Semilineare Wellengleichungen

1. Einleitung

1.1 Gleichungen und Anfangswertprobleme

Die Gleichungen bzw. Gleichungssysteme, mit denen ich mich in dieser Vorlesung beschäftigen will, haben die folgende Gestalt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\,\varphi(-i\nabla)\,u = N(u) \qquad (1)$$

Hierbei sind

- $u : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{K}^N, \quad (x,t) \longmapsto u(x,t) \qquad (\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$

  die gesuchte Lösung, die von den Ortsvariablen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und der Zeitvariable $t \in I \subset \mathbb{R}$ (I ein Intervall) abhängt. Es handelt sich bei (1) also um eine <u>Evolutionsgleichung</u>, die die zeitliche Entwicklung eines (physikalischen) Systems modelliert. In vielen Fällen werden wir uns auf den Fall $N = 1$, also auf eine einzelne Gleichung beschränken.

In Teilen der Vorlesung suchen wir Lösungen, die (raum-) periodisch in den Raumvariablen sind.

In diesem Fall schreiben wir

$u : \mathbb{T}^n \times I \to \mathbb{K}^N$ bzw. $u : \mathbb{T}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{K}^N$ (o.ä.)

wobei $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$ der eindimensionale Torus ist.

- $\frac{\partial u}{\partial t} =: u_t$ die partielle Ableitung nach der Zeitvariablen,

- $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ der Gradient bezüglich der Ortsvariablen, letzteres wird manchmal durch ein zusätzliches Subscript betont: ∇_x. ∇_{xt} wäre dann der vollständige Gradient.

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}^{N\times N}$ die (im Prinzip matrixwertige) sogenannte <u>Phasenfunktion</u>. Wenn (1) tatsächlich eine Dgl. (ein engerer Sinn) ist, sind die Matrixelemente von $\varphi(\xi)$ Polynome in $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

z.B. kann φ ein Monom sein, also

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{\alpha_j} = \xi^\alpha$$

mit einem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist

$$\varphi(-i\nabla) = (-i)^{|\alpha|} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \cdot \nabla^\alpha,$$

wobei $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ die Länge des Multiindex' α bezeichnet.

Der Vorfaktor $-i$ im Argument der Phasenfunk-

tion reicht hier von der Verwendung der Fouriertransformation, die für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert ist durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \qquad (x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j).$$

Wenn auch $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx = -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix\xi}\right) f(x)\,dx$$

$$= i\xi_j\,(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx = i\xi_j\,\hat{f}(\xi).$$

Nehmen wir jetzt an, dass $\varphi(\xi) = \xi^\alpha$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, deren Ableitungen bis zur Ordnung $|\alpha|$ ebenfalls existieren und integrierbar sind. Dann gilt

$$\mathcal{F}(\varphi(-i\nabla)f)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\,\mathcal{F}\left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} f\right)(\xi)$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\, i^{|\alpha|} \cdot \prod_{j=1}^n \xi_j^{\alpha_j}\,\mathcal{F}f(\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi) = \varphi(\xi)\mathcal{F}f(\xi).$$

Das gilt natürlich entsprechend auch für Polynome. Ist nun auch noch $\xi \mapsto \varphi(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so haben wir

$$\varphi(-i\nabla)f = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F}f, \tag{2}$$

wobei die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) := \check{g}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi)\,d\xi.$$

(Die Normierung der Fouriertransformation wurde hier also so gewählt, dass Symmetrie zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ besteht. Ein Vorteil ist, dass dann nach dem <u>Satz von Plancherel</u> die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

(nach Fortsetzung von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$) tatsächlich ein isometrischer Isomorphismus ist.)

Ist nun φ keine Polynom, sondern (etwa) eine lokal-integrierbare Funktion moderaten Wachstums, so könnten wir die FT dazu benutzen um

$$\varphi(-i\nabla) f := \mathcal{F}^{-1} \varphi(\xi) \mathcal{F} f$$

wie in (2) zu definieren. In diesem Fall nennt man $\varphi(-i\nabla)$ einen Pseudodifferentialoperator (p.d.o.). (Häufig muss man dann zur distributionellen FT übergehen, dazu später mehr.)

Die Phasenfunktion ist das bestimmende Merkmal des linearen Teils von (1). Ein einfaches <u>Bsp.</u>:

(i) $\varphi(\xi) = -|\xi|^2 \Rightarrow \varphi(-i\nabla) = -\sum_{j=1}^{n} \left(i \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 = +\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \Delta$

und die Gleichung (1) spezialisiert sich zu (wenn $N=0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\varphi(-i\nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0 \Rightarrow i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0,$$

also zur homogenen linearen Schrödinger-Gleichung,

die wie die Kategorie der Wellengleichungen ein weiteres Feld fällt.

(ii) $\varphi(\xi) = i|\xi|^2 \Rightarrow \varphi(-i\nabla) = -i\Delta$ und die (homogene) Gleichung lautet

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - i\,\varphi(-i\nabla)u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

es handelt sich also um die Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsgleichung, die ganz anders geartete Phänomene beschreibt, die nichts mit Wellenausbreitung zu tun haben.

Dieses Bsp. plausibilisiert (so hoffe ich) die folgende

Def.: Eine Gleichung oder GLS. vom Typ (1) heißt <u>eine Wellengleichung</u> (<u>im weiteren Sinn</u>), wenn die Phasenfunktion φ reellwertig ist, bzw. wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(\xi)$ eine Hermitesche Matrix ist, d.h. $\varphi(\xi) = \overline{\varphi(\xi)}^t$.

In diesem Fall definieren wir für $t \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$

$$U_\varphi(t)u_0 := \mathcal{F}^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F} u_0 \left(= e^{it\varphi(-i\nabla)}u_0\right)$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} U_\varphi(t)u_0 = i\,\varphi(-i\nabla)\,U_\varphi(t)u_0,$$

und wir erhalten die Lösung der homogenen linearen Gleichung ((1) mit $N=0$), die der Anfangsbedingung $U_\varphi(0)u_0 = u_0$ genügt.

Aufgrund des Satzes von Plancherel ist dann

$$\langle v_0, U_\varphi(t) u_0 \rangle_{L^2_x} = \langle \hat{v}_0, \widehat{U_\varphi(t) u_0} \rangle_{L^2_\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}_0(\xi) \overline{e^{it\varphi(\xi)} \hat{u}_0(\xi)} \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\varphi(\xi)} \hat{v}_0(\xi) \overline{\hat{u}_0(\xi)} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{U_\varphi(-t) v_0}(\xi) \overline{\hat{u}_0(\xi)} \, d\xi$$

$$= \langle U_\varphi(-t) v_0, u_0 \rangle_{L^2_x} ,$$

d.h. $U_\varphi(t)^{-1} = U_\varphi(-t) = U_\varphi(t)^*$. Also ist $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ eine <u>unitäre Gruppe</u>. Der infinitesimale Generator ist

$$i\varphi(-i\nabla) = \mathcal{F}^{-1} \varphi(\xi) \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \supset D \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D := \{ f \in L^2_x(\mathbb{R}^n) : \varphi(\xi) \hat{f} \in L^2_\xi(\mathbb{R}^n) \}.$$

Kann man sowohl als einen Differential- bzw. Pseudo-Differential-Operator wie auch als einen Fouriermultiplikator auffassen.

Damit ist zum einen eine Verbindung hergestellt zum Inhalt der PDE I. Zum anderen ist auch der entscheidende Hinweis für die "richtige" Anfangsbedingung gegeben: Wir werden also das Cauchy-Problem

$$(1) \qquad \text{und} \qquad u(0) = u_0 \in D$$

behandeln, wobei D im Moment noch ein allgemeiner Datenraum ist. Unsere Überlegung zeigt, dass

$L^2(\mathbb{R}^n)$ (oder $L^2(\mathbb{T}^n)$, wenn wir das periodische Problem betrachten) ein aussichtsreicher Kandidat ist.

- Schließlich ist $N(u)$ der nichtlineare Term der Gleichung mit einer Funktion N, die nicht nur von der gesuchten Lösung u, sondern auch von deren Ableitungen, im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ auch von $\bar{u}$ abhängt. Später werden wir gewisse Einschränkungen machen dahingehend, dass die Ableitungsordnung im linearen Term diejenige in der Nichtlinearität überwiegt und wir uns im Bereich der "semilinearen" Gleichungen bewegen. Methodisch bedeutet das, dass wir den nichtlinearen Term $N(u)$ als "kleine" Störung der linearen Gleichung behandeln können, zumindest für kurze Zeiten und/oder für kleine Daten u_0. Im Moment betrachten wir $N(u)$ aber noch weitgehend als "black box".

<u>Beispiele:</u>

(1) Schrödinger-Gleichungen

Die lineare Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u - Vu = 0$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ und einem reellwertigen Potential $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Grund-

gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik (für ein einzelnes Elementarteilchen, was zugleich als Welle aufgefasst wird).

$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ ist die W.-Ert, dass das von u beschriebene Teilchen zur Zeit t im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ befindet. Dies setzt die Normierung $\|u(t)\|_2 = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$ voraus, insbesondere muss $u(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sein.

Für die "freie Gleichung", d.h. $V \equiv 0$ bzw.

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$$

haben wir $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$ bereits gesehen.

Verschiedene Nichtlinearitäten werden in der Literatur viel diskutiert:

(1.1) Die semilineare Schrödinger-Gleichung (NLS)

$$i u_t + \Delta u = c \cdot |u|^{p-1} u$$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ und einem $p > 1$, nicht notwendig ganzzahlig; insbes. der Fall $p = 3$ (cubic NLS) tritt bei einer Vielzahl von Modellgleichungen aus verschiedenen Bereichen der Physik auf ("universal model"). Man kann die rechte Seite interpretieren als $V \cdot u$ mit einem reellen Potential, das hier allerdings von der Unbekannten u abhängt.

(1.2) Nichtlineare Schrödingergleichung mit Ableitungen (= derivatives, also DNLS) mit

$N(u) = P(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla \bar{u})$, P Polynom in $2n+2$ Variablen

insbesondere ergibt

$N(u) = \partial_x(|u|^2 u)$ eine Modellgleichung in einer Raumdimension, die aus der Plasmaphysik kommt.

(2) Die vermutlich am besten – mit verschiedenen mathematischen Methoden – untersuchte nichtlineare Wellengleichung ist die <u>Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV)</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = c\,\frac{\partial}{\partial x}(u^2) \qquad (x \in \mathbb{R}, \text{ also } u=1).$$

Sie wurde 1895 von D.J. Korteweg und G. de Vries hergeleitet, um das Phänomen langer, stabiler Wasserwellen in einem schmalen Kanal zu beschreiben, sogenannte "Solitärwellen" oder auch "Solitonen". Ihr linearer Anteil

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

hat einen eigenen Namen erhalten: Die <u>Airy-Gleichung</u>.

Aus $\frac{\partial^3}{\partial x^3} = -i\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 = -i\,\varphi\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ lesen wir die Phasenfunktion $\varphi(\xi) = \xi^3$ ab.

Verallgemeinerungen der KdV-Gleichung in verschiedene Richtungen werden und werden intensiv untersucht, einige davon treten tatsächlich auch als "universal models" für diverse physikalische Phänomene auf:

(2.1) "Generalized KdV - equation" (g-KdV-k) (KdV)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = c \cdot \frac{\partial}{\partial x}(u^{k+1})$$

$k=1$: eigentliche KdV-Gleichung,

$k=2$: modifizierte KdV-Gleichung (mKdV)

zwischen den Lösungen dieser beiden Glen. gibt es eine nichtlineare Transformation, die "Miura-Map":

Ist v eine Lösung von (mKdV) und

$$u = M(v) := \frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\, v_x + v^2\right),$$

so löst u die KdV-Gleichung (ausreichende Regularität vorausgesetzt, z.B. $v \in C^4(\mathbb{R}^2)$; $\rightarrow$ Übungen.).

(2.2) Die "dispersive generalized" KdV-, häufiger: Benjamin-Ono-Gleichung (BO):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |D_x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = c\, \frac{\partial}{\partial x}(u^{k+1}),$$

wobei der ΨdO $|D_x|^\alpha = \mathcal{F}^{-1}|\xi|^\alpha \mathcal{F}$ mit Hilfe der Fouriertransformation erklärt ist. Hier hat man die Phasenfunktion $\varphi(\xi) = \xi|\xi|^\alpha$. Spezialfälle (neben KdV):

- $\alpha = 1$, $k = 1$: Benjamin-Ono-Gleichung (BO)
- $\alpha = 1$, $k \geq 2$: generalized BO (gBO-k)

Der Fall $\alpha = 1$ erweist sich als deutlich schwieriger als $\alpha > 1$, insbesondere als KdV ($\alpha = 2$).

(2.3) Verallgemeinerungen auf höhere Raumdimensionen

Davon gibt es dreierlei, die naheliegendste ist die Zakharov-Kuznetsov-equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Delta u = c\,\frac{\partial}{\partial x}(u^{k+1}) \qquad (gZK\text{-}k),\ k\in\mathbb{N}$$

Hierbei ist $u : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{C}$, $(x,y,t) \longmapsto u(x,y,t)$ mit $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^{n-1}$, $t\in I$ und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ der Laplace-Operator bezüglich aller Raumvariablen.

Für $k=1$ und $n\in\{2,3\}$ beschreibt diese Gleichung die Ausbreitung nichtlinearer akkustischer Wellen im einem magnetisierten Plasma.

$n=3$: Zakharov-Kuznetsov (1974)

$n=2$: Laedke-Spatschek (1982) (Spatschek lehrte Physik an der HHU.)

Die Phasenfunktion des linearen Teils der ZK ist

$$\varphi(\xi,\eta) = \xi(\xi^2+|\eta|^2) \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \eta\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

(3) Klein-Gordon-Gleichung und klassische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = N(u) \qquad (NKG)$$

$m=0$: klassische Wellengleichung, $m>0$: KGG.

Die lineare Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = V\cdot u$$

mit einem von u unabhängigen Potentialfkt.

$V: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ wurde in den 1920er Jahren unabhängig einerseits von Schrödinger und andererseits von Klein + Gordon als grundlegende Gleichung der relativistischen Quantenmechanik vorgeschlagen. Sie erwies sich jedoch als unverträglich mit der axiomatischen Formulierung der QM, die wenig später entwickelt wurde (Jahre von Neumann u.a.) und die eine Dgl. 1. Ordnung in t verlangt. Dieser Forderung genügt die Dirac-Gleichung, die im Lauf der 1930er Jahre die KGG verdrängt hat. Dennoch tritt die nichtlineare KGG - oft in Systemen mit anderen Gleichungen - in verschiedenen physikalischen Theorien auf, die Relativitätstheorie und QM zu verbinden suchen.

Relevante Nichtlinearitäten: $|u|^{p-1}u$; $P(u, \nabla_{xt} u)$

Zunächst liegt eine Gleichung vom Typ (1) vor, und was ist hier die Phasenfunktion?

Dazu schreiben wir den Differentialoperator im linearen Teil von KGG als

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (-\Delta + m^2) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + i \underbrace{\sqrt{-\Delta + m^2}}_{=:A}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{-\Delta + m^2}\Big)$$

$$= -\Big(iA + \frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(iA - \frac{\partial}{\partial t}\Big)$$

Nun sei u eine Lösung von (NKG). Dann setzen wir

$$u_\pm := \frac{1}{2i} A^{-1}\Big(iA \pm \frac{\partial}{\partial t}\Big) u.$$

Dann ist $u_+ + u_- = \frac{1}{2i} A^{-1}\Big(iA + \frac{\partial}{\partial t} + iA - \frac{\partial}{\partial t}\Big) u = u$, und als Dgl.-System für u_+ und u_- erhalten wir

$$(iA \mp \frac{\partial}{\partial t})u_\pm = \frac{1}{2i} A^{-1}(iA \mp \frac{\partial}{\partial t})(iA \pm \frac{\partial}{\partial t})u$$

$$= \frac{-1}{2i} A^{-1}(A^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2})u \underset{(NKG)}{=} -\frac{1}{2i} A^{-1} N(u_+ + u_-),$$

also: $(\frac{\partial}{\partial t} \mp iA)u_\pm = \pm \frac{1}{2i} A^{-1} N(u_+ + u_-)$.

Da wir uns auf dem $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{T}^n$) befinden, fällt es leicht schwer, den Operator A explicit als Fouriermultiplikator anzugeben. Es ist

$$A = \sqrt{(-\Delta) + m^2} = \mathcal{F}^{-1}\sqrt{|\xi|^2 + m^2}\,\mathcal{F} = -i\,\varphi_\pm(-i\nabla)$$

für die Phasenfunktionen $\varphi_\pm(\xi) = \pm\sqrt{|\xi|^2 + m^2}$. Da $\varphi_\pm$ reellwertig sind, handelt es sich um ein System von Wellengleichungen 1. Ordnung vom Typ (1).

Sind für u die Anfangswerte

$$u(0) = u_0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

vorgeschrieben, so ergeben sich daraus für $u_\pm$ die Daten

$$u_\pm(0) = \frac{A^{-1}}{2i}(iAu(0) \pm \frac{\partial u}{\partial t}(0)) = \frac{1}{2}(u_0 \mp iA^{-1}u_1).$$

Wenn also u_0 in einem Datenraum D liegt, so sollte sinnvollerweise $u_1 \in AD = \{Af : f \in D\}$ sein. Für $m \neq 0$ lässt sich das in der Skala der Sobolevräume

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

sehr gut realisieren: Man wählt $u_0 \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Für die klassische Wellengleichung mit $m = 0$ muss man sich etwas einfallen lassen.

Das Ziel unserer Bemühungen in dieser Vorlesung ist der Beweis der

<u>Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\varphi(-i\nabla)u = N(u), \qquad u(0) = u_0 \in D \tag{3}$$

für verschiedene Wellengleichungen und Daten geringer Regularität, etwa $D = H^s(\mathbb{R}^n)$ mit möglichst kleinem s. (Mehr über die Datenräume folgt im nächsten Abschnitt.) Dazu legen wir zuerst einen möglichst allgemeinen, d.h. schwachen Lösungsbegriff fest:

<u>Def.</u>: Unter einer Lösung des Cauchy-Problems (3) verstehen wir eine Funktion $u \in C([0,T), D)$, die der Integralgleichung

$$u(t) = U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s)N(u(s))\,ds \tag{4}$$

genügt.

<u>Bem.</u>: (1) Es handelt sich um eine sog. "<u>milde Lösung</u>".

(2) Ist $u \in C([0,T), D_{\varphi(-i\nabla)}) \cap C^1([0,T), D)$ mit

$$D_{\varphi(-i\nabla)} = \{f \in D : \varphi(-i\nabla)f \in D\}$$

und $N(u) \in C([0,T), D)$, so liegt eine klassische Lösung vor, was oft nicht der Fall sein wird. – Durch die Wahl dieses schwachen Lösungsbegriffs ersparen wir uns mühevolle Diskussionen um die Äquivalenz von (3) und (4), wie wir sie in PDE I, Abschnitt 4.1 geführt haben.

(3) Ein weiterer Vorteil ist, dass (4) eine Fixpunktgleichung $u = \Lambda_{u_0}(u)$ für die Abbildung

$$\Lambda_{u_0}(v)(t) := U_\varphi(t)u_0 + \int_0^t U_\varphi(t-s)N(v(s))ds$$

ist. Wir können also Fixpunktsätze, insbesondere den Banachschen, zur Lösung des Problems anwenden. Dazu sind allerdings in jedem Einzelfall Definitions- und Zielbereich für Λ_{u_0} sorgfältig zu wählen.

Der Begriff der <u>Wohlgestelltheit</u> nach Hadamard umfasst Existenz, Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten. Es sind allerdings einige Präzisierungen sinnvoll und gebräuchlich:

<u>Def.</u>: Wir nennen das Cauchy-Problem (3) in einem Datenraum D (zeitlich) lokal wohlgestellt (engl.: <u>locally well-posed</u>, <u>LWP</u>), wenn zu jedem $u_0 \in D$ ein $T = T(u_0) > 0$ existiert, so dass folgendes gilt:

(I) Es gibt einen linearen Testraum $X_T \subset C([0,T], D)$ und eine Lösung $u \in X_T$ der Integralgleichung (4). (Hierbei bedeutet C auch: stetig eingebettet. Ferner hängt X_T nur von T, nicht von u_0 ab.)

(II) Diese Lösung ist in X_T eindeutig bestimmt.

(III) Ist $B_T := \{u_0 \in D : \exists$ Lösung $u \in X_T$ von (4) mit $u(0) = u_0\}$, so ist der Lösungsoperator

$$S_T : D \supset B_T \to C([0,T], D), \quad u_0 \mapsto S_T(u_0) = u \ (= \text{Lösung von (4)})$$

stetig.

<u>Zusätze:</u> (1) Wir nennen ein solches Cauchy-Problem

(i) schlecht gestellt (<u>ill-posed</u>), wenn es nicht wohlgestellt ist;

(ii) global wohlgestellt (<u>globally well-posed</u>, <u>GWP</u>), wenn (I) bis (III) auf jedem Zeitintervall gelten. (Das ist in der Regel bereits dann erfüllt, wenn sich die lokalen Lösungen eines LWP-Problems auf jedes beliebige Zeitintervall $[0,T]$ fortsetzen lassen.)

(iii) unbedingt wohlgestellt (<u>unconditionally well-posed</u>), wenn $X_T = C([0,T], D)$ gewählt werden kann. ((iii) bedeutet eine Verschärfung der Eindeutigkeitsaussage (II), daher spricht man auch von unconditional uniqueness. Es gibt für Daten sehr geringer Regularität tatsächlich Beispiele von Problemen, die conditionally well-posed, aber unconditionally ill-posed sind.)

(2) Ferner werden Wohlgestelltheitsaussagen differenziert nach der Regularität der Lösungsabbildung S_T in Teil (III) der Definition. So bedeutet etwa

- C^0_{unif}-Wellposedness, dass S_T auf beschränkten Teilmengen von D gleichmäßig stetig, also uniformly continuous ist;
- C^k-Wellposedness, dass S_T k-mal stetig differenzierbar ist usw.

Beweise von Ill-posedness beziehen sich häufig auf die Regularität der Lösungsabbildung, etwa wenn gezeigt wird, dass S_T (falls existiert) nicht C^k (für ein bestimmtes k) oder nicht C^0_{unif} sein kann. Aus solchen Ergebnissen kann man oft folgern, dass das betrachtete Problem einer direkten Behandlung mit dem Banachschen Fixpunktsatz nicht zugänglich ist. – In den letzten Jahren häufen sich Beispiele von C^0-Well-posedness bei gleichzeitiger C^0_{unif}-ill-posedness. Es kann also durchaus die etwas kuriose Situation auftreten, dass etwa gleichzeitig zwei Veröffentlichungen scheinbar widersprechenden Inhalts erscheinen: In der ersten wird die Wohlgestelltheit und in der zweiten die Illposedness desselben Problems gezeigt – und beide sind korrekt.

Dispersion

Ein äußerst nützliches Hilfsmittel zum Beweis lokaler Well-
gestaltlert bei niedriger Regularität sind Raum-Zeit-
Abschätzungen für Lösungen der linearen Gleichungen.
Hier sind an erster Stelle die sog. Strichartz-Abschätzun-
gen

$$\| U_\varphi u_0 \|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \| u_0 \|_{H_x^s} \qquad \text{(Str.)}$$

zu nennen. (R.S. Strichartz, 1977; für $p=q$ bei Schrödin-
ger- und klassischen Wellengleichungen) Dabei ist die
Norm auf der linken Seite gegeben durch

$$\| f \|_{L_t^p(L_x^q)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,t)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

eine "gemischte L^p-Norm". Solche Abschätzungen be-
ziehen auf den zeitlichen Abfall (time decay) der
Lösungen, etwa in der Form

$$\| U_\varphi(t) u_0 \|_{L_x^\infty} \lesssim t^{-\alpha} \| |D_x|^\sigma u_0 \|_{L_x^1} \qquad \text{(t.d.e.)}$$

mit Exponenten α und σ, die von der Raumdimen-
sion und dem Wachstum der Phasenfunktion ab-
hängen. Sie bringen schwache Glättungseffekte zum
Ausdruck, die auf dem Phänomen der Dispersion
beruhen. Was ist darunter zu verstehen?

Mit der Identität

$$U_\varphi(t) u_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi + it\varphi(\xi)} \hat{u}_0(\xi) d\xi$$

erhalten wir eine Darstellung der Lösung der freien Gleichung als Überlagerung (Superposition) sogenannter "ebener Wellen"

$$(x,t) \longmapsto e^{ix\xi + it\varphi(\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n \text{ fest}).$$

Wir können noch einen Schritt weiter gehen und bei dieser ebenen Welle auch die Raumvariablen $x \in \mathbb{R}^n$ festhalten. Das Ergebnis sind die von den Parametern $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ abhängigen Funktionen

$$f_{x,\xi} : I \to \mathbb{C}, \; t \mapsto f_{x,\xi}(t) := e^{ix\xi + it\varphi(\xi)}$$

der Zeitvariablen t, die der Gleichung

$$f_{x,\xi}''(t) = -\varphi(\xi)^2 f(t)$$

genügen. Das ist die Gleichung einer Schwingung mit der <u>Frequenz</u> $\varphi(\xi)$. Die Fourievariable $\xi \in \mathbb{R}^n$ wird in der physikalischen Literatur als <u>Wellenzahl</u> bzw. <u>Wellenvektor</u> bezeichnet. (In der math. Literatur wird oft manchmal ξ oder $|\xi|$ als Frequenz benannt.) Damit wird die betrachtete

<u>Wellenbewegung als Überlagerung von Schwingungen</u>

aufgefasst, was intuitiv überzeugend und eine Grundidee der Fourieranalysis ist.

Bei Abwesenheit von Dämpfung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen gegeben durch die sog.

Gruppengeschwindigkeit $v_g(\xi) = \nabla\varphi(\xi)$.

Ist diese wie angegeben abhängig vom Wellenvektor ξ, so bedeutet das: Beiträge unterschiedlicher (Wellenvektoren bzw.) Frequenzen breiten sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus. Das führt zu einem "Zerfließen" des Anfangsprofils u_0. Diesem Vorgang nennt man Dispersion. Hiermit verbunden sind der time-decay (t.d.e.) und ein schwacher Gewinn von Ableitungen, der nicht instantan, sondern erst nach zeitlicher Mittelung erkennbar ist. Am prägnantesten kommt dieser sog. "Kato-Smoothing-Effekt" in einer Raumdimension auf $\mathbb{R}$ zum Ausdruck:

$$\| \, |\varphi'(-i\partial_x)|^{\frac{1}{2}} U_\varphi u_0(x) \|_{L^2_t} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x} \qquad \text{(Kato)}$$

- Der Ableitungsgewinn ist umso größer, je stärker φ' für große $|\xi|$ ansteigt. Für $\varphi(\xi) = -\xi^2$ (Schrödinger) erhält man hier eine halbe Ableitung. Das ist viel weniger als bei der Wärmeleitungsgleichung, deren Lösungen für jedes $t > 0$ in C^∞ liegen.

- Auf dem $\mathbb{R}^n$ existiert der Effekt auch, ist aber schwieriger in einer Normabschätzung zu erfassen. Auf beschränkten Gebieten und im periodischen Fall gibt es diese Form der Glättung nicht.

- Auch bei Abschätzungen vom Strichartz-Typ kann eine Ableitungsgleichung auftreten, dabei ist

$$|\det \mathrm{Hess}\, \varphi(-i\nabla)|^{\frac{1}{q}}$$

kontrollierbar. Das gelingt also nur bei superquadratischen Phasenfunktionen – nicht bei der Schrödingergleichung, und bei der KGG hat man sogar einen Verlust. Dieser fällt allerdings geringer aus, als bei einer bloßen Sobolev-Einbettung.

Die Beweise der Abschätzungen vom Typ (Str.) und (Kato) sind z.T. aufwendig, aber auch trickreich und interessant. Wir werden uns später ausführlich damit beschäftigen. An dieser Stelle möchte ich versuchen, das Phänomen "Dispersion" etwas genauer qualitativ zu beschreiben:

- Man kann Dispersion <u>sehen</u>: Wenn weißes Licht schräg auf ein Prisma fällt, ist es beim Austritt in die Farben des Regenbogens aufgespalten. Das beruht darauf, dass Licht verschiedener Frequenz im Glas unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat und dementsprechend stärker oder schwächer abgelenkt wird.
- Sie können Dispersion aber auch <u>hören</u>: Wenn

jemand in die Oberfläche eines zugefrorenen Sees ein Loch schlägt, können Sie dies in großer Entfernung hören, der Schall breitet sich dabei teilweise in der Luft und teilweise in der Eisplatte aus. Neben den üblichen Geräuschen, die beim Hämmern entstehen, vernehmen Sie noch einen höheren Klang, einen Pistolenschuss ähnlich oder reißenden Draht. Erklärungsversuch: Die Schwingungen in der Eisplatte werden beschrieben durch die

<u>Plattengleichung</u>

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = -\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u .$$

Nach Zerlegung in ein System 1. Ordnung für $u_\pm$ (wie oben für die Klein-Gordon-Gleichung) erhalten wir die Phasenfunktionen $\varphi_\pm(\xi) = \pm|\xi|^2$ wie bei der Schrödinger-Gleichung.

Schließlich sollen zwei Beispiele nicht oder nur schwach dispersiver Wellengleichungen die dispersiven Effekte abgrenzen von dem reinen Transportvorgang, der immer auch mit Wellenbewegungen verbunden ist:

(1) Die Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{4} v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

mit einem festen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ wird gelöst

durch $u(x,t) = F(x - vt)$, wobei F eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Hier gibt es weder einen time-decay noch eine Glättung, da das zur Zeit $t=0$ gegebene Profil F lediglich durch den $\mathbb{R}^4$ geschoben wird. Es handelt sich jedoch um eine Wellengleichung: Verlangen wir

$$v \cdot \nabla \overset{(!)}{=} -i\,\varphi(-i\nabla),$$

so ist dies für $\varphi(\xi) = -v \cdot \xi$ erfüllt. Die Gruppengeschwindigkeit ist hier

$$\nabla\varphi(\xi) = -v,$$

also ein konstanter Vektor. Diese Gleichung ist nicht dispersiv.

(2) Die klassische (homogene lineare) Wellengleichung

$$\Box u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

(2.1) In einer Raumdimension ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und der D'Alembert-Operator faktorisiert in

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

so dass wir die Gleichung lesen können als ein System aus zwei Transportgleichungen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten $v_\pm = \pm 1$. Die allgemeine Lösung ist, wie wir aus "Einführung

PDE" wissen, gegeben durch

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t),$$

also auch hier: Eine nicht dispersive Wellengleichung.

(2.2) Höhere Raumdimensionen $n \geq 2$: Hier haben wir nach Bsp. (3) mit $m=0$ die Phasenfunktionen

$$\varphi_\pm(\xi) = \pm|\xi| \qquad \text{(euklidische Norm)}$$

und folglich die Gruppengeschwindigkeiten

$$\nabla\varphi_\pm(\xi) = \pm\frac{\xi}{|\xi|} \quad \text{mit} \quad |\nabla\varphi_\pm(\xi)| = 1,$$

aber eine Geschwindigkeit ist ein Vektor und hier <u>abhängig</u> <u>von</u> ξ. Und tatsächlich lässt sich für freie Lösungen der klassischen Wellengleichung ein decay

$$\|U_{\pm|\xi|}(t)u_0\|_{L^\infty_x} \lesssim_{u_0} |t|^{-\frac{n-1}{2}}$$

feststellen, was bei einem reinen Transportvorgang unmöglich ist. Wir haben also einen schwachen dispersiven Effekt, der darin besteht, dass sich ein anfänglich stark konzentriertes Wellenpaket in alle Raumrichtungen gleichmäßig ausbreitet und dadurch abflacht. Wie oben ablesbar, ist dieser Effekt umso größer, je höher die Raumdimension ist.

Erhaltungsgrößen

Relevante nichtlineare Wellengleichungen modellieren reale physikalische Phänomene. Daher gibt es bestimmte Größen wie Masse, Ladung, Impuls, Energie usw., die zeitlich konstant sind – die sog. Erhaltungsgrößen.

Die Masse bzw. Ladung ist $= \|u(t)\|_2^2$ und für semilineare Schrödinger-Gleichungen ebenso wie für KdV-ähnliche Gleichungen erhalten. Sie liefert unmittelbar eine sog. a-priori-Abschätzung: Wenn eine Lösung existiert mit Anfangswert $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (oder $\in L^2(\mathbb{T}^n)$), so gilt $\forall t > 0$, für die diese Lösung existiert, dass

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 .$$

(Wir müssen die Lösung nicht kennen, um diese Beziehung herzuleiten. Die Gleichung und einige Zusatzannahmen sind dafür ausreichend, daher die Bezeichnung "a-priori-Abschätzung".) Da $\|u(t)\|_2$ eine definierte Größe ist, erhalten wir eine gewisse Kontrolle über das Wachstum der Lösung, die wir für verschiedene Zwecke nutzen:

- Eindeutigkeitsbeweise,
- Fortsetzung lokaler Lösungen zu globalen,
- Konstruktion lokaler Lösungen für Gleichungen, die sich einer direkten Behandlung mit Fixpunktsätzen entziehen. Hier nutzt man z.B. die Methode der parabolischen Regularisierung, d.h. man ergänzt die Gleichung (1) zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\varphi(-i\nabla)u - \varepsilon\Delta u = N(u) \qquad (1_\varepsilon)$$

und der parabolische Zusatzterm $-\varepsilon\Delta u$ führt in vielen Fällen zur Lösbarkeit des Cauchy-Problems für (1_ε). Mit Hilfe geeigneter a-priori-Abschätzungen kann es dann gelingen, im Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ eine Lösung für (1) zu erhalten. Dabei geht in der Regel die C^0_{conf}-Regularität verloren.

Eine weitere deficite Erhaltungsgröße nichtlinearer Wellengleichungen ist die Energie, zumeist

$$E(u(t)) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n/\mathbb{T}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2 dx}_{\text{kinetische Energie}} + E_{pot}(u(t)) .$$

(Eine etwas pathologische Ausnahme ist die Dirac-Gleichung, deren kinetische Energie das Vorzeichen im Lauf der Evolution wechseln kann.) Aus der Energieerhaltung kann man häufig auch eine a-priori-Abschätzung gewinnen.

Bsp.: Masse und Energie semilinearer Schrödinger-Gleichungen $\quad iu_t + \Delta u = \pm |u|^{p-1}u$:

(i) Erhaltung von $\|u(t)\|_2^2$ = Masse / Ladung.

Man multipliziert die Gleichung mit $\bar{u}$ und erhält

$$iu_t\bar{u} + (\Delta u)\bar{u} = \pm |u|^{p+1}$$

Dann gilt auch die komplex konjugierte Gleichung

$$-i\bar{u}_t \cdot u + (\Delta\bar{u})u = \pm |u|^{p+1} .$$

Differenzbildung ergibt

$$i \cdot \frac{\partial}{\partial t} |u|^2 = i\,(u_t \bar{u} + \bar{u}_t u) = (\Delta \bar{u}) u - (\Delta u) \bar{u}.$$

Jetzt nehmen wir an, dass u samt 2. x-Ableitungen integrierbar ist und dass Integration nach x und Zeitableitung vertauschen. Dann folgt

$$i \frac{d}{dt} \int |u|^2 dx = \int (\Delta \bar{u}) u - (\Delta u) \bar{u}\, dx = \int |\nabla u|^2 - |\nabla u|^2 dx = 0,$$

also $\|u(t)\|_2^2 = \text{const.}$

Die Regularitätsannahmen an u lassen sich bei stetiger Abhängigkeit der Lösungen von den Daten ausschließend durch Approximation "wegdiskutieren".

(ii) Für die Energieerhaltung multiplizieren wir mit

$$\Delta \bar{u} \mp |u|^{p-1} \bar{u}$$

Dann folgt

$$i u_t \Delta \bar{u} \mp i u_t \bar{u} |u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1} \bar{u} \Delta u = \pm |u|^{p-1} (\Delta \bar{u}) u - |u|^{2p}$$

komplex konjugieren

$$-i \bar{u}_t \Delta u \pm \bar{u}_t u |u|^{p-1} + |\Delta u|^2 \mp |u|^{p-1} u \Delta \bar{u} = \pm |u|^{p-1} (\Delta u) \bar{u} - |u|^{2p}$$

Differenzbilden

$$i\,(u_t \Delta \bar{u} + \bar{u}_t \Delta u \mp (u_t \bar{u} + \bar{u}_t u) |u|^{p-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_t \Delta \bar{u} + \bar{u}_t \Delta u \mp \underbrace{|u|^{p-1} \frac{\partial}{\partial t} |u|^2}_{= \frac{2}{p+1} \frac{\partial}{\partial t} |u|^{p+1}} = 0$$

denn: $\frac{\partial}{\partial t} |u|^{p+1} = \frac{\partial}{\partial t} (|u|^2)^{\frac{p+1}{2}}$

Integration ergibt:

$$0 = \int u_t \Delta \bar{u} + \bar{u}_t \Delta u \mp \frac{2}{p+1} \frac{\partial}{\partial t} |u|^{p+1} \, dx$$ jetzt: part. Int.

$$= -\int \langle \nabla u_t, \nabla \bar{u} \rangle + \langle \nabla u, \nabla \bar{u}_t \rangle \pm \frac{2}{p+1} \frac{\partial}{\partial t} |u|^{p+1} \, dx$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial t} \left(|\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx$$

$$= \frac{d}{dt} \int |\nabla u|^2 \pm \frac{2}{p+1} |u|^{p+1} \, dx$$ und damit

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int |\nabla u(t)|^2 \pm \frac{2}{p+1} |u(t)|^2 dx = E(u_0).$$

Im + - Fall eine definite Größe, die $\|\nabla u(t)\|_2^2$ kontrolliert, sogenannter "defocusing case". Im - Fall kann man für kleine $p = 1+\delta$ (dimensionsabhängig) noch $E(u(t)) \sim \|\nabla u(t)\|_2^2$ erreichen. Für größere p kann es zum "blow-up" der H^1-Norm kommen ("focusing case").