2. Die semilineare Schrödinger-Gleichung auf dem $\mathbb{R}^n$

Hier betrachten wir im wesentlichen das Cauchy-Problem

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = C|u|^{p-1}u \quad (p>1,\ C\in\mathbb{R}^*),\quad u(0)=u_0\in H^s(\mathbb{R}^n) \tag{CP}$$

bzw. die entsprechende Integralgleichung

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + C\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\underbrace{|u(s)|^{p-1}u(s)}_{N(u(s))}\,ds,$$

anderes C

die wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz behandeln. Hierbei ist $e^{it\Delta} = \mathcal{F}^{-1}e^{-it|\xi|^2}\mathcal{F}$, $t\in\mathbb{R}$, die Schar der Lösungsoperatoren für die homogene lineare Schrödingergleichung (ohne Potential, auf $\mathbb{R}^n$).

Einige der hier entwickelten Argumente greifen auch im periodischen Fall, also für $u_0\in H^s(\mathbb{T}^n)$, oft mit etwas schwächeren Ergebnissen.

2.1 Das "Sobolev multiplication law" und ein erstes (grobes) Ergebnis

Eine praktische Aufgabe bei der Untersuchung nichtlinearer Evolutionsgleichungen ist stets die Abschätzung der Nichtlinearität in passenden Normen, insbes. in denen des Datenraumes. Für die L^2-basierten Sobolev-Räume H^s ist einfach und grundlegend:

Lemma 1 (Sobolev multiplication law): Für $s > \frac{n}{2}$ sind $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $H^s(\mathbb{T}^n)$ Banach-Algebren unter punktweiser Multiplikation, d.h. es gilt

$$\|fg\|_{s,2} \lesssim \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

Bem.: Durch Wahl einer äquivalenten Norm kann man an dieser Stelle $C = 1$ für die implizite Konstante erreichen.

Bew.: Es ist

$$\|fg\|_{s,2}^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f \cdot g}(\xi)|^2 \, dH(\xi)$$

Nun ist

$$|\widehat{f \cdot g}(\xi)| = c_n |\hat{f} * \hat{g}(\xi)| \lesssim_n \int |\hat{f}(\xi_1)| |\hat{g}(\xi - \xi_1)| \, dH(\xi_1)$$

Nun ist $\xi = \xi_1 + \xi - \xi_1$ und daher $\langle \xi \rangle^s \lesssim \langle \xi_1 \rangle^s + \langle \xi - \xi_1 \rangle^s$, also

$$\langle \xi \rangle^s |\widehat{fg}(\xi)| \lesssim \int \langle \xi_1 \rangle^s |\hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi - \xi_1)| \, dH(\xi_1)$$

$$+ \int \langle \xi - \xi_1 \rangle^s |\hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi - \xi_1)| \, dH(\xi_1)$$

$$= \widehat{J^s \tilde{f}} * \hat{\tilde{g}}(\xi) + \hat{\tilde{f}} * \widehat{J^s \tilde{g}}(\xi) = (\widehat{J^s \tilde{f}}) \cdot \tilde{g}(\xi) + \tilde{f} (\widehat{J^s \tilde{g}})(\xi),$$

wenn wir $\tilde{f} := \mathcal{F}^{-1} |\hat{f}|$, $\tilde{g} := \mathcal{F}^{-1} |\hat{g}|$ definieren. Damit

$$\|fg\|_{s,2} = \|J^s(fg)\|_2 \lesssim \|(J^s \tilde{f}) \tilde{g}\|_2 + \|\tilde{f} (J^s \tilde{g})\|_2$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|J^s \tilde{f}\|_2 \|\tilde{g}\|_\infty + \|\tilde{f}\|_\infty \|J^s \tilde{g}\|_2 \underset{\text{Sob. ES}}{\lesssim} \|\tilde{f}\|_{s,2} \|\tilde{g}\|_{s,2}$$

$= \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}$, da $\| \ \|_{s,2}$ nur vom Betrag der Fouriertransformierten (von f) abhängt. $\square$

Damit können wir unter Beachtung von $\|e^{it\Delta}u_0\|_{S,2} = \|u_0\|_{S,2}$ folgendes zeigen:

<u>Lemma 2</u>: Es seien $p > 1$ ganzzahlig und ungerade, $s > \frac{4}{2}$ und $u_0 \in H^s$. Dann existiert ein $T = T(\|u_0\|_{S,2}) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T], H^s)$ von (CP). Auf Kugeln $B_R(0) \subset H^s$ ist der Lösungsoperator

$$S : B_R(0) \longrightarrow C([0, T(\tfrac{R}{2})], H^s), \quad u_0 \longmapsto S(u_0) = u$$

(Dann auf Lösungen) Lipschitz-stetig.

<u>Bew.</u>: Es sei $B_{R,T}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius $R > 0$ in $C([0,T], H^s)$. Dann ist $B_{R,T}$, versehen mit der von $\|u\| := \sup_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_{S,2}$ induzierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum. R und T werden im Lauf des Beweises gewählt. Wir setzen

$$\Lambda_{u_0}(u)(t) := e^{it\Delta}u_0 + c\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} N(u(s))\,ds$$

und schätzen ab, wobei Konstanten von Zeile zu Zeile wechseln können:

$$\|\Lambda_{u_0}(u) - \Lambda_{v_0}(v)\| \le \|u_0 - v_0\|_{S,2} + c\int_0^T \|N(u(s)) - N(v(s))\|_{S,2}\,ds$$

Für die weitere Abschätzung der Nichtlinearität verwenden wir

- die geometrische Summenformel, wonach
$$b^p - a^p = (b-a)\cdot\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k},$$
- die Tatsache, dass $\|u\|_{S,2} = \|\bar{u}\|_{S,2}$,
- das Lemma 1

und setzen voraus, dass u und $v \in B_{R,T}$ sind. Dann ④ erhalten wir

$$\| \Lambda_{u_0}(u) - \Lambda_{v_0}(v) \| \leq \| u_0 - v_0 \|_{s,2} + C T R^{p-1} \| u - v \| .$$

Für $v_0 = 0$ und $v = 0$:

$$\| \Lambda_{u_0}(u) \| \leq \| u_0 \|_{s,2} + C T R^p .$$

Wir wählen $\| u_0 \|_{s,2} = \frac{R}{2}$ und $C T R^{p-1} = \frac{1}{2}$. Dann ist $\| \Lambda_{u_0}(u) \| \leq R$, also $\Lambda_{u_0} : B_{R,T} \to B_{R,T}$ (Abbildung in sich.) Das gilt für alle $v_0 \in H^s$ mit $\| v_0 \|_{s,2} \leq \| u_0 \|_{s,2}$.

Für $v_0 = u_0$ erhalten wir

$$\| \Lambda_{u_0}(u) - \Lambda_{u_0}(v) \| \leq C T R^{p-1} \| u - v \| = \frac{1}{2} \| u - v \| ,$$

das ist die Kontraktionseigenschaft.

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert die ~~Existenz~~ Existenz einer Lösung $u \in C([0,T], H^s)$ von (CP), die in $B_{R,T}$ eindeutig ist.

<u>Eindeutigkeit in $C([0,T], H^s)$:</u> Seien $u, v \in C([0,T], H^s)$ beide Lösungen von (CP) zum selben Anfangswert, also $u(0) = v(0) = u_0$. Wir definieren

$$T_* := \inf \{ t \in [0,T] : u(t) \neq v(t) \} .$$

Da u und v stetige Funktionen in H^s sind, ist T_* wohldefiniert, und es gilt $u(T_*) = v(T_*) =: u_1$. Jetzt erlaubt aber das bereits Gezeigte eine eindeutige Fortsetzung von u und v auf das Intervall $[0, T_* + \delta]$ mit einem $\delta > 0$. Widerspruch zur Definition von T_*.

Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten:

Seien $u = \Lambda_{u_0}(u)$ und $v = \Lambda_{v_0}(v)$ zwei Lösungen mit verschiedenen Daten, $R = 2\max(\|u_0\|_{s,2}, \|v\|_{s,2})$ und $T = T(R/2)$, wie oben gewählt. Dann gilt (S. 4 oben)

$$\|u - v\| = \|\Lambda_{u_0}(u) - \Lambda_{v_0}(v)\| \leq \|u_0 - v_0\| + \frac{1}{2}\|u - v\|$$

$$\Rightarrow \quad \|u - v\| \leq 2\|u_0 - v_0\|. \qquad \square$$

Bem.: (1) Gilt sowohl im periodischen Fall $H^s = H^s(\mathbb{T}^n)$ wie auch im nichtperiodischen Fall $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$.

(2) Die Eindeutigkeitsaussage gilt in $C([0,T], H^s)$ und nicht nur in einem kleineren Lösungsraum $X_{s,T} \subsetneq C([0,T], H^s)$. Also haben wir unconditional uniqueness.

(3) Wir haben $R = 2\|u_0\|_{s,2}$ und $T = \frac{1}{2C} R^{1-p}$ gewählt, also $T \sim \|u_0\|_{s,2}^{1-p}$. D.h.: Die (durch einmalige Anwendung des Kontraktionsarguments garantierte) Lebensdauer (lifespan) der Lösung ist eine monoton fallende Funktion der Norm der Daten.

Diese Kontrollierbarkeit der lifespan durch $\|u_0\|_{s,2}$ ist der Ausgangspunkt für die folgende Heuristik:

Scaling-argument und der Begriff der "kritischen Regularität":

Wir nehmen an, zu $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ gebe es eine Lösung $u \in C([0,T^*), \dot{H}^s(\mathbb{R}^n))$ der semilinearen Schrödinger-Gl.

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = |u|^{p-1}u, \quad \text{mit } u(0) = u_0, \qquad \text{(NLS)}$$

mit endlicher Lebensdauer $T^* < \infty$. (Es gelte z.B. $\lim_{t\to T^*} \|u(t)\|_{\dot{H}^s} = \infty$, oder irgendeine andere Katastrophe möge z. Zt. T^* eintreten.) Wir definieren für $\lambda > 0$

$$u_\lambda(x,t) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t).$$

Dann ist

$$i\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(x,t) = \lambda^2 \lambda^{\frac{2}{p-1}} \cdot i\frac{\partial u}{\partial t}(\lambda x, \lambda^2 t),$$

$$\Delta u_\lambda(x,t) = \lambda^2 \lambda^{\frac{2}{p-1}} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

und also unter Beachtung von $2 + \frac{2}{p-1} = 2 \cdot \frac{p}{p-1} = \left(\frac{2}{p-1}\right)p$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2p}{p-1}} \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

$$\underset{\text{Dgl.}}{=} \lambda^{\frac{2p}{p-1}} |u(\lambda x, \lambda^2 t)|^{p-1} \cdot u(\lambda x, \lambda^2 t) = |u_\lambda(x,t)|^{p-1} u_\lambda(x,t).$$

D.h.: u_λ löst ebenfalls die semilineare Schrödinger-Gleichung (NLS) mit Exponent p, allerdings mit anderem Anfangswert, nämlich

$$u_{0,\lambda}(x) := u_\lambda(x,0) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x).$$

Für u_λ ereignet sich die Katastrophe, wenn $\lambda^2 t = T^*$ ist, d.h. die Lebensdauer von u_λ ist $T_\lambda = \frac{T^*}{\lambda^2} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$.

Andererseits ist nach früheren Rechnungen (s.S. 56 in Abschnitt 1.2)

$$\|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^s} \sim \lambda^{\frac{2}{p-1}+s-\frac{4}{2}} \|u_0\|_{\dot{H}^s} \xrightarrow{\lambda\to\infty} \begin{cases} \infty : & s > \frac{4}{2} - \frac{2}{p-1} =: s_c \\ = \text{const} : & s = s_c \\ 0 : & s < s_c . \end{cases}$$

Also ist für $s \leq s_c$ nicht mehr der Kontrollierbarkeit der Lebensdauer durch die Größe der Norm der Daten zu rechnen.

s_c heißt die kritische Sobolev-Regularität einer nichtlinearen Evolutionsgleichung, sofern diese invariant ist unter einer Skalentransformation wie oben. (z.B. ist die Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \alpha |u|^{p-1} u + \beta |u|^{q-1} u \quad \text{für } p \neq q$$

nicht skalierungsinvariant, und bei der Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = N(u)$$

macht bereits der Beitrag $m^2 u$ des linearen Anteils Schwierigkeiten!) Wir erwarten:

- (LWP) mit Kontrolle der Lifespan in $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s > s_c$,
- (LWP) mit Einschränkungen (ggf. nur für kleine Daten), falls $s = s_c$ ist,
- (IP) (= ill-posedness) für $s < s_c$.

Bem.: (1) Für (NLS) haben wir

$$s_c = \frac{4}{d} - \frac{2}{p-1}$$

berechnet. D.h. unser $s > \frac{4}{2}$ - Ergebnis erlaubt möglicherweise Verbesserungen – wir haben die dispersiven Eigenschaften der lin. Schrödinger-Gleichung ja auch noch gar nicht ausgenutzt.

(2) Für gKdV und gBO ist ein scaling-argument durchführbar, $\longrightarrow$ Übungen.

(3) Die scaling-Heuristik kann in seltenen Fällen zu einem Beweis von ill-posedness für $s < s_c$ ausgebaut werden. Man benötigt dazu in jedem Fall ein "blow-up"-result, also den Nachweis, dass in endlicher Zeit tatsächlich eine "Explosion" eintritt.

(4) Es gibt weitere Hindernisse für (LWP) außer dem scaling argument. Insofern verwundert es nicht, dass Bspe. für (IP) oberhalb von s_c existieren. Ein Bsp. ist die cubic NLS in $H^s(\mathbb{R})$. Ill-posed im C^0_{unif}-sense für $s < 0$ ($s_c = -\frac{1}{2}$). Neuere Ergebnisse zeigen (LWP) im C^0-sense.

(5) Andererseits ist (wsr) kein WP-Ergebnis unterhalb von s_c bekannt.