind keine neuen Argumente erforderlich. □

Bemerkung (i) Kann auch für $r > 1$ gezeigt werden, erfordert allerdings neue Argumente.

(ii) Die Situation für den kritischen Fall $r = 1$ ist unklar. $\widehat{L^1}$ enthält verschiedene interessante (abgeschlossene) Teilräume, z.B.

(a) endliche/komplexe Maße, z.B. δ_0: starke Formen der ill-posedness (nonexistence oder nonuniqueness für δ_0),

(b) Fourier-Transformierte in $C_0(\mathbb{R})$,

(c) $\supseteq L^1(\mathbb{R})$.

2.4 Die lokale H^s-Theorie, $s > 0$

Wenn wir die bisher entwickelte L^2-Theorie auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s \geq 0$ verallgemeinern wollen mit dem Ziel, größere Exponenten $p \geq 1 + \frac{4}{n}$ zulassen zu können, stoßen wir auf das Problem, Terme der Form

$$\||u|^{p-1}u\|_{s,q'} \text{ oder allgemeiner } \|N(u)\|_{s,q'}$$

bzw. zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft

$$\|N(u) - N(v)\|_{s,q'}$$

abzuschätzen. In der Tat will man für

$$\Lambda u(t) = e^{it\Delta}u_0 \mp i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}N(u(t'))\mathrm{d}t'$$

zeigen, dass $\Lambda\colon B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist, für

$$B_{R,T} := \left\{u \in L^r_T(H^s_q) \mid \|u\|_{L^r_T(H^s_q)} := \|\mathcal{J}^s u\|_{L^r_T(L^q_x)} \leq R\right\},$$

und nach Anwendung der Strichartz-Abschätzungen ((r,q) Schrödinger-admissable) hat man

$$\|\Lambda u\|_{L^r_T(H^s_q)} \lesssim \|u_0\|_{s,2} + \|N(u)\|_{L^{r'}_T(H^s_{q'})}$$

und der zweite Summand lautet ausgeschrieben

$$\|N(u)\|_{L^{r'}_T(H^s_{q'})} = \left(\int_{-T}^{T} \|\mathcal{J}^s N(u)\|^{r'}_{L^{q'}_x}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r'}},$$

so dass man für die innere Norm (bei festem t) genau solche Terme verarbeiten muss, wie oben genannt. Für $s \in \mathbb{N}$ kann man Sobolev-Normen (im engeren Sinne) verwenden, d.h. man hat

$$\|N(u)\|_{s,q'} \sim \sum_{|\alpha|\leq s} \|\nabla^\alpha N(u)\|_{L^{q'}},$$

wobei mit Ketten- und Produktregel

$$\nabla^\alpha N(u) = \sum_{j=0}^{|\alpha|} \sum_{\sum_{i=1}^j |\beta_i| \le |\alpha|} c_{j,\beta_i} N^{(j)}(u) \nabla^{\beta_1} u \cdots \nabla^{\beta_j} u$$

und über jeden dieser Summanden kann man sich dann mit Hölder- und Sobolev-Ungleichungen hermachen. Das kann kompliziert werden, ein wesentliches Problem entsteht aber eigentlich nur dann, wenn die äußere Funktion N nicht hinreichend oft differenzierbar ist. Für $s \notin \mathbb{N}$ benötigt man Ungleichungen, die ein ähnliches Vorgehen erlauben, z.B.

Satz (*generalized chain rule*)
Es sei $n = 1$, $s \in]0, 1[$, $r, r_1, r_2 \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Dann gilt

$$\||D_x|^s N(u)\|_{L^r} \lesssim \|N'(u)\|_{L^{r_1}} \||D_x|^s u\|_{L^{r_2}}.$$

Zu finden ist das in Kenig, Ponce, Vega, 1993, Appendix. Theorem A6.

Bereits für Produkte ist eine entsprechende Ungleichung keineswegs einfach. Soweit uns bekannt, ist das erste derartige Ergebnis das folgende:

Satz (Kato-Ponce commutator estimate (1998))

$$\|\mathcal{J}^s(fg) - f(\mathcal{J}^s g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{J}^{s-1} g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{J}^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Etwas handlicher ist die folgende *generalized* oder *fractional Leibniz rule*:

Theorem 1
Es seien $s > 0$, $1 < r < \infty$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \le \infty$, so dass $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ und $p_2, q_1 < \infty$. Dann gilt

$$\|\mathcal{J}^s(fg)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \|\mathcal{J}^s g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{J}^s f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Eine entsprechende Abschätzung mit $\mathcal{I}^s$ anstelle von $\mathcal{J}^s$ gilt unter den selben Voraussetzungen.

Bemerkung
Abschätzungen dieser Art, insbesondere für gewisse $r < 1$ sind bis heute Gegenstand der Forschung. Siehe etwa [13], oder [8].

Wir wollen im folgenden einen vergleichsweise einfachen Fall von Theorem 1 beweisen, nämlich

(i) die inhomogene Version mit $\mathcal{J}^s$ (nicht mit $\mathcal{I}^s$), und diese

(ii) unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $1 < r, p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$.

Dieser Beweis benötigt im wesentlichen zwei Hilfsmittel, die wir kurz wiederholen möchten:

(i) Den Satz von Littlewood-Paley: Für $1 < p < \infty$ ist

$$\|f\|_p \sim \left\| \left(|P_0 f|^2 + \sum_{K \in 2^{\mathbb{N}}} |P_{\Delta K} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

bzw.

$$\|f\|_{s,p} \sim \left\| \left(|P_0 f|^2 + \sum_{K \in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

als äquivalente Norm auf H^s_p (unter derselben Voraussetzung $1 < p < \infty$). Hierbei:

$$P_{\Delta K} = \psi_K * = c_n \mathcal{F}^{-1} \hat{\psi}_K \mathcal{F} \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{supp}(\hat{\psi}_1) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1 - \varepsilon_0 \leq |\xi| \leq 2\}\,,\ \hat{\psi}_K = \hat{\psi}_1(\frac{\xi}{K}),$$

d.h. $\psi_K(x) = K^n \psi_1(Kx)$, und

$$P_0 = \phi * = c_n \mathcal{F}^{-1} \hat{\phi} \mathcal{F} \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{supp}(\hat{\phi}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 1\}\,,\ \hat{\phi}, \hat{\psi}_1 \text{ radial}, C_c^\infty,$$

sodass $P_0 f + \sum_{K \in 2^{\mathbb{N}}} P_{\Delta K} f = f$ mit Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$;

$$P_K = P_0 + \sum_{L \leq K} P_{\Delta L}, \quad \tilde{P}_{\Delta K} = P_{\Delta \frac{K}{2}} + P_{\Delta K} + P_{\Delta 2K} \ (\Rightarrow P_{\Delta K} = P_{\Delta K} \tilde{P}_{\Delta K})$$

$$P_K =: \phi_K * \text{ mit } \operatorname{supp}(\hat{\phi}_K) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq 2K\}\,, \hat{\phi}_K \in C_c^\infty, \text{ radial.}$$

(ii) Die Hardy-Littlewood-Maximal-Funktion, definiert für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$Mf(x) := \sup_{R>0} \fint_{B_R(x)} |f(y)| \mathrm{d}y = \sup_{R>0} \frac{1}{\Omega_n R^n} \int_{B_R(x)} |f(y)| \mathrm{d}y,$$

dies ist ein beschränkter sublinearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ sofern $1 < p \leq \infty$, d.h. wir haben

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_{L^p}, \text{ falls } 1 < p \leq \infty.$$

(Vorlesung *Harmonic Analysis*, Abschnitt 2.4.2, Satz 3; oder [6], Theorem 2.1.6). Ferner gilt für $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit radial fallender Majorante $\tilde{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$|K| * |f|(x) \leq c \|\tilde{K}\|_{L^1} Mf(x).$$

(ebenda, Satz 4, oder in [6], Korollar 2.1.12)

Damit ausgestattet, kommen wir zum

Beweis der einfachen "generalized Leibniz rule": (i) Vorab stellen wir fest, dass für ein beliebiges $f \in H^s_p$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{s,p} &= \|P_0 f\|_{s,p} + \|(\mathrm{id} - P_0) f\|_{s,p} \ \text{ mit} \\
\|P_0 f\|_{s,p} &\lesssim \|P_1 f\|_p \lesssim \|\phi_1 * f\|_p \leq \|\phi\|_1 \|f\|_p \lesssim \|f\|_p \ \text{ und} \\
\|(\mathrm{id} - P_0) f\|_{s,p} &\lesssim \|(\sum_{K \in 2^{\mathbb{N}_0}} |K^s P_{\Delta K} (\mathrm{id} - P_0) f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \\
&\leq \|(\sum_{K \in 2^{\mathbb{Z}}} |K^s P_{\Delta K} (\mathrm{id} - P_0) f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \\
&\lesssim \|\mathcal{I}^s (\mathrm{id} - P_0) f\|_p \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s_p}
\end{aligned}$$

Oder kurz: $\|f\|_{s,p} \lesssim \|f\|_p + \|\mathcal{I}^s f\|_p$, andere Richtung gilt auch (natürlich für $s > 0$), so dass man sagen kann

$$H^s_p = L^p \cap \dot{H}^s_p,$$

wenn man ignoriert, dass die Objekte in $\dot{H}^s_p$ eigentlich andere sind als die in H^s_p.

(ii) $\|P_0(fg)\|_{s,r} \lesssim \|fg\|_r \leq \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2} \leq \|f\|_{p_1}\|\mathcal{J}^s g\|_{p_2}$ und wir müssen im folgenden nur noch $\|\mathcal{I}^s(fg)\|_r$ abschätzen.

(iii) Zerlegung von fg in ein sogennantes *Paraprodukt*:

$$\begin{aligned} fg = (P_0 f)(P_0 g) + (P_0 f)\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta K} g) + \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta K} f)(P_0 g) \\ + \sum_{K_1,K_2\in 2^{\mathbb{N}}}(P_{\Delta K_1} f)(P_{\Delta K_2} g) =: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \Sigma \end{aligned}$$

wobei wir sofort abschätzen können:

$$\begin{aligned} \|(P_0 f)(P_0 g)\|_{s,r} &= \|P_1((P_0 f)(P_0 g))\|_{s,r} \lesssim \|(P_0 f)(P_0 g)\|_r \\ &\leq \|P_0 f\|_{p_1}\|P_0 g\|_{p_2} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}. \end{aligned}$$

(iv) Abschätzung von II (bzw. III, beachte Symmetrie in f und g): Den Term für $k = 2$ kann man nochmal wie in (iii) abschätzen. Für den Rest hat man

$$\sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}}(P_{\Delta K} f)(P_0 g) = \sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}}\tilde{P}_{\Delta K}(P_{\Delta K} f)(P_0 g)$$

und die H^s_r-Norm hiervon verarbeitet man *by duality*:

$$\begin{aligned} &\|\sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}}\tilde{P}_{\Delta K}(P_{\Delta K} f)(P_0 g)\|_{s,r} \\ \lesssim &\|\mathcal{I}^s \sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}}\tilde{P}_{\Delta K}(P_{\Delta K} f)(P_0 g)\|_r \\ = &\sup_{\substack{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\\ \|h\|_{r'}\leq 1}} |\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathcal{I}^s \sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}}\tilde{P}_{\Delta K}(P_{\Delta K} f)(P_0 g)\mathrm{d}x| \end{aligned}$$

und das Integral kann für ein solches h wiederum abgeschätzt werden

durch

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{I}^s h(x)) \sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}} \tilde{P}_{\Delta K}(P_{\Delta K} f)(P_0 g)\mathrm{d}x| \\
=&|\sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}} \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h)(x)(P_{\Delta K} f)(P_0 g)\mathrm{d}x| \\
=&|\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{K\in 2^{\mathbb{N}}\\ K\geq 4}} (K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h)(x)(K^s P_{\Delta K} f)(P_0 g)\mathrm{d}x| \\
\overset{\text{C.S.}}{\leq}& \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h(x)|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f(x)|^2)^{\frac{1}{2}} |P_0 g(x)|\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Hölder}}{\lesssim}& \|(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{r'} \cdot \|(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{q_1} \|P_0 g\|_{q_2},
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
&\|(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{r'} \lesssim \|\mathcal{I}^s h\|_{\dot{H}^{-s}_{r'}} \lesssim \|h\|_{r'} \leq 1 \\
&\|(\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{q_1} \lesssim \|f\|_{s,q_1} \\
&\|P_0 g\|_{q_2} \lesssim \|g\|_{q_2}.
\end{aligned}
$$

(v) Zerlegung von Σ: Wir schreiben

$$
\Sigma = \sum_{\substack{K_1,K_2\in 2^{\mathbb{N}}\\ K_1\leq \frac{K_2}{4}}} + \sum_{\substack{K_1,K_2\in 2^{\mathbb{N}}\\ K_1\sim K_2}} + \sum_{\substack{K_1,K_2\in 2^{\mathbb{N}}\\ K_2\leq \frac{K_1}{4}}} (P_{\Delta K_1} f)(P_{\Delta K_2} g) =: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3
$$

mit

$$
\Sigma_1 = \sum_{K_2\in 2^{\mathbb{N}}} (P_{\frac{K_2}{4}} f)(P_{\Delta K_2} g) = \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} \tilde{P}_{\Delta K}((P_{\frac{K}{4}} f)(P_{\Delta K} g))
$$

und

$$
\Sigma_2 = \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} P_{4K}((P_{\Delta K} f)(\tilde{P}_{\Delta K} g)).
$$

Gegebenenfalls schätzt man den Beitrag für $K = 2$ gesondert ab. Σ_3 entsteht aus Σ_1 durch Vertauschung von f und g, ist also genauso zu behandeln.

(vi) Abschätzung von Σ_1 *by duality*. Dazu sei $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_{r'} \leq 1$. Dann

haben wir

$$|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathcal{I}^s\Sigma_1(x)\mathrm{d}x| = |\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{I}^s h)(x) \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} \tilde{P}_{\Delta K}((P_{\frac{K}{4}} f)(P_{\Delta K} g))\mathrm{d}x|$$

$$=|\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} \int_{\mathbb{R}^n} (K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h)(x) P_{\frac{K}{4}} f(x) K^s P_{\Delta K} g(x)\mathrm{d}x|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s}\tilde{P}_{\Delta K}\mathcal{I}^s h(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |P_K f(x)| (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K}\mathcal{I}^s g(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\lesssim \|\mathcal{I}^s h\|_{\dot{H}^{-s}_{r'}} \| \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |P_K f(x)|\|_{p_1} \|g\|_{s,p_2}$$

Für den mittleren Term beachten wir $P_K f = \phi_K * f$, $\phi_K(x) = K^n \phi_1(Kx)$, $\phi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ radial, so dass wir ohne Einschränkung ϕ_K als radial fallend annehmen können. Dann ist

$$|P_K f(x)| \lesssim \|\phi_K\|_1 Mf(x) \lesssim Mf(x),$$

unabhängig von K, so dass $\sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |P_K f(x)| \lesssim Mf(x)$ und also

$$\| \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |P_K f(x)|\|_{p_1} \lesssim \|Mf\|_{p_1} \lesssim \|f\|_{p_1}.$$

Zusammenfassen liefert für den Beitrag von Σ_1 die obere Schranke $\|h\|_{r'}\|f\|_{p_1}\|g\|_{s,p_2} \leq \|f\|_{p_1}\|g\|_{s,p_2}$.

(vii) Abschätzung von Σ_2. Dazu beachten wir, dass wir $P_0\Sigma_2$ oben bereits abgeschätzt haben und setzen $Q_K := P_{4K} - P_0$. Für $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|h\|_{r'} \leq 1$ erhalten wir dann

$$|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathcal{I}^s(\mathrm{id} - P_0)\Sigma_2(x)\mathrm{d}x| = |\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^s h(x) \sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} Q_K((P_{\Delta K} f)(\tilde{P}_{\Delta K} g))\mathrm{d}x|$$

$$=|\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} \int_{\mathbb{R}^n} K^{-s} Q_K \mathcal{I}^s h(x) K^s P_{\Delta K} f(x) \tilde{P}_{\Delta K} g(x)\mathrm{d}x|$$

$$\overset{\text{C.S}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s} Q_K \mathcal{I}^s h(x)| (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^s P_{\Delta K} f(x)|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |\tilde{P}_{\Delta K} g(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

Mit Hölder und Littlewood-Paley ist dies wiederum

$$\lesssim \| \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s} Q_K \mathcal{I}^s h(x)|\|_{r'} \|f\|_{s,q_1} \|g\|_{q_2},$$

wobei

$$Q_K \mathcal{I}^s h = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}_K - \hat{\phi}_0)|\xi|^s \mathcal{F}h = (\mathcal{I}^s(\phi_K - \phi_0)) * h$$

sodass wie dies wieder ohne Einschränkung als radial fallend annehmen können. Mit $\|\mathcal{I}^s \phi_K\|_1 \lesssim K^s$ ergibt die Maximal-Funktions-Abschätzung: $\| \sup_{K\in 2^{\mathbb{N}}} |K^{-s} Q_K \mathcal{I}^s h(x)|\|_{r'} \lesssim \|h\|_{r'} \leq 1$ und damit die Behauptung. □

Wenn wir jetzt Strichartz-Abschätzungen einerseits und andererseits *fractional Leibniz* und Sobolev-/Hölder-Ungleichungen miteinander verbinden, können wir das folgende Ergebnis zur LWP erzielen:

Satz 1
Es seien $p > 1$ ungerade, $s \geq s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{p-1}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $r = p + 1$, sowie $\frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \frac{2}{r}$. Dann existiert ein $T = T(u_0) > 0$ und eine Lösung

$$u \in C([-T, T], H^s) \cap L^r_T(H^s_q)$$

von (NLS) mit Exponent p und $u(t = 0) = u_0$. Diese ist eindeutig in $L^r_T(H^s_q)$ und die Abbildung Daten auf Lösungen ist stetig.

Bemerkung (i) Im subkritischen Fall ist $T = T(\|u_0\|_{s,2})$, und der Lösungsoperator ist Lipschitz-stetig auf Kugeln im Datenraum $H^s(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Im kritischen Fall hängt $T = T(u_0)$ in folgender Weise von u_0 ab: Zu $R > 0$ gibt es ein $T > 0$, so dass für alle

$$u_0 \in D_{T,R} := \left\{ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \|e^{it\Delta} u_0\|_{L^r_T(H^s_q)} \leq R \right\}$$

eine Lösung u mit Lebensdauer T existiert. Auf diesen Mengen ist der (jeweilige) Lösungsoperator Lipschitz-stetig.

(iii) Globale Lösungen bei kleinen Daten und nonlinear small data scattering lassen sich in ähnlicher Weise (Auch im subkritischen Fall $s > s_c$, sofern $p \geq 1 + \frac{4}{n}$ ist) zeigen.

Da die Argumente für den subkritischen Fall (bis auf die Verwendung von *generalized Leibniz*) Gegenstand von Problem 9 der Übungen sind, beschränken wir uns hier auf den

Beweis für den kritischen Fall: □

Kapitel 3

Die Fourier-Restriktions-Norm-Methode

Die Fourier-Restriktions-Norm-Methode wurde 1993 von Bourgain entwickelt, ähnliche Ansätze gab es aber ebenso bei Klainerman-Machedon im selben Jahr. Es handelt sich dabei um eine Methode zur Behandlung des allgemeinen Cauchy-Problems $u(t=0) = u_0 \in H^s$ für die Gleichung

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u)$$

mit reeller Phasenfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Lösung des homogenen linearen Gleichung sei wieder mit $U_\varphi(t)u_0$ bezeichnet, als Fourier-Multiplikator

$$U_\varphi(t) = \mathcal{F}_x^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x.$$

$(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine unitäre Gruppe auf jedem H^s-Raum.

3.1 Die Bourgain-Räume $X_{s,b}$

Zunächst definiert man für $s, b \in \mathbb{R}$ den anisotropen Sobolev-Raum $H_{s,b} := \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) \mid \|u\|_{H_{s,b}} < \infty\right\}$ mit Norm

$$\|u\|^2_{H_{s,b}} := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\tau\rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi,\tau)|^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau,$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fourier-Transformation in Raum- und Zeit-Variablen ist. Anisotrop bedeutet: Unterschiedliche Ableitungsordnungen auf verschiedenen Variablen, hier für x einerseits und t andererseits. Für die Behandlung (teilweise) periodischer Probleme — $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^{n-\ell})$ — muss $H_{s,b}$ etwas modifiziert werden. Man setzt:

$$H_{s,b} = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) \mid \forall k \in \underbrace{\{(0,\dots,0)\}}_{\ell\text{-mal}} \times \mathbb{Z}^{n-\ell} \times \{0\} : \tau_{2\pi k} u = u,\ \|u\|_{H_{s,b}} < \infty \right\}$$

mit

$$\|u\|^2_{H_{s,b}} = \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-\ell}} \langle(\xi,k)\rangle^{2s} \langle\tau\rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi,k,\tau)| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.$$

Definition
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Phasenfunktion und $(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ die zugehörige unitäre Gruppe. Dann heißt

$$X_{s,b} = X_{s,b}(\varphi) := \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) \mid \|u\|_{X_{s,b}} := \|U_\varphi(-\cdot)u\|_{H_{s,b}} < \infty\right\}$$

der Bourgain-Raum oder $X_{s,b}$-Raum zur Phasenfunktion φ und den Sobolev-Exponenten $s, b \in \mathbb{R}$.

Bemerkung (i) Explizite Darstellung der Norm: Wir haben

$$\mathcal{F}_x U_\varphi(-t)u(\cdot,t)(\xi) = e^{it\varphi(\xi)}\mathcal{F}_x u(\xi,t).$$

Anschließende Fourier-Transformation in der Zeit ergibt

$$\mathcal{F}U_\varphi(-\cdot)u(\xi,\tau) = \mathcal{F}u(\xi,\tau+\varphi(\xi)).$$

Einsetzen in die Definition der $H_{s,b}$-Norm ergibt

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{X_{s,b}} &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b}|\mathcal{F}u(\xi,\tau+\varphi(\xi))|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau-\varphi(\xi)\rangle^{2b}|\mathcal{F}u(\xi,\tau)|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

(ii) Modifiktaion für (partiell) periodische Probleme: Hier verlangt man für $u \in X_{s,b}$, dass $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ liegt und in den Variablen (z.B.) $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ periodisch ist (wie oben für $H_{s,b}$). Die Norm nimmt dann die etwas veränderte Gestalt

$$\|u\|^2_{X_{s,b}} = \int_{R^{\ell+1}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^{n-\ell}} \langle(\xi,k)\rangle^{2s}\langle\tau-\varphi(\xi,k)\rangle^{2b}|\mathcal{F}u(\xi,k,\tau)|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

an. (Kann man auch als Integral nach einem Produkt aus Zähl- und Lebesgue-Maß wieder etwas einfacher schreiben.)

(iii) Eine Interpretation des gemischten Gewichts $\langle\tau-\varphi(\xi)\rangle^b$: Betrachten wir die Fourier-Transformation einer Lösung $u(x,t) = U_\varphi(t)u_0(x)$ der homogenen linearen Gleichung (sog. *freie Lösung*). Hierfür ist

$$\mathcal{F}_x u(\xi,t) = e^{-it\varphi(\xi)}\hat{u}_0(\xi)$$

und also

$$\mathcal{F}u(\xi,\tau) = (\mathcal{F}_t e^{-it\varphi(\xi)}\hat{u}_0(\xi))(\tau) = \delta_0(\tau-\varphi(\xi))\hat{u}_0(\xi)$$

d.h. Die Fourier-Transformierte dieser Lösung hat ihren Träger im Graphen $G_\varphi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Phasenfunktion φ, das ist eine n-dimensionale Fläche (oft: C^∞-Untermannigfaltigkeit) im $\mathbb{R}^n$. Im Fall der Wellengleichung (im engeren Sinn, d.h. $\varphi(\xi) = |\xi|$ bzw. $\varphi(\xi) = -|\xi|$) ist eine Interpretation des Fourier-Multiplikators $\mathcal{F}^{-1}(\tau-|\xi|)\mathcal{F}$ als Richtungsableitung, genauer: als Normalenableitung an diese Fläche möglich. Betrachten wir dazu $\varphi(\xi) = |\xi|$, so dass $\operatorname{supp}(\mathcal{F}u) \subseteq \left\{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \tau = |\xi|\right\} =: C_+$, dem sog.

Vorwärtslichtkegel. Auf C_+ sei ein Punkt (ξ_0, τ_0) fixiert, und C_+ sei aufgefasst als Nullstellengebilde von $\psi(\xi,\tau) = |\xi| - \tau$. Dann ist die Normale an C_+ (bis auf Vorzeichen und außerhalb des Nullpunkts) gegeben durch

$$\nu(\xi,\tau) = \frac{\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)}{|\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)|},$$

wobei $\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau) = (\nabla_\xi\varphi(\xi), -1) = (\frac{\xi}{|\xi|}, -1)$ mit $|\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)|^2 = 2$. Also ist ν unabhängig von τ und zwar

$$\nu(\xi,\tau) = \nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\xi}{|\xi|}, -1),$$

das ist tatsächlich der äußere Einheitsnormalenvektor an C_+. Die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)}$ in der physikalischen Raum-Zeit ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)} = \nu(\xi_0)\cdot\nabla_{xt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\nabla_x - \partial_t).$$

Ist dann $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, so ist

$$\mathcal{F}\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)}f(\xi,\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\frac{\xi_0\xi}{|\xi_0|} - \tau)\hat{f}(\xi,\tau)$$

und in $(\xi,\tau) = (\xi_0,\tau_0)$ ergibt sich tatsächlich der Multiplikator $\frac{i}{\sqrt{2}}(|\xi_0| - \tau_0)$. Für andere Phasenfunktionen trifft diese Anschauung wegen der unterschiedlichen Ableitungsordnungen jedoch nicht zu.

(iv) Isomorphismen: Offenbar ist der Bessel-Potential-Operator $\mathcal{J}^\sigma\colon X_{s,b} \to X_{s-\sigma,b}$ ein isometrischer Isomorphismus. Definiert man ferner

$$\Lambda^\beta := \mathcal{F}^{-1}\langle\tau - \varphi(\xi)\rangle^\beta\mathcal{F}\colon X_{s,b} \to X_{s,b-\beta},$$

so ist dies ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere haben wir $X_{s,b} \cong L^2_{xt}$ (via $\mathcal{J}^s\Lambda^b$), und damit handelt es sich bei $X_{s,b}$ um einen separablen Hilbert-Raum. Als Hilbert-Raum ist $X_{s,b}$ in natürlicher Weise sein eigener Dualraum. Andererseits ist man für Normabschätzungen am Dualraum bezüglich des L^2_{xt}-Skalarprodukts interessiert. Hier gilt $X_{-s,-b} \cong X'_{s,b}$ im folgenden Sinn: Durch

$$\phi\colon X_{-s,-b} \to X'_{s,b}, v \mapsto \phi(v)$$

definiert durch

$$\phi(v)[u] := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\mathcal{J}^s\Lambda^b v)(\mathcal{J}^{-s}\Lambda^{-b}u)\mathrm{d}\lambda^{n+1}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus gegeben. Dies erlaubt für hinreichend glatte Funktionen (abhängig von s,b) die Abschätzung

$$\|u\|_{X_{s,b}} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})\\ \|v\|_{X_{-s,-b}}\le 1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} vu\mathrm{d}\lambda^{n+1}.$$

Des weiteren ist per Definition

$$U_\varphi \colon H_{s,b} \to X_{s,b}, \quad U_\varphi u(x,t) := U_\varphi(t)u(x,t)$$

ein isometrischer Isomorphismus, und schließlich bildet die Fourier-Transformation (in Raum und Zeit)

$$\mathcal{F} \colon X_{s,b} \to L^2_{\xi,\tau}(\langle\xi\rangle^s \langle\tau - \varphi(\xi)\rangle^b \mathrm{d}\lambda^{n+1})$$

isomorph und isometrisch ab. An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass — ebenso wie bei $H^s = H^s_2$ — die $X_{s,b}$-Normen nur von der Größe der Fourier-Transformierten abhängt, d.h. wir haben

$$\|u\|_{X_{s,b}} = \|\mathcal{F}^{-1}|\mathcal{F}u|\|_{X_{s,b}}$$

und $|\mathcal{F}u| \leq |\mathcal{F}v| \Rightarrow \|u\|_{X_{s,b}} \leq \|v\|_{X_{s,b}}$. Für viele Rechnungen bedeutet dies eine erhebliche Vereinfachung.

(v) Interpolation: Der zuletzt genannte Isomorphismus hat zur Folge, dass $X_{s,b}$ die Interpolationseigenschaften des gewichteten $L^2_{\xi,\tau}$-Raums erbt. Insbesondere gilt:

Proposition 1
Es seien $s_0, s_1, s, b_0, b_1, b \in \mathbb{R}$, so dass für ein $\theta \in]0,1[$ gilt: $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ und $b = (1-\theta)b_0 + \theta b_1$. Dann ist

$$X_{s,b} = [X_{s_0,b_0}, X_{s_1,b_1}]_\theta,$$

wobei $[\cdot,\cdot]_\theta$ die komplexe Interpolationsmethode bezeichnet. Neben der Ungleichung $\|u\|_{X_{s,b}} \leq \|u\|^{1-\theta}_{X_{s_0,b_0}} \|u\|^\theta_{X_{s_1,b_1}}$ (vgl. Aufgabe 15), die man mit der Hölderschen Ungelichung auch zu Fuß beweisen kann, umfasst dies die folgende Aussage: Sind E_0, E_1, E_θ für $\theta \in]0,1[$ Banach-Räume, so dass ebenfalls $[E_0, E_1]_\theta = E_\theta$ gilt (z.B. L^p, gemischte $L^p_t L^q_x$- oder Sobolev-Räume H^s_p,...) und für $i \in \{0,1\}$ $T_i \colon X_{s_i,b_i} \to E_i$ stetige lineare Abbildungen mit $\|T_i\|_{X_{s_i,b_i} \to E_i} \leq M_i$, derart, dass $T_0|_{X_{s_0,b_0} \cap X_{s_1,b_1}} = T_1|_{X_{s_0,b_0} \cap X_{s_1,b_1}} = T$, so besitzt T eine (eindeutig bestimmte) stetige lineare Fortsetzung $T_\theta \colon X_{s,b} \to E_\theta$ mit $\|T_\theta\|_{X_{s,b} \to E_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$. Desgleichen für lineare Abbildungen $T_i \colon E_i \to X_{s_i,b_i}$. Für die komplexe Interpolationsmethode gilt auch die Verallgemeinerung auf multilineare Abbildungen

$$T_i \colon X_{s_{i1},b_{i1}} \times \cdots \times X_{s_{ik},b_{ik}} \to E_i, \quad i \in \{0,1\}$$

wobei ebenfalls die Rollen der X- und E-Räume vertauscht werden kann.

Bemerkung (vi) Äquivalenz von Normen: Es seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Phasenfunktionen. Dann gelten:

(a) Ist $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| < \infty$, so ist $\|\cdot\|_{X_{s,b}(\varphi_1)} \sim \|\cdot\|_{X_{s,b}(\varphi_2)}$.

(b) Sind die φ_i stetig, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| = \infty$ und $b \neq 0$, so ist die Ungleichungskette

$$\frac{1}{c}\|u\|_{X_{s,b}(\varphi_1)} \leq \|u\|_{X_{s,b}(\varphi_2)} \leq c\|u\|_{X_{s,b}(\varphi_1)}$$

für jedes $c > 0$ falsch.

Beweis. zu (a): Wir haben

$$\begin{aligned}\langle\tau-\varphi_1(\xi)\rangle &\sim 1+|\tau-\varphi_1(\xi)| \le 1+|\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)|+|\tau-\varphi_2(\xi)|\\ &\le c+|\tau-\varphi_2(\xi)| \le c\langle\tau-\varphi_2(\xi)\rangle\end{aligned}$$

mit $c=1+\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)|$. Anders herum genauso. zu (b): o.B.d.A. sei $\varphi_2(\xi)=0$ und $\varphi_1(\xi)=:\varphi(\xi)$ unbeschränkt. Dann wählen wir eine Folge $(\xi_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktionenfolge $(u_k)_k$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}u_k(\xi,\tau) &= \chi_{]-1,1[}(\tau)\chi_{B_{\frac{1}{k}}(\xi_k)}(\xi)k^{\frac{n}{2}}, \text{ so dass}\\ \|u_k\|_{H_{0,b}} &= \|u\|_{X_{0,b}(\varphi_2)} = c>0.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\|u\|_{X_{0,b}(\varphi)} \sim |\varphi(\xi_k)|^b \to \begin{cases}\infty, & \text{falls } b>0\\ 0, & \text{falls } b<0.\end{cases}$$

Für $s\neq 0$ benutzt man jetzt den Isomorphismus $\mathcal{J}^s$. □

Bemerkung (i) Ist die Phasenfunktion φ beschränkt, so ist also $X_{s,b}(\varphi)=H_{s,b}$ mit Äquivalenz von Normen. Ferner machen die $X_{s,b}$-Normen keinen Unterschied z.B. zwischen einer Wellengleichung (im engeren Sinn) mit $\varphi(\xi)=\pm|\xi|$ und einer Klein-Gordon-Gleichung mit $\varphi(\xi)=\pm\sqrt{m^2+\xi^2}$ oder einer eindimensionalen Schrödinger-Gleichung mit $\varphi(\xi)=-\xi^2$ und der entsprechenden *Halbwelle* einer Boussinesq-Gleichung, für die $\varphi(\xi)=-|\xi|\sqrt{1+|\xi|^2}$ ist.

(ii) Ist für eine Phasenfunktion $\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)|=\infty$, also der Gerade Anteil von φ unbeschränkt (wie z.B. bei der Schrödinger-Gleichung), so ist für $b\neq 0$

$$\|u\|_{X_{s,b}} \not\sim \|\overline{u}\|_{X_{s,b}}$$

denn wir haben $\mathcal{F}\overline{u}(\xi,\tau)=\overline{\mathcal{F}u(-\xi,-\tau)}$ und daher

$$\begin{aligned}\|\overline{u}\|^2_{X_{s,b}(\varphi)} &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau-\varphi(\xi)\rangle^{2b}|\mathcal{F}u(-\xi,-\tau)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}}\langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau+\varphi(-\xi)\rangle^{2b}|\mathcal{F}u(\xi,\tau)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau = \|u\|^2_{X_{s,b}(\tilde{\varphi})}\end{aligned}$$

für $\tilde{\varphi}(\xi)=-\varphi(-\xi)$. Also bedeutet $\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)|=\infty$, dass die Differenz der Phasenfuntionen φ und $\tilde{\varphi}$ unbeschränkt ist. Diese einfache Beobachtung schlägt sich nieder in unterschiedlichen Ergebnissen für Nichtlinearitäten gleichen Gerades aber verschiedener Struktur, z.B. bei NLS mit $N(u)\in\{u^3,u^2\overline{u},\overline{u}^2u,\overline{u}^3\}$, so.

Als nächstes wollen wir uns mit einem Lemma befassen in dem einige einfache Einbettungen für $X_{s,b}$-Räume gezeigt werden, die noch unabhängig von einer speziellen Phasenfunktion $\varphi(\xi)$ sind:

Lemma 1 (Einfache Einbettungen)
Für alle $s\in\mathbb{R}$ gilt mit stetigen Einbettungen:

(i) $X_{s,b} \subseteq C_t(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)) \cap L_t^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$ sofern $b > \frac{1}{2}$,

(ii) $X_{s,b} \subseteq L_t^p(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n))$ sofern $b \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ und $2 \leq p < \infty$,

(iii) $L_t^1(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)) \subseteq X_{s,b}$ falls $b < -\frac{1}{2}$,

(iv) $L_t^p(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^n)) \subseteq X_{s,b}$ falls $1 < p \leq 2$ und $b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $s = 0$ voraussetzen, ansonsten kann man wie vorhin den Isomorphismus $\mathcal{J}^s$ benutzen um auf $s = 0$ zu gelangen. Außerdem folgt (iii) aus (i) und (iv) aus (ii) *by duality.* Zu (i): für $s = 0$

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{L_x^2}^2 &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}u(\xi,\tau)| \langle\tau\rangle^b \langle\tau\rangle^{-b} \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq c_b \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}u(\xi,\tau)|^2 \langle\tau\rangle^{2b} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\xi = c_b \|u\|_{H_{0,b}}^2
\end{aligned}$$

Wegen $b > \frac{1}{2}$ konvergiert das eine Integral nach der Anwendung von Cauchy-Schwarz und gibt c_b. Anwenden dieser Argumentation auf $U_\varphi(-\cdot)u$ anstelle von u ergibt wegen $\|U_\varphi(-\cdot)u\|_2 = \|u\|_2$ die Normabschätzung in (i). Die Stetigkeit folgt daraus, dass z.B. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $X_{s,b}$ liegt.
Zu (ii): hier gilt

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^2)} \leq \|u\|_{L_x^2(L_t^p)} = \|\|u(x,\cdot)\|_{L_t^p}\|_{L_x^2} \overset{\text{SES}}{\lesssim} \|\|u(x,\cdot)\|_{H_t^b}\|_{L_x^2} = \|u\|_{H_{0,b}}$$

sofern $b \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Mit $U_\varphi(-\cdot)u$ anstelle von u folgt wieder die Behauptung. $\square$

Satz 1 (Transferprinzip)
Es seien $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathbb{R}$ und $m\colon H^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times H^{\sigma_k}(\mathbb{R}^n) \to H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger k-linearer Operator und für ein $b > \frac{1}{2}$ definieren wir

$$M\colon X_{\sigma_1,b}(\varphi_1) \times \cdots \times X_{\sigma_k,b}(\varphi_k) \to C_t(\mathbb{R}, H^\sigma(\mathbb{R}^n))$$

$$M(u_1,\ldots,u_k)(t) := m(u_1(t),\ldots,u_k(t)).$$

Ferner sei $Y \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t)$ ein Banach-Raum, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und $u \in Y$ gilt $\|e^{iat}u\|_Y \leq c\|u\|_Y$ (gleichmäßig in a) und für $f_i \in H^{\sigma_i}(\mathbb{R}^n)$ und $s_i \leq \sigma_i$ $(1 \leq i \leq k)$ die Abschätzung

$$\|M(U_{\varphi_1} f_1, \ldots, U_{\varphi_k} f_k)\|_Y \lesssim \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{s_i,2}. \tag{STE}$$

erfüllt ist. Dann gilt für alle $(u_1,\ldots,u_k) \in X_{\sigma_1,b}(\varphi_1) \times \cdots \times X_{\sigma_k,b}(\varphi_k)$, dass

$$\|M(u_1,\ldots,u_k)\|_Y \lesssim \prod_{i=1}^k \|u_i\|_{X_{s_i,b}(\varphi_i)}, \quad b > \frac{1}{2}.$$

Außerdem lässt sich M in eindeutiger Weise zu einem stetigen linearen Operator $\tilde{M}\colon X_{\sigma_1,b}(\varphi_1) \times \cdots \times X_{\sigma_k,b}(\varphi_k) \to Y$ fortsetzen.

Beweis. Wir setzen $g_i := \mathcal{F}_t U_{\varphi_i}(-\cdot)u_i$. Da $u_i \in X_{\sigma_i,b}(\varphi_i)$, $b > \frac{1}{2}$, sind $g_i \in L^1_\tau(\mathbb{R}, H^{\sigma_i}(\mathbb{R}^n))$. Dann ist

$$\begin{aligned} u_i(t) &= U_{\varphi_i}(t)U_{\varphi_i}(-t)u_i(t) = cU_{\varphi_i}(t)\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}\mathcal{F}_t U_{\varphi_i}(-\tau)u_i(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= cU_{\varphi_i}(t)\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} g_i(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} M(u_1,\dots,u_k)(t) &= cm\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}U_{\varphi_1}(t)g_1(\tau)\mathrm{d}\tau,\dots,\int_{\mathbb{R}} e^{it\tau}U_{\varphi_k}(t)g_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &= c\int_{\mathbb{R}^k} \underbrace{m(U_{\varphi_1}(t)g_1(\tau_1),\dots,U_{\varphi_k}(t)g_k(\tau_k))}_{=M(U_{\varphi_1}g_1(\tau_1),\dots,U_{\varphi_k}g_k(\tau_k))(t)} e^{it(\tau_1+\cdots\tau_k)}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_k. \end{aligned}$$

Womit wir als Abschätzung für $M(u_1,\dots,u_k)$ bekommen, dass

$$\begin{aligned} \|M(u_1,\dots,u_k)\|_Y &\le c\int_{\mathbb{R}^k} \|M(U_{\varphi_1}g_1(\tau_1),\dots,U_{\varphi_k}g_k(\tau_k))\|_Y \mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_k \\ &\overset{(\text{STE})}{\lesssim} \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^k \|g_i(\tau_i)\|_{s_i,2}\langle\tau_i\rangle^b\langle\tau_i\rangle^{-b}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_k \\ &\overset{\text{C.S.}}{\lesssim} \prod_{i=1}^k \|\mathcal{F}_t^{-1}g_i\|_{H_{s_i,b}} = \prod_{i=1}^k \|u_i\|_{X_{s_i,b}(\varphi_i)}. \end{aligned}$$

□

Beispiel
Im Fall $k = 1$ können wir das Transferprinzip anwenden für die linearen Abschätzungen, die wir für die Schrödinger-Gleichung bewiesen haben: Für $b > \frac{1}{2}$ haben wir dann $X_{0,b} \subseteq L^p_t(L^q_x)$ wenn (p,q) admissable ist. In aller Regel gilt sogar

$$X_{0,b} \subseteq \bigcap_{(p,q)\text{ admissable}} L^p_t(L^q_x).$$

Und wir haben auch schon bilineare Abschätzungen gesehen, die sich zu

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad \||D_x|^{\frac{1}{2}}(u\overline{v})\|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{X_{0,b}}\|v\|_{X_{0,b}}, \quad b > \frac{1}{2} \\ n \ge 2: &\quad \||D_x|^{\frac{1}{2}}(uv)\|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{0,b}}, \quad b > \frac{1}{2},\ s > \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

übersetzen.

Wir steuern jetzt auf einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu, der unabhängig von der Phasenfunktion und der Nichtlinearität formuliert und bewiesen werden kann. Alle spezifischen Eigenschaften einer Gleichung werden dabei in die Abschätzungen der Nichtlinearität in den passenden $X_{s,b}(\varphi)$-Normen verschoben. Zu diesem Zweck benötigen wir:

3.2 Abschneidefunktionen und lineare Abschätzungen

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq]-2,2[$, $\psi(t) = 1$ für $t \in [-1,1]$ und $\psi(t) \geq 0$ für $t \in \mathbb{R}$. Für $\delta \in]0,1[$ setzen wir $\psi_\delta(t) := \psi(\frac{t}{\delta})$, so dass $\psi_\delta(t) = 1$ auf $[-\delta,\delta]$ und $\operatorname{supp}(\psi_\delta) \subseteq]-2\delta, 2\delta[$.

Bemerkung
ψ_δ dient zur Lokalisierung in der Zeitvariable t. Da wir in $X_{s,b}(\varphi)$ mit $b > \frac{1}{2}$ arbeiten, um die Stetigkeit der Lösung zu erreichen (vgl. Lemma 1 (i)), können wir keinen scharfen cut-off verwenden, denn $\chi_{[-\delta,\delta]} \notin H^b$ für $b > \frac{1}{2}$.

Lemma 1
Für $s, b \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in H_x^s$ gilt $\|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{s,b}(\varphi)} \lesssim \|u_0\|_{s,2}$.

Beweis. Da Multiplikation mit ψ und U_φ vertauschen, gilt

$$\begin{aligned}\|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{s,b}(\varphi)} &= \|U_\varphi(-\cdot)\psi U_\varphi u_0\|_{H_{s,b}} \\ &= \|\psi u_0\|_{H_{s,b}} = \|\psi\|_{H_t^b}\|u_0\|_{H_x^s} = c_\psi \|u_0\|_{s,2}.\end{aligned}$$

□

Auch die Abschätzung der Lösung der inhomogenen Gleichung,

$$U_\varphi *_R F(t) := \int_0^t U_\varphi(t-t')F(t')\mathrm{d}t'$$

in $X_{s,b}(\varphi)$-Normen wird unabhängig von φ (durch die Konstruktion) und kann leicht reduziert werden auf die Abschätzung eines Integraloperators in H_t^b. Sie ist dennoch etwas anspruchsvoller:

Lemma 2
Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $b' + 1 \geq b \geq 0 \geq b' > -\frac{1}{2}$ sowie $0 < \delta < 1$. Dann gilt

$$\|\psi_\delta U_\varphi *_R F\|_{X_{s,b}(\varphi)} \lesssim \delta^{1-b+b'}\|F\|_{X_{s,b'}(\varphi)}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei s wieder gleich 0 (ansonsten verwende $\mathcal{J}^s$). Setzt man $G(t) = U_\varphi(-t)F(t)$, so ist

$$U_\varphi(-t)U_\varphi *_R F(t) = \int_0^t G(t')\mathrm{d}t'$$

und die behauptete Ungleichung geht über in

$$\|\psi_\delta \int_0^\cdot G(t')\mathrm{d}t'\|_{H_{0,b}} \lesssim \delta^{1-b+b'}\|G\|_{H_{0,b'}}. \tag{3.1}$$

Wenn wir nun die ausschließlich auf die t-Variable bezogene Abschätzung

$$\|\psi_\delta Kg\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{1-b+b'}\|g\|_{H_t^{b'}}, \quad Kg(t) = \int_0^t g(t')\mathrm{d}t' \tag{3.2}$$

zeigen können, so erhalten wir daraus (3.1) durch Quadrieren, Integration nach x und anschließendes Wurzelziehen. Zum Beweis von (3.2) schreiben wir

$$\int_0^t g(t')\mathrm{d}t' = \int_{\mathbb{R}} g(t')\overline{\chi_{[0,t]}(t')}\mathrm{d}t' = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\tau)\overline{\hat{\chi}_{[0,t]}(\tau)}\mathrm{d}\tau,$$

wobei

$$\hat{\chi}_{[0,t]}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-it'\tau}\mathrm{d}t' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-it\tau}-1}{-i\tau},$$

so dass

$$\int_0^t g(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\tau)\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\mathrm{d}\tau =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III})$$

mit

$$\mathrm{I} = \int_{|\tau|\delta\le 1} \hat{g}(\tau)\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\mathrm{d}\tau, \quad \mathrm{II} = \int_{|\tau|\delta\ge 1} \hat{g}(\tau)\frac{e^{it\tau}}{i\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$\mathrm{III} = -\int_{|\tau|\delta\ge 1} \hat{g}(\tau)\frac{1}{i\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Zur Abschätzung von $\|\psi_\delta \mathrm{I}\|_{H_t^b}$ benutzen wir die Taylorentwicklung

$$\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(i\tau)^{k-1},$$

so dass

$$\psi_\delta(t)\cdot \mathrm{I} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\delta\le 1}\hat{g}(\tau)(i\tau)^{k-1}\mathrm{d}\tau$$

und

$$\|\psi_\delta \mathrm{I}\|_{H_t^b} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\|t^k\psi_\delta\|_{H_t^b}\int_{|\tau|\delta\le 1}|\hat{g}(\tau)||\tau|^{k-1}\mathrm{d}\tau. \tag{3.3}$$

Dabei ist $|\widehat{t^k\psi_\delta}(\tau)| = |\hat{\psi}_\delta^{(k)}(\tau)|$ mit $\hat{\psi}_\delta(\tau) = \delta\hat{\psi}(\delta\tau)$, also $|\widehat{t^k\psi_\delta}(\tau)| = \delta^{k+1}|\hat{\psi}^{(k)}(\delta\tau)|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|t^k\psi_\delta\|_{H_t^b}^2 &= \delta^{2k+2}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{2b}|\hat{\psi}^{(k)}(\delta\tau)|^2\mathrm{d}\tau\\ &= \delta^{2k+1}\int_{\mathbb{R}}(1+(\frac{\tau}{\delta})^2)^b|\hat{\psi}^{(k)}(\tau)|^2\mathrm{d}\tau\\ &\le \delta^{2k+1-2b}\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{2b}|\hat{\psi}^{(k)}(\tau)|^2\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

so dass

$$\|t^k\psi_\delta\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b}\|t^k\psi\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b}\|t^k\psi\|_{H_t^1} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b}2^k. \tag{3.4}$$

Insbesondere haben wir für $k=0$

$$\|\psi_\delta\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}-b}, \tag{3.5}$$

was für den späteren Gebrauch festgehalten sei.

Für den letzten Faktor eines Summanden in (3.3) verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, so dass

$$\begin{aligned}\int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)||\tau|^{k-1}\mathrm{d}\tau &= \int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)|\langle\tau\rangle^{b'}\langle\tau\rangle^{-b'}|\tau|^{k-1}\mathrm{d}\tau \\ &\lesssim \|g\|_{H_t^{b'}}\left(\int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2(k-1-b')}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|g\|_{H_t^{b'}}\delta^{\frac{1}{2}-k+b'}, \qquad (3.6)\end{aligned}$$

wobei man beachte, dass $k \ge 1$. Einsetzen von (3.4) und (3.6) in (3.3) ergibt

$$\|\psi_\delta \mathrm{I}\|_{H_t^b} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}\delta^{k+\frac{1}{2}-b}\delta^{\frac{1}{2}-k+b'}\|g\|_{H_t^{b'}} \lesssim \delta^{1-b+b'}\|g\|_{H_t^{b'}}.$$

II ist bis auf einen Faktor eine inverse Fourier-Transformierte, es ist

$$\hat{\mathrm{II}}(\tau) = c\hat{g}(\tau)\chi_{|\tau|\delta\ge 1}\frac{1}{i\tau}.$$

Daraus folgt $\widehat{\psi_\delta \mathrm{II}}(\tau) = c\hat{\psi}_\delta * \hat{\mathrm{II}}(\tau)$ und mit $\langle\tau\rangle^b \lesssim \langle\tau_1\rangle^b + \langle\tau-\tau_1\rangle^b$ erhalten wir

$$\|\psi_\delta \mathrm{II}\|_{H_t^b} \lesssim \|\psi_\delta\|_{H_t^b}\|\hat{\mathrm{II}}\|_1 + \|\hat{\psi}_\delta\|_1\|\mathrm{II}\|_{H_t^b},$$

wobei die Youngsche Ungleichung verwendet wurde.
Nach (3.5) ist $\|\psi_\delta\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}-b}$, wegen $\hat{\psi}_\delta(\tau) = \delta\hat{\psi}(\delta\tau)$ ergibt sich $\|\hat{\psi}_\delta\|_1 = C$.

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathrm{II}}\|_1 &= \int_{|\tau|\ge\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)||\tau|^{b'}|\tau|^{-1-b'}\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\text{C.S.}}{\lesssim} \|g\|_{H_t^{b'}}\left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \tau^{-2-2b'}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \|g\|_{H_t^{b'}}\delta^{\frac{1}{2}+b'} \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Für den ersten Beitrag haben wir also

$$\|\psi_\delta\|_{H_t^b}\|\hat{\mathrm{II}}\|_1 \lesssim \delta^{1-b+b'}\|g\|_{H_t^{b'}},$$

wie gewünscht. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\|\mathrm{II}\|_{H_t^b}^2 &\sim \int_{|\tau|>\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2b-2}|\hat{g}(\tau)|^2\mathrm{d}\tau = \int_{|\tau|>\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2(b-1-b')}\langle\tau\rangle^{2b'}|\hat{g}(\tau)|^2\mathrm{d}\tau \\ &\le \delta^{2(1-b+b')}\|g\|_{H_t^{b'}}^2,\end{aligned}$$

so dass sich dieselbe obere Schranke auch für den zweiten Beitrag und damit für $\|\psi_\delta \mathrm{II}\|_{H_t^b}$ ergibt.
Schließlich ist III unabhängig von t und daher

$$\begin{aligned}\|\psi_\delta \cdot \mathrm{III}\|_{H_t^b} &\le \|\psi_\delta\|_{H_t^b}\int_{|\tau|\ge\frac{1}{\delta}} \frac{|\hat{g}(\tau)|}{|\tau|}\mathrm{d}\tau \\ &\overset{(3.5)}{\lesssim} \delta^{\frac{1}{2}-b}\|\hat{I}I\|_1 \overset{(3.7)}{\lesssim} \delta^{1-b+b'}\|g\|_{H_t^{b'}}.\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von (3.2) erbracht und das Lemma gezeigt. □

3.3 Ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir führen jetzt die Lösungsräume für das Cauchy-Problem

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u),\ u(t=0) = u_0 \in H^s_x,\ s \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

ein. (Wir beschränken uns auf eine einzelne Gleichung, im Fall eines Systems bildet man das kartesische Produkt und normiert dies so, dass wieder ein Hilbert-Raum entsteht.)
Für $b \geq 0$ und $0 < \delta \leq 1$ setzt man $I_\delta := [-\delta, \delta] \times \mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner $I_\delta := [-\delta, \delta] \times \mathbb{T}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$) und

$$X^\delta_{s,b} := \left\{ u|_{I_\delta} \mid u \in X_{s,b} \right\},$$

also den Raum aller Einschränkungen von $X_{s,b}$-Funktionen auf I_δ. Sei $N_\delta := \left\{ u \in X_{s,b} \mid u|_{I_\delta} = 0 \right\} = \ker R_\delta$, wobei $R_\delta = \cdot|_{I_\delta}$ der Einschränkungs- oder Restriktionsoperator ist. Dann können wir $X^\delta_{s,b}$ mit dem Quotienten $X_{s,b}/N_\delta := \{u + N_\delta \mid u \in X_{s,b}\}$ identifizieren durch

$$u|_{I_\delta} \mapsto u + N_\delta.$$

Der Quotientennorm

$$\|u + N_\delta\| = \inf_{f \in N_\delta} \|u + f\|_{X_{s,b}}$$

auf $X_{s,b}/N_\delta$ entspricht dabei die Restriktionsnorm

$$\|u\|_{X^\delta_{s,b}} := \inf \left\{ \|\tilde{u}\|_{X_{s,b}} \mid \tilde{u}|_{\mathcal{I}_\delta} = u \right\},$$

der die Methode ihren Namen verdankt. Wir stellen fest:

(i) $X_{s,b}$ ist ein Hilbert-Raum und N_δ ein abgeschlossener Teilraum. Also ist $X_{s,b}/N_\delta$ und damit auch $X^\delta_{s,b}$ ein Hilbert-Raum und also insbesondere vollständig.

(ii) Die Einschränkung des Restriktionsoperators R_δ auf $N_\delta^\perp$, also

$$R_\delta|_{N_\delta^\perp} : X_{s,b} \supseteq N_\delta^\perp \to X^\delta_{s,b}$$

ist bijektiv (der Kern ist per Definition gleich $\{0\}$), d.h. zu jedem $u \in X^\delta_{s,b}$ gibt es genau ein $\tilde{u} \in N_\delta^\perp \subseteq X_{s,b}$, so dass $\tilde{u}|_{I_\delta} = u$. Hierfür gilt

$$\|u\|^2_{X^\delta_{s,b}} = \inf \left\{ \|\tilde{u} + w\|^2_{X_{s,b}} \mid w \in N_\delta \right\} = \|\tilde{u}\|^2_{X_{s,b}},$$

denn

$$\|\tilde{u} + w\|^2_{X_{s,b}} = \|\tilde{u}\|^2_{X_{s,b}} + \|w\|^2_{X_{s,b}} \geq \|\tilde{u}\|^2_{X_{s,b}}.$$

Dabei gilt die erste Gleichheit, weil $\tilde{u} \perp w$.

Wir haben also einen wohldefinerten stetigen (linearen) Fortsetzungsoperator

$$E_\delta \colon X^\delta_{s,b} \to N_\delta^\perp \subseteq X_{s,b}, \quad u \mapsto E_\delta u := \tilde{u}$$

mit $\tilde{u}$ wie in (ii).

Satz 1
Es sei $s \in \mathbb{R}$ und es gebe $b > \frac{1}{2}$ sowie $b' > b - 1$, so dass die Abschätzungen

$$\|N(u)\|_{X_{s,b'}(\varphi)} \leq C_0(\|u\|_{X_{s,b}(\varphi)})\|u\|_{X_{s,b}(\varphi)}$$

und

$$\|N(u) - N(v)\|_{X_{s,b'}(\varphi)} \leq C_0(\|u\|_{X_{s,b}(\varphi)} + \|v\|_{X_{s,b}(\varphi)})\|u - v\|_{X_{s,b}(\varphi)}$$

mit einer monoton steigenden Funktion $C_0 \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ gelten. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in X_{s,b}^\delta(\varphi)$ des obigen Cauchy-Problems. Diese liegt in $C([-\delta, \delta], H_x^s)$, und der Lösungsoperator ist Lipschitz-stetig auf Kugeln im Datenraum.

Beweis. (i) Es seien $u, v \in X_{s,b}^\delta$ mit Fortsetzungen $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_{s,b}$, entsprechend der Vorbemerkung, d.h. $\tilde{}$ bedeutet den stetigen linearen Fortsetzungsoperator. Dann ist

$$\psi_\delta U_\varphi *_R N(\tilde{u}) \text{ bzw. } \psi_\delta U_\varphi *_R (N(\tilde{u}) - N(\tilde{v}))$$

eine Fortsetzung von $U_\varphi *_R N(u)$ bzw. von $U_\varphi *_R (N(u) - N(v))$[1]. Dann ist

$$\begin{aligned}\|U_\varphi *_R N(u)\|_{X_{s,b}^\delta} &\leq \|\psi_\delta U_\varphi *_R N(\tilde{u})\|_{X_{s,b}} \lesssim \delta^{1-b+b'}\|N(\tilde{u})\|_{X_{s,b'}} \\ &\leq \delta^{1-b+b'} C_0(\|\tilde{u}\|_{X_{s,b}})\|\tilde{u}\|_{X_{s,b}} = \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X_{s,b}^\delta})\|u\|_{X_{s,b}^\delta}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ebenso für die Differenz

$$\begin{aligned}\|U_\varphi *_R (N(u) - N(v))\|_{X_{s,b}^\delta} &\lesssim \delta^{1-b+b'} C_0(\|\tilde{u}\|_{X_{s,b}} + \|\tilde{v}\|_{X_{s,b}})\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_{s,b}} \\ &\leq \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X_{s,b}^\delta} + \|v\|_{X_{s,b}^\delta})\|u - v\|_{X_{s,b}^\delta}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Hier haben wir davon Gebraucht gemacht, dass $\tilde{}$ für einen linearen Operator steht: Wir haben $\tilde{u} - \tilde{v} = \widetilde{u - v}$ benutzt. Ferner ist $\psi U_\varphi u_0$ eine Fortsetzung von $U_\varphi u_0|_{I_\delta}$. Aufgrund der Abschätzung für die homogene lineare Gleichung also

$$\|U_\varphi u_0\|_{X_{s,b}^\delta} \leq \|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{s,b}} \leq c_\psi \|u_0\|_{s,2} \tag{3.11}$$

(ii) Wir wählen $B_{R,\delta} := \left\{u \in X_{s,b}^\delta \mid \|u\|_{X_{s,b}^\delta} \leq R\right\}$ versehen mit der natürlichen Metrik, und setzen wie üblich

$$\Lambda u(t) = U_\varphi(t)u_0 + U_\varphi *_R N(u).$$

Dann ergeben die Abschätzungen (3.9) und (3.11), dass

$$\|\Lambda u\|_{X_{s,b}^\delta} \lesssim c_\psi \|u_0\|_{s,2} + \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X_{s,b}^\delta})\|u\|_{X_{s,b}^\delta}$$

[1] Hierin steckt eine Annahme: $N(u)$ sei lokal in der Zeitvariable t, enthalte also z.B. keine Faltungen bzgl. t. Ist in den Anwendungen aber stets erfüllt.

aus (3.10) erhalten wir

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_{X^\delta_{s,b}} \lesssim \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X^\delta_{s,b}} + \|v\|_{X^\delta_{s,b}})\|u-v\|_{X^\delta_{s,b}}.$$

Sind jetzt $u, v \in B_{R,\delta}$, so haben wir (mit Übergang $C_0 \rightsquigarrow c \cdot C_0$)

$$\begin{aligned}\|\Lambda u\|_{X^\delta_{s,b}} &\leq c_\psi \|u_0\|_{s,2} + \delta^{1-b+b'} C_0(R) R \\ \|\Lambda u - \Lambda v\|_{X^\delta_{s,b}} &\leq \delta^{1-b+b'} C_0(2R)\|u-v\|_{X^\delta_{s,b}}.\end{aligned}$$

Die Wahl $R = 2c_\psi \|u_0\|_{s,2}$ und $\delta = (2C_0(2R))^{\frac{-1}{1-b+b'}}$ ergibt, dass $\Lambda\colon B_{R,\delta} \to B_{R,\delta}$ eine Kontraktion ist. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine Lösung $u \in B_{R,\delta} \subseteq X^\delta_{s,b}$, die in $B_{R,\delta}$ eindeutig ist.

(iii) Da $b > \frac{1}{2}$ vorausgesetzt ist, haben wir $X_{s,b} \subseteq C(\mathbb{R}, H^s_x)$ und also auch $X^\delta_{s,b} \subseteq C([-\delta,\delta], H^s_x)$, das ist die behauptete *persistence property*. Wieder macht — unter der Annahme der Nicht-Eindeutigkeit der Lösung in $X^\delta_{s,b}$ — die Definition

$$\delta_0 := \inf\{t \in]0,\delta] \mid u(t) \neq v(t)\}$$

Sinn. Betrachtet man das Anfangswertproblem $u_1(0) = u(\delta_0) = v(\delta_0)$ für die selbe Gleichung, liefert Wiederholung des obigen Arguments einen Widerspruch. Die behauptete Lipschitz-Abschätzung für Daten in $B_{\|u_0\|_{s,2}}(0) \subseteq H^s_x$ und also Lösungen in $B_{R,\delta}$, R und δ wie oben, erhält man durch Abschätzung von $\|\Lambda_{u_0} u - \Lambda_{v_0} v\|_{X^\delta_{s,b}}$ wie bereits früher diskutiert.

□

Bemerkung (i) Der Fall $b = \frac{1}{2} = -b'$. (Häufig, insbesondere im periodischen Fall, gelingt der Beweis der in Satz 1) vorausgesetzten Ungleichungen nur für diese Wahl der Parameter.) Hier ist das oben dargestellte Argument in zweifacher Hinsicht zu ergänzen:

(a) Eine positive Potenz von δ ist aus den nicht-linearen Abschätzungen zu generieren. Dazu schreibt man zusätzlich eine Abschneidefunktion $\psi_{2\delta}$ in die Nichtlinearität, betrachtet also $\|N(\psi_{2\delta} u)\|_{X_{s,b'}}$. Gelingt es dann, auf der rechten Seite der Abschätzung einen Faktor

$$\|\psi_{2\delta} u\|_{X_{s,b_1}} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}-b_1}\|u\|_{X_{s,b}}$$

mit einem $b_1 < \frac{1}{2}$ zu erzeugen, ist der Mangel behoben.

(b) Abschätzung der Lösung der inhomogenen Gleichung und *persistence property*. Falls $b' = -\frac{1}{2}$ ist, behält man im Lemma 2 des vorherigen Abschnitts einige Terme übrig, die man zu

$$\|\langle\tau\rangle^{-1}\hat{g}\|_{L^1_\tau} \quad \text{bzw. zu} \quad \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^{-1}\mathcal{F}_x(U_\varphi(-\cdot)u)\|_{L^2_\xi L^1_\tau} =: \|u\|_{Y_s}$$

Zusammenfassen kann. Gelingt es, diese ebenfalls durch $C_0(\|u\|_{X_{s,\frac{1}{2}}})\|u\|_{X_{s,\frac{1}{2}}}$ (und entsprechend für die Differenz) zu kontrollieren, so kann man

zum einen das Kontraktionsargument schließen, zum anderen die Stetigkeit der Lösung zeigen. Dazu beweist man die Ungleichung

$$\sup_{|t|\leq\delta} \|U_\varphi *_R F(t)\|_{H^s} \lesssim \langle\delta\rangle \|F\|_{Y_s}$$

als Ergänzung/Verschärfung der linearen Abschätzung in Lemma 2. Ein Approximationsargument liefert die Stetigkeit von $U_\varphi *_R F$ als Funktion von t. Es muss lediglich $F \in L^1([-\delta,\delta], H^s_x)$ sein, damit $U_\varphi *_R F$ definiert ist.

(ii) Eine weitere Reduktion: Im Fall $N(u) = M(u,\ldots,u)$ mit einer multilinearen (möglicherweise in einzelnen Komponenten auch antilinearen) Abbildung M, wie z.B.

$$N(u) = \partial_x(u^{k+1}),\ k \in \mathbb{N}$$

wie bei gKdV, reicht der Beweis von

$$\|M(u_1,\ldots,u_N)\|_{X_{s,b'}} \lesssim \prod_{j=1}^N \|u_j\|_{X_{s,b}},$$

damit beide in Satz 1 vorausgesetzten Abschätzungen gegeben sind. Für die erste ergibt sich dies mit $C_0(t) = ct^{N-1}$, wenn man $u_1 = \ldots = u_N := u$ setzt. Die zweite erhält man, wenn man

$$\begin{aligned} &N(u) - N(v) = M(u,\ldots,u) - M(v,\ldots,v) \\ &= M(u-v,u,\ldots,u) + M(v,u-v,u,\ldots,u) + \cdot + M(v,\ldots,v,u-v) \end{aligned}$$

beachtet.

(iii) Erhaltung höherer Regularität: Bewiesen sei eine Abschätzung

$$\|M(u_1,\ldots,u_N)\|_{X_{s,b'}} \lesssim \prod_{j=1}^N \|u_j\|_{X_{s,b}},$$

die nach Satz 1 und Bemerkung (ii) zu einem LWP-Ergebnis für Daten in H^s_x führt, wobei die Lebensdauer der lösung von $\|u_0\|_{s,2}$ abhängt. Mit

$$\langle\xi\rangle^{\sigma-s} \lesssim \sum_{j=1}^N \langle\xi_j\rangle^{\sigma-s}$$

ergibt sich für $\sigma > s$ die Abschätzung

$$\|M(u_1,\ldots,u_N)\|_{X_{s,b'}} \lesssim \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{X_{\sigma,b}} \prod_{i\neq j} \|u_i\|_{X_{s,b}},$$

speziell

$$\|N(u)\|_{X_{\sigma,b'}} \lesssim \|u\|^{N-1}_{X_{s,b}} \|u\|_{X_{\sigma,b}}.$$

Führt man dann das Kontraktionsargument in

$$B_{R_\sigma,R_s,\delta} := \left\{ u \in X^\delta_{s,b} \mid \|u\|_{X^\delta_{\sigma,b}} \leq R_\sigma \wedge \|u\|_{X^\delta_{s,b}} \leq R_s \right\}$$

durch, kann man LWP in H_x^σ erreichen, wobei die Lebensdauer der Lösung nur von $\|u_0\|_{s,2}$ und nicht von der größeren Norm $\|u_0\|_{\sigma,2}$ abhängt. (Für die Differenzabschätzung in $X_{\sigma,b}^\delta$ ist noch etwas zu tun, aber keine wesentlich schärfere Abschätzung!) Das ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn $\|u_0\|_{s,2}$ durch eine Erhaltungsgröße kontrollierbar ist. Der Schluss von LWP mit Erhaltungssatz auf GWP ist dann auch für höhere Regularitäten möglich.

3.4 Anwendung auf gKdV

Hier betrachten wir das Cauchy-Problem $u(t=0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$[2] für

$$u_t + u_{xxx} \pm \partial_x(u^{k+1}) = 0.$$

Die Phasenfunktion ist $\varphi(\xi) = \xi^3$, der lineare Proagator $U_\varphi(t) = e^{-t\partial_x^3}$. Die X_{sb}-Räume im folgenden sind stets diejenigen für diese spezielle Phasenfunktion.

3.4.1 Abschätzungen für freie Lösungen

Hier sind das Lösungen $U_\varphi(t)u_0(x)$ der *Airy-Gleichung* $u_t + u_{xxx} = 0$. Wir beginnen mit einer bilinearen Abschätzung, die man als *refinement* der Strichartz-Abschätzungen ansehen kann. Diese werden wir anschließend formulieren und beweisen.

Definition
Es seien $s \geq 0$ und $f, g \in H^s(\mathbb{R})$. Wir definieren den bilinearen Pseudodifferentialoperator $\mathcal{I}_-^s$ durch

$$\mathcal{F}\mathcal{I}_-^s(f,g)(\xi) = \int_* |\xi_1 - \xi_2|^2 \hat{f}(\xi_1)\hat{g}(\xi_2)\mathrm{d}\xi_1,$$

wobei $\int_* \ldots \mathrm{d}\xi_1 = \int_{\xi_1+\xi_2=\xi} \ldots \mathrm{d}\xi_1$ das Faltungsintegral bezeichnet.

Lemma 1
Es seien $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ und $u = U_\varphi u_0$, $v = U_\varphi v_0$. Dann gilt

$$\|\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\mathcal{I}_-^{\frac{1}{2}}(u,v)\|_{L_{xt}^2} \lesssim \|u_0\|_2\|v_0\|_2$$

Bemerkung (i) Gilt für alle $\xi_1 \in \operatorname{supp}(\hat{u}_0)$ und $\xi_2 \in \operatorname{supp}(\hat{v}_0)$, dass $|\xi_1| \geq 2|\xi_2|$, so gewinnt man mit dieser Abschätzung eine ganze Ableitung, man hat dann

$$\|\partial_x(uv)\|_{L_{xt}^2} \lesssim \|u_0\|_2\|v_0\|_2.$$

(ii) Das Transferprinzip ergibt für $b > \frac{1}{2}$

$$\|\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\mathcal{I}_-^{\frac{1}{2}}(u,v)\|_{L_{xt}^2} \lesssim \|u_0\|_{X_{0,b}}\|v_0\|_{X_{0,b}}.$$

Beweis. □

[2] Das folgende gilt nur für den nichtperiodischen Fall.

Ähnlich wie im Fall der eindimensionalen Schrödingergleichung können wir das Argument verbinden mit dem Sobolevschen Einbettungssatz und der HLS-Ungleichung, um die folgende Airy-Version der Fefferman-Stein-Abschätzung zu erhalten:

Lemma 2
Für $4 < q < \infty$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ gilt

$$\|U_\varphi u_0\|_{L_t^4(\dot{H}_q^{\frac{1}{4}})} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L_\xi^{r'}}$$

Beweis. □

In einem $\frac{1}{p}$-/$\frac{1}{q}$-Diagramm: Durch Interpolation von Lemma 2 mit der L^2-Normerhaltung und der trivialen Abschätzung unten links erhalten wir die Strichartz-type Abschätzung mit Ableitungsgewinn für die Airy-Gleichung:

Korollar
Sei $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$. Dann gilt

$$\|e^{-t\partial_x^3} u_0\|_{L_t^p(\dot{H}_q^{\frac{1}{p}})} \lesssim \|u_0\|_2$$

Bemerkung (i) Auf anderem Weg bewiesen von Kenig, Ponce & Vega, 1991. (Time decay + TT^*-Argument mit HLS in t; dieser Beweis erfasst auch den Endpunkt $q = \infty$, $p = 4$)

(ii) Bei der Interpolation werden die Ableitungen mit verarbeitet. Dazu benötigt man weiterführende Interpolationssätze als bisher besprochen: Interpolationssatz für vektorwertige (hier: $\dot{H}_q^s$-wertige) L^p-Räme, oder ein Theorem von Stein über die Interpolation von analytischen Familien von Operatoren. Alternative: Riesz-Thorin für gemischte $L_t^p(L_x^q)$-Räume wird mit einer Littlewood-Payley-Zerlegung kombiniert.

(iii) Der maximale Ableitungsgewinn beträgt $\mathcal{I}^{\frac{1}{4}}$ in der Endpunkt-Strichartz-Abschätzung. In der entsprechenden Abschätzung für die inhomogene Gleichung hat man also maximal eine halbe Ableitung Gewinn — nicht ausreichend für die typische Nichtlinearität $\partial_x(u^{k+1})$ bei gKdV!

(iv) $X_{s,b}$-Version: Für $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ sowie $b > \frac{1}{2}$:

$$\|\mathcal{I}^{\frac{1}{p}} u\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|u\|_{X_{0,b}}$$

aufgrund des Transferprinzips.

Damit kommen wir zu einer Gruppe von linearen Abschätzungen, die eine stärkere Glättung aufweist, wenn man zuerst in der Zeitvariablen integriert, also von den Strichartz-Normen $\|\cdot\|_{L_t^p(L_x^q)}$ übergeht zu $\|\cdot\|_{L_x^q(L_t^p)}$. Diese Beobachtung geht zurück auf Tosio Kato, die folgende scharfe Version ist wieder aus der 91er Arbeit von Kenig, Ponce & Vega:

Lemma 3 (Kato-smoothing effect)
Es gibt ein $c_0 > 0$, so dass

$$\|\partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0(x)\|_{L_t^2} = c_0 \|u_0\|_{L_x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. □

Korollar
Für $b > \frac{1}{2}$ gelten

$$\|\partial_x u\|_{L_x^\infty(L_t^2)} \lesssim \|u\|_{X_{0,b}} \text{ und } \|\partial_x u\|_{X_{0,-b}} \lesssim \|u\|_{L_x^1(L_t^2)}.$$

Um diesen Glättungseffekt in einem Fixpunktargument oder für $X_{s,b}$-Abschätzungen der Nichtlinearität einsetzen zu können, muss man ihn komplementieren durch weitere Abschätzungen in $L_x^p(L_t^q)$-Normen, und der Diagonalfall der Strichartz-Abschätzungen ist hierfür in der Regel nicht ausreichend. Was man benötigt, ist die folgende Maximal-Funktions-Abschätzung, deren Beweis anspruchsvoller ist und daher nur skizziert werden kann.

Lemma 4 (Max.-fct.-est.)
Es gilt

$$\|\sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{-t\partial_x} u_0|\|_{L_x^4} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{4}}}.$$

Bei dieser Abschätzung verliert man sogar $\frac{1}{4}$ Ableitung. Oder für $b > \frac{1}{2}$ als $X_{s,b}$-Version:

$$\|u\|_{L_x^4(L_t^\infty)} \lesssim \|u\|_{X_{\frac{1}{4},b}}$$

Beweis. □

3.4.2 Subkritische LWP-Theorie für gKdV

Hier zeigen wir für einige $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\|\partial_x \prod_{j=1}^{k+1} u_j\|_{X_{s,b'}} \lesssim \prod_{j=1}^{k+1} \|u_j\|_{X_{s,b}}$$

mit $b > \frac{1}{2}$ und $b' > b-1$, die zu lokaler Wohlgestelltheit in $H^s(\mathbb{R})$ führen. Dabei können wir wegen der Symmetrie in den $k+1$ Faktoren bei Bedarf annehmen, dass

$$|\xi_1| \geq |\xi_1| \geq \ldots \geq |\xi_{k+1}|,$$

wenn ξ_j die zu u_j gehörende Wellenzahl ist.

Literaturverzeichnis

[1] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[2] Thierry Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics.* New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] Michael Christ, James Colliander, and Terrence Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.

[4] Charles Fefferman. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math. (2)*, 94:330–336, 1971.

[5] J. Ginibre and G. Velo. Generalized Strichartz inequalities for the wave equation. *J. Funct. Anal.*, 133(1):50–68, 1995.

[6] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, third edition, 2014.

[7] Loukas Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, third edition, 2014.

[8] Loukas Grafakos and Seungly Oh. The Kato-Ponce inequality. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(6):1128–1157, 2014.

[9] Axel Grünrock. *New applications of the Fourier restriction norm method to wellposedness problems for nonlinear evolution equations.* PhD thesis, Universität Wuppertal, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften» Mathematik und Informatik» Dissertationen, 2002.

[10] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)].

[11] Markus Keel and Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998.

[12] Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Universitext. Springer, New York, second edition, 2015.

[13] Camil Muscalu and Wilhelm Schlag. *Classical and multilinear harmonic analysis. Vol. II*, volume 138 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[14] Irving Segal. Space-time decay for solutions of wave equations. *Advances in Math.*, 22(3):305–311, 1976.

[15] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.

[16] Peter A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:477–478, 1975.

[17] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.