3. Semilineare Probleme

3.1 Anwendungen der Strichartz-Abschätzungen

Betrachtet man zunächst allgemein das Cauchy-Problem

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x); \quad (u_0, u_1) \in H^{s_0} \times H^{s_1}$$

(ggf. mit homogenen Datenräumen $\dot{H}^{s_0} \times \dot{H}^{s_1}$, beides stets auf dem $\mathbb{R}^n$) für eine semilineare Evolutionsgleichung zweiter Ordnung in der Zeit, also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^2 u = N(u, Du, \dots)$$

mit Ableitungen von u bis zur Ordnung von A, so sind es typischerweise drei Fragestellungen, die man mit <u>linearen</u> <u>Strichartz-Abschätzungen</u> <u>allein</u> (und gewissen "Calculus inequalities" [1]) erfolgreich behandeln kann:

(1) <u>Lokale Wohlgestelltheit</u>, d.h. Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit (der Lösungen von den Cauchy-Daten) <u>zeitlich</u> lokaler Lösungen

$$u \in C([0,T], H^{s_0}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], H^{s_1}(\mathbb{R}^n))$$

der entsprechenden Integralgleichung $u = \Lambda(u)$, wobei

---

1) Hölder, Sobolev-Einbettungen, verallgemeinerte Leibniz-Regel (s.u.)

$$\Lambda(u)(t) := \Lambda_{(u_0,u_1)}(u)(t) := \cos(tA)u_0 + A^{-1}\sin(tA)u_1$$

$$+ A^{-1}\int_0^t \sin((t-t')A)\, N(u(t'),\dots)\, dt', \qquad (138)$$

wobei der Operator A^{-1} vor dem Duhamel-Integral die Verarbeitung von Ableitungen bis zur Ordnung von A erlaubt – im Fall der Wellen-/KG-Gleichung sind nur Ableitungen erster Ordnung kontrollierbar.

Beweisverfahren: CMP in Räumen, die durch die Kenntnis der Strichartz-Abschätzungen bestimmt werden

Zielsetzung: Möglichst geringe Regularitätsvoraussetzungen an die Daten; falls die Gleichung skaleninvariant ist, versucht man die kritische Sobolevregularität zu erreichen.

(2) Die globale Natur der Strichartz-Abschätzungen (in der Zeit) erlaubt in manchen Fällen den direkten Beweis <u>globaler Wohlgestelltheit bei kleinen Daten</u> mit Hilfe des Kontraktionssatzes. (Funktioniert – fast – nur dann, wenn man die kritische Sob.-Regularität s_c erreichen kann.)

(3) Ist die GWP bei kleinen Daten mit Hilfe der Strichartz-Abschätzungen gezeigt, so gelingt oft auch mit denselben Rechnungen der

Nachweis der Existenz von Streuzuständen. Darunter versteht man, dass sich eine globale Lösung asymptotisch wie eine Lösung der homogenen linearen Gleichung, allerdings mit anderen Daten verhält. Man zeigt dann also die Existenz von $u_{0,\pm} \in H^{s_0}$ und $u_{1,\pm} \in H^{s_1}$, so dass gilt

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| u(t) - \cos(tA) u_{0,\pm} - A^{-1} \sin(tA) u_{1,\pm} \|_{H^{s_0}} = 0.$$

(Ggf. mit homogenen Normen, so dass $A H^{s_0} = H^{s_1}$.)

Auch weiterführende Argumente / Theoreme machen stets substanziellen Gebrauch von den Strichartz- oder ähnlichen Raum-Zeit-Abschätzungen!

Einige ausgewählte Bsp. zu (1) - (3) sollen im folgenden vorgestellt werden.

3.1.1 Semilineare Wellengleichung ohne Ableitungen

$$\Box u = u^k, \quad k \in \mathbb{N}, \; k \geq 2$$

$$u(0) = u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$$

mit $n \geq 2$. (Die Ergebnisse im folgenden gelten auch für die KG-Gleichung, wenn man $\dot{H}$ durch H ersetzt.) Nach: Lindblad - Sogge, 1995

Lassen Sie uns für relativ große Exponenten

$$k \geq \frac{n+3}{n-1}, \qquad \text{d.h.}$$

$k \geq 5$ für $n=2$; $k \geq 3$ für $n \in \{3,4\}$, $k \geq 2$ für $n \geq 5$

gleich die kritische Sobolev-Regularität

$$s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{k-1}$$

angehen. Neben der Hölder-Ungleichung, dem Sobolev-Schen Einbettungssatz

$$\dot{H}^{\sigma,r} \subset L^s, \text{ also } \|f\|_{L^s} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\sigma,r}}, \text{ falls } \sigma - \frac{n}{r} = -\frac{n}{s} < 0,$$

der verallgemeinerten Leibniz-Regel

$$\|f \cdot g\|_{\dot{H}^{\sigma,r}} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\sigma,r_1}} \|g\|_{L^{r_2}} + \|f\|_{L^{s_1}} \|g\|_{\dot{H}^{\sigma,s_2}},$$

gültig für $\sigma \geq 0$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$, $1 < r_i, s_i \leq \infty$, $r \geq 1$ (herleiten wie in der Vorlesung "dispersive"), benötigen wir natürlich die Strichartz-Abschätzungen:

Sind (p,q) wave-admissable, d.h.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} = \frac{n-1}{2}$$

gelten mit einem Ableitungsverlust von

$$\delta = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$$

die Abschätzungen

$$\| \cos(tD) u_0 \|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \| u_0 \|_{\dot{H}^\delta},$$

$$\| D^{-1} \sin(tD) u_1 \|_{L^p_t(L^q_x)} \lesssim \| u_1 \|_{\dot{H}^{\delta-1}}$$

und

$$\| D^{-1} \int_0^t \sin((t-t')D) f(t') dt' \|_{L^p_t(\dot{H}^{-\delta,q})} \lesssim \| f \|_{L^{p'}_t(\dot{H}^{\delta-1,q'})}$$

(mit $D = (-\Delta)^{1/2} = \mathcal{F}^{-1} |\xi| \mathcal{F}$; weiterhin $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.)

Zur Wahl der Exponenten dient die folgende Überlegung: Wir suchen einen Fixpunkt

$$u(t) := \Lambda_{(u_0,u_1)}(u(t)) = \cos(tD) u_0 + \ldots$$

$$+ D^{-1} \int_0^t \sin((t-t')D) u(t')^k dt'$$

in einer Kugel $B_{R,T} \subset L^p_T(\dot{H}^{\sigma,q}) = L^p([0,T], \dot{H}^{\sigma,q}(\mathbb{R}^n))$ und müssen daher zeigen, dass $\Lambda_{(u_0,u_1)} : B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist. Nach Anwendung der Abschätzung für die inhomogene Gleichung auf den Duhamel-Term erhalten wir den Ausdruck

$$\| u^k \|_{L^{p'}_T(\dot{H}^{\sigma+2\delta,q'})}$$

zu dessen weiterer Abschätzung uns $\| u \|^k_{L^p_T(\dot{H}^{\sigma,q})}$ zur Verfügung steht. Ignorieren wir die Schwierig-

kerten der Abschätzung der Sobolev-Normen bezüglich der x-Variable, so ist $k \cdot p' = p(-\varepsilon)$ sinnvoll, im kritischen Fall mit $\varepsilon = 0$ sogar genau das richtige.

Wir wählen also

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{kp'} = \frac{1}{k} - \frac{1}{kp} \iff \frac{k+1}{p} = 1 \iff \underline{\underline{\frac{1}{p} = \frac{1}{k+1}}} \qquad (C1)$$

Durch die Forderung nach "admissability" wird dadurch aber auch zugleich q festgelegt. Es braucht

$$\frac{2}{p} + \frac{u-1}{q} = \frac{u-1}{2} \iff \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{p(u-1)} \iff \underline{\underline{\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(k+1)(u-1)}}} \qquad (C2)$$

Da $k \geq 2$ ist, ist auch die zweite Bedingung für "admissable" gewährleistet. Und schließlich ist auch der Ableitungsverlust δ gleich mit festgelegt:

$$\delta = \frac{u+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \iff \underline{\underline{\delta = \frac{u+1}{(k+1)(u-1)}}} \qquad (C3)$$

Und schließlich ist zur Anwendung der Abschätzung für die homogene lineare Gleichung die Wahl

$$\sigma = s - \delta$$

die einzig sinnvolle.

Lemma 1: Es seien $n \geq 2$, $k \geq \frac{n+3}{n-1}$, p, q, δ wie in (C1)–(C3) und $s = s_c = \frac{n}{2} - \frac{2}{k-1}$. Ferner sei

$$\Lambda_{(u_0,u_1)}(f_1,\dots,f_k)(t) := \cos(tD)u_0 + \sin(tD)D^{-1}u_1 + D^{-1}\int_0^t \sin((t-t')D)\prod_{j=1}^k f_j(t')\,dt'.$$

Dann ist $\|\Lambda_{(u_0,u_1)}(f_1,\dots,f_k)\|_{L_T^p(\dot H^{s-\delta,q})}$

$$\lesssim \|u_0\|_{\dot H^s} + \|u_1\|_{\dot H^{s-1}} + \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L_T^p(\dot H^{s-\delta,q})}.$$

Hierbei ist $T>0$ beliebig und kann auch durch L_t^p ersetzt werden.

Bew.: Aufgrund der Strichartz-Abschätzung für die homogene lineare Gleichung haben wir

$$\|\cos(tD)u_0 + D^{-1}\sin(tD)u_1\|_{L_T^p(\dot H_x^{s-\delta,q})} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^s} + \|u_1\|_{\dot H_x^{s-1}}.$$

Die Abschätzung für die inhomogene Gleichung liefert für den Duhamel-Term

$$\|D^{-1}\int_0^t \sin((t-t')D)\prod_{j=1}^k f_j(t')\,dt'\|_{L_T^p(\dot H_x^{s-\delta,q})}$$

$$\lesssim \|\prod_{j=1}^k f_j\|_{L_T^{p'}(\dot H_x^{s+\delta-1,q'})}$$

und nun schätzen wir zunächst die innere Norm (bei festem t) ab:

$$\Big\| \prod_{j=1}^{k} f_j(t) \Big\|_{\dot H^{s+\delta-1,q'}} \lesssim \sum_{i=1}^{k} \|f_i(t)\|_{\dot H^{s+\delta-1,q_1}} \Big\| \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} f_j(t) \Big\|_{L^{q_2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \|f_i(t)\|_{\dot H^{s+\delta-1,q_1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \|f_j(t)\|_{L^{(k-1)\cdot q_2}} ,$$

sofern $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Gelten nun für die Sobolev-Einbettungen

$$\dot H^{s-\delta,q} \subset \dot H^{s+\delta-1,q_1} \quad \text{und} \quad \dot H^{s-\delta,q} \subset L^{(k-1)q_2}, \qquad (\text{Sob})$$

so können wir fortfahren mit

$$\ldots \lesssim \prod_{j=1}^{k} \|f_j(t)\|_{\dot H^{s-\delta,q}} \qquad (\text{wie gewünscht!})$$

(Sob) erfordert

$$s-\delta-\frac{n}{q} = s+\delta-1-\frac{n}{q_1} \quad \text{und} \quad s-\delta \geq s+\delta-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\delta = \frac{n}{q_1} - \frac{n}{q} + 1 \ (i) \quad \text{und} \quad \delta \leq \frac{1}{2} \ (ii)$$

sowie

$$s-\delta-\frac{n}{q} = -\frac{n}{(k-1)q_2} < 0 \qquad (iii)$$

Mit $\delta = \frac{n+1}{(k+1)(n-1)}$ ist

$$(ii) \Longleftrightarrow 2n+2 \leq (k+1)(n-1) = k(n-1)+n-1$$

$$\Longleftrightarrow n+3 \leq k(n-1) \Longleftrightarrow \frac{n+3}{n-1} \leq k,$$

und das ist vorausgesetzt. Mit (i) wird q_1 festgelegt,

$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} + \frac{2\delta-1}{n}$ und damit weiter

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{q_1} = 1 - \frac{2}{q} - \frac{2\delta - 1}{4} = \frac{4}{(k+1)(k-1)} - \frac{2(k+1)}{4(k+1)(k-1)} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{(k+1)(k-1)} - \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{(k+1)(k-1)} + \frac{1}{4} = \frac{2}{(k+1)(k-1)}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4(k+1)} + \frac{1}{4} = \frac{k+3}{4(k+1)} > 0 \quad \left(\sim \text{ 2. Teil von (iii)}\right)$$

und damit schließlich der erste Teil von (iii)

$$\delta + \frac{4}{q} - \frac{4}{(k-1)q_2} = \frac{4+1}{(k+1)(4-1)} + \frac{4}{2} - \frac{2k}{(k+1)(k-1)} - \frac{k+3}{(k+1)(k-1)}$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{k+1}\left(\underbrace{\frac{2k-(k+1)}{k-1}}_{=1} + \frac{k+3}{k-1}\right) = \frac{4}{2} - \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{k-1+k+3}{k-1}\right)$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{2}{k-1}.$$

Folgerung: Unter den Voraussetzungen des Lemmas ist

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v) \|_{L^p_F(\dot{H}^{s-\delta,q})}$$

$$\lesssim \|u_0 - v_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1 - v_1\|_{\dot{H}^{s-1}}$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \|u\|^i_{L^p_F(\dot{H}^{s-\delta,q})} \|u-v\|_{L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q})} \|v\|^{k-1-i}_{L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q})}$$

Bew.: Folgt mit $u^k - v^k = (u-v)\sum_{i=0}^{k-1} u^i v^{k-1-i}$ aus dem Lemma.

Satz 1 (LWP-Theorem): Es seien $n \geq 2$ die Raumdimension, $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \frac{n+3}{n-1}$ und $s = \frac{n}{2} - \frac{2}{k-1}$ sowie

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{k+1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(k+1)(n-1)}, \quad \delta = \frac{n+1}{(k+1)(n-1)}.$$

Dann gibt es zu jedem $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ ein $T = T(u_0, u_1) > 0$ und eine eindeutige milde Lösung

$$u \in L_T^p(\dot{H}^{s-\delta,q})$$

des Cauchy-Problems $u(0) = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$ für die semilineare Wellengleichung

$$\Box u = u^k.$$

Für diese gilt $u \in C([0,T], \dot{H}^s) \cap C^1([0,T], \dot{H}^{s-1})$.

Bezüglich der stetigen Abhängigkeit der Lösung von den Daten gilt: Es gibt ein $R > 0$, so dass für alle $(u_0, u_1) \in D_T := \{(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1} : \|\cos(tD) u_0\|_{L_T^p(\dot{H}^{s-\delta,q})} + \|D^{-1} \sin(tD) u_1\|_{L_T^p(\dot{H}^{s-\delta,q})} \leq \frac{R}{2}\}$ die zugehörigen Lösungen u eine Lebensdauer $T(u_0, u_1) \geq T$ haben, und der Lösungsoperator

$$S_T : D_T \to L_T^p(\dot{H}^{s-\delta,q}), \quad (u_0, u_1) \mapsto S_T(u_0, u_1) := u$$

(= eindeutige Lösung des CPs) ist Lipschitz-stetig.

Bem. (i) Es gilt: $\bigcup_{T>0} D_T = \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$.

(ii) Die Lebensdauer $T(u_0, u_1)$ der Lösung hängt hier nicht allein von der Größe der Norm der Daten ab

Bew.: Zur Abkürzung setzen wir

$$\| \quad \|_T := \| \quad \|_{L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q})}$$

und, für $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$,

$$\|(u_0,u_1)\|_{0,T} := \|\cos(tD)u_0\|_T + \|D^{-1}\sin(tD)u_1\|_T .$$

Da $L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q})$ ein Strichartz-Raum ist, fallen diese Normen unabhängig von $T>0$ endlich aus, und für alle $(u_0,u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ gilt wg. $p<\infty$:

$$\lim_{T\to 0} \|(u_0,u_1)\|_{0,T} = 0 . \qquad (1)$$

Ferner haben wir nach (den Rechnungen zu) Lemma 1 mit einer geeigneten Konstante C (u.a. von T!):

$$\|\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v)\|_T \le \|(u_0-v_0, u_1-v_1)\|_{0,T}$$

$$+ C \cdot \|u-v\|_T \cdot \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \|u\|_T^j \, \|v\|_T^{k-1-j} . \qquad (2)$$

(i) Existenz und partielle Eindeutigkeitsaussage:

Nun setzen wir $R := \left(\frac{1}{2C}\right)^{\frac{1}{k-1}}$, so dass $CR^{k-1} = \frac{1}{2}$ ist, und wählen $T = T(u_0,u_1;R)$, so dass

$$\|(u_0,u_1)\|_{0,T} \le \frac{R}{2}$$

gilt. Dies ist möglich nach (1).

Nun definieren wir

$$B_{R,T} := \{ u \in L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q}) : \|u\|_T \leq R \}$$

und machen daraus mit $d(u,v) := \|u-v\|_T$ einen vollständigen metrischen Raum $(B_{R,T}, d)$.

Nach (2) haben wir (mit $v_0 = v_1 = v = 0$)

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_T \leq \| (u_0,u_1) \|_{0,T} + C \|u\|_T^k$$

$$\text{für } u \in B_{R,T} \qquad \leq \frac{R}{2} + CR^k = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,$$

so dass $\Lambda_{(u_0,u_1)} : B_{R,T} \to B_{R,T}$ abbildet. Ferner liefert (2) mit $u_i = v_i$ für $u, v \in B_{R,T}$

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(u_0,u_1)}(v) \|_T \leq C \|u-v\|_T R^{k-1} = \frac{1}{2} \|u-v\|_T,$$

was bedeutet, dass $\Lambda_{(u_0,u_1)}$ eine Kontraktion ist.

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert:

Es existiert eine Lösung $u \in L^p_T(\dot{H}^{s-\delta,q})$ von $\underline{\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) = u}$, die in $B_{R,T}$ eindeutig ist.

(ii) Regularität: Es ist $u = u_h + u_p$ mit

$$u_h(t) = \cos(tD) u_0 + D^{-1} \sin(tD) u_1,$$

und $u_h \in C([0,T], \dot{H}^s) \cap C^1([0,T], \dot{H}^{s-1})$ folgt aus den Eigenschaften der Evolutionsoperatoren $\cos(tD)$ bzw. $\sin(tD)$.

Für u_p schreiben wir

$$u_p(t+h)-u_p(t) = D^{-1}\int_0^{t+h} \sin((t+h-t')D)\, u^k(t')\,dt'$$
$$- D^{-1}\int_0^{t} \sin((t-t')D)\, u^k(t')\,dt'$$

$$= D^{-1}\cdot\int_0^{t} (\sin((t+h-t')D) - \sin((t-t')D))\, u^k(t')\,dt'$$

$$+ D^{-1}\int_t^{t+h} \sin((t+h-t')D)\, u^k(t')\,dt' =: I_h + II_h$$

Um zu zeigen, dass $\lim_{h\to 0} I_h + II_h = 0$ ist, können wir hierin $\sin(\lambda D)$ durch $\exp(i\lambda D)$ ersetzen. Dann geht I_h über in

$$(\exp(ihD)-I)\, D^{-1}\cdot\int_0^t \exp(i(t-t')D)\, u^k(t')\,dt',$$

und aufgrund der starken Stetigkeit von $(\exp(itD))_t$ auf jedem $\dot H^s$ ist für diesen Term lediglich zu zeigen, dass $D^{-1}\int_0^t \exp(i(t-t')D)\, u^k(t')\,dt' \in \dot H^s$ gilt.

Nun haben wir aber aus der Strichartz-Abschätzung für T^* (Dualform der Ungl. für die homogene Gleichung)

$$\| D^{-1}\int_0^t e^{-it'D} u^k(t')\,dt' \|_{\dot H^s} \lesssim \| u^k \|_{L^{p'}([0,t],\, \dot H^{s+\delta-1,q'})}$$

$$\lesssim \| u \|^k_{L^p([0,t],\, \dot H^{s-\delta,q})} < \infty$$

nach den Rechnungen zu Lemma 1

Ebenso erhalten wir

$$\| II_h \|_{\dot H^s} \lesssim \| u \|^k_{L^p([t,t+h],\, \dot H^{s-\delta,q})} \longrightarrow 0 \quad (h\to 0),$$

da $u \in L^p_T(\dot H^{s-\delta,q})$. Damit ist gezeigt:

Ist $u \in L^p_T(\dot H^{s-\delta,q})$ eine Lösung von $\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) = u$, so gilt $u \in C([0,T], \dot H^s)$. Des weiteren haben wir

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t D^{-1} \sin((t-t')D)\, u^k(t')\,dt'$$

in $\dot H^{s-1}$!

$$= \int_0^t \cos((t-t')D)\, u^k(t')\,dt',$$

und dieselben Argumente zeigen $\frac{\partial u_p}{\partial t} \in C([0,T], \dot H^{s-1})$

(iii) Eindeutigkeit in $L^p_T(\dot H^{s-\delta,q})$:

Nun seien $u, v \in L^p_T(\dot H^{s-\delta,q})$ mit $\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) = \Lambda_{(u_0,u_1)}(v) = u$. Dann sind nach (ii) auch $u, v \in C([0,T], \dot H^s)$, und die Definition

$$T^* := \inf\{t \in [0,T] : u(t) \neq v(t)\}$$

ist sinnvoll. Dann ist nach dem bisherigen

$$T^* > 0, \qquad u(T^*) = v(T^*) \in \dot H^s \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(T^*) = \frac{\partial v}{\partial t}(T^*) \in \dot H^{s-1}.$$

Für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und $0 \le h \le \varepsilon$ setzen wir $\tilde u(h) := u(T^*+h)$ und $\tilde v(h) := v(T^*+h)$. Dann lösen $\tilde u, \tilde v$ das AWP $\Box u = u^k$ mit

$$\tilde u(0) = \tilde v(0) = u(T^*), \qquad \frac{\partial \tilde u}{\partial t}(0) = \frac{\partial \tilde v}{\partial t}(0) = \frac{\partial u}{\partial t}(T^*)$$

und liegen in einer Kugel $B_{R,\varepsilon} \subset L^p([0,\varepsilon], \dot H^{s-\delta,q})$, wo man die Eindeutigkeit hat (wenn ε klein genug ist). Dann ist aber $u(T^*+h) = v(T^*+h)$ $\forall h \in [0,\varepsilon]$, ein Widerspruch zur Definition von T^*.

(iv) Stetige Abhängigkeit

Nun sei $T>0$ vorgegeben und $(u_0,u_1),(v_0,v_1) \in D_T$, so dass

$$\|(u_0,u_1)\|_{0,T} \leq \frac{R}{2} \quad \text{und} \quad \|(v_0,v_1)\|_{0,T} \leq \frac{R}{2}.$$

Für die eindeutig bestimmten Lösungen u, v von

$\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) = u$ bzw. $\Lambda_{(v_0,v_1)}(v) = v$ gilt dann $u,v \in B_{R,T}$.

Nach (2) haben wir

$$\|u-v\|_T = \|\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v)\|_T$$

$$\leq \|(u_0-v_0,u_1-v_1)\|_{0,T} + \underbrace{C \cdot R^{k-1}}_{=\frac{1}{2}} \|u-v\|_T$$

$$\Longrightarrow \|u-v\|_T \leq 2\|(u_0-v_0,u_1-v_1)\|_{0,T}$$

$$\leq 2 C_{Str.} \left(\|u_0-v_0\|_{\dot H^s} + \|u_1-v_1\|_{\dot H^{s-1}} \right). \qquad \square$$

<u>Satz</u> 2 (GKP und Existenz von Streuzuständen). Es seien u, k, s, p, q, δ wie in Satz 1. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $(u_0,u_1) \in \dot H^s \times \dot H^{s-1}$ mit $\|u_0\|_{\dot H^s} + \|u_1\|_{\dot H^{s-1}} \leq \varepsilon_0$ eine eindeutige globale Lösung $u \in L_t^p(\dot H^{s-\delta,q})$ des Cauchy-Problems

$$\Box u = u^k, \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x)$$

existiert, die in $L_t^p(\dot H^{s-\delta,q})$ eindeutig ist. Ferner gilt

$$u \in C(\mathbb{R}, \dot H^s) \cap C^1(\mathbb{R}, \dot H^{s-1}),$$

und der Lösungsoperator

$$S_\infty : \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1} \supset B_{\varepsilon_0} \longrightarrow L_t^p(H^{s-\delta,q})$$

ist Lipschitz-stetig. Darüber hinaus existieren zu jeder dieser Lösungen Streuzustände $(u_{0,\pm}, u_{1,\pm}) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, so dass

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| u(t) - \cos(tD) u_{0,\pm} - D^{-1} \sin(tD) u_{1,\pm} \|_{\dot{H}^s} = 0 .$$

<u>Bew.</u>: Wir setzen $\| \ \| = \| \ \|_{L_t^p(\dot{H}^{s-\delta,q})}$. Nach Lemma 1 steht uns die Abschätzung

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v) \|$$

$$\leq C \left(\| u_0 - v_0 \|_{\dot{H}^s} + \| u_1 - v_1 \|_{\dot{H}^{s-1}} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \| u \|^j \| v \|^{k-1-j} \| u - v \| \right)$$

zur Verfügung. Wir wählen

$$R = \left(\frac{1}{2C} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \left(\text{wie oben, so das } R^{k-1} = \frac{1}{2C} \right)$$

und $\varepsilon_0 = \frac{R}{2C}$. Nun seien

$$(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1} \text{ mit } \| u_0 \|_{\dot{H}^s} + \| u_1 \|_{\dot{H}^{s-1}} \leq \varepsilon_0$$

und $u, v \in B_R := \{ u \in L_t^p(\dot{H}^{s-\delta,q}) : \| u \| \leq R \}$, wobei B_R wieder mit der natürlichen Metrik d ausgestattet und somit (B_R, d) vollständig wird.

Dann haben wir

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \| \leq C(\varepsilon_0 + R^k) \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

und

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(u_0,u_1)}(v) \| \leq C R^{k-1} \| u - v \| = \frac{1}{2} \| u - v \| ,$$

so dass der Banachsche Fixpunktsatz eine in B_R eindeutige Lösung $u \in L_t^p(\dot{H}^{s-\delta,q})$ von $\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) = u$ liefert.

Eindeutigkeit ist eine zeitlich lokale Eigenschaft, ebenso die Regularität, so dass nach Satz 1 hierzu nichts mehr zu sagen ist.

Für die Lipschitz-Stetigkeit des Lösungsoperators argumentieren wir wie oben: Sind $(u_0,u_1),(v_0,v_1) \in B_{\varepsilon_0} \subset \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$, gilt für die zugehörigen Lösungen $u,v \in B_R$, so dass

$$\| u - v \| = \| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v) \|$$

$$\leq C (\| u_0 - v_0 \|_{\dot{H}^s} + \| u_1 - v_1 \|_{\dot{H}^{s-1}}) + \underbrace{C R^{k-1}}_{= \frac{1}{2}} \| u - v \|$$

$$\Rightarrow \| u - v \| \leq 2C (\| u_0 - v_0 \|_{\dot{H}^s} + \| u_1 - v_1 \|_{\dot{H}^{s-1}})$$

Für die Existenz der Streuzustände stellen wir zunächst fest, dass nach der Strichartz-Abschätzung für T^*

$$\left\| \int_I e^{\mp i t' D} u^k(t')\,dt' \right\|_{\dot H^{s-1}} \lesssim \| u^k \|_{L_I^{p'}(\dot H^{s+\delta-1,q'})}$$

Rechnung zu Lemma 1 $\lesssim \| u \|^k_{L^p(I,\, \dot H^{s-\delta,q'})}$ (3)

Sind hierin $I = [t,\infty)$ oder $I = (-\infty, t]$, so verschwindet rechts. die rechte Seite für $t \to \infty$ bzw. $t \to -\infty$. ~~Also~~ existieren die $\dot H^s$-wertigen Integrale

$$D^{-1}\int_0^\infty e^{\mp i t' D} u^k(t')\,dt' \quad \text{und} \quad D^{-1}\int_{-\infty}^0 e^{\mp i D t'} u^k(t')\,dt'$$

Nun setzen wir

$$u_{0,+} := u_0 + D^{-1}\int_0^\infty \sin(-t'D)\, u^k(t')\,dt' \in \dot H^s$$

$$u_{1,+} := u_1 + \int_0^\infty \cos(-t'D)\, u^k(t')\,dt' \in \dot H^{s-1}$$

Dann gilt

$$u(t) - \cos(tD)\,u_{0,+} - D^{-1}\sin(tD)\,u_{1,+}$$

$$= D^{-1}\int_0^t \sin((t-t')D)\, u^k(t')\,dt'$$

$$- D^{-1}\int_0^\infty \big(\cos(tD)\sin(-t'D) + \sin(tD)\cos(-t'D)\big)\, u^k(t')\,dt'$$

$$= -D^{-1}\int_t^\infty \sin((t-t')D)\, u^k(t')\,dt' \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \text{ in } \dot H^s$$

aufgrund von (3).

Für den Grenzwert $t \to -\infty$ entsprechend setzt

$$u_{0,-} := u_0 - D^{-1}\int_{-\infty}^{0} \sin(-t'D)\,u^k(t')\,dt' \quad \text{und}$$

$$u_{1,-} := u_1 - \int_{-\infty}^{0} \cos(-t'D)\,u^k(t')\,dt'.$$

— — — — — — — — — — — —

Der obige Beweis des GWP erfordert die Kleinheit der Daten, andernfalls ist kein Kontraktionsargument möglich. Um GWP bei großen Daten zu erhalten, muß man ein LWP-Ergebnis mit a-priori-Abschätzungen verbinden, die man i.allg. aus Erhaltungssätzen erhält.[1] Der Schluß

$$\text{LWP} \wedge \text{Erhaltungsgröße} \Longrightarrow \text{GWP} \qquad (*)$$

erfordert wiederum die Kontrolle der Lebensdauer der lokalen Lösungen durch die Größe der Normen der Daten, die ihrerseits durch die Erhaltungsgröße dominiert werden. Zwei Aspekte des Schlusses (*) möchte ich im folgenden diskutieren, damit die "technicalities" nicht zuviel Zeit einnehmen, anhand des folgenden Beispiels:

---

1) Das haben wir ja im Prinzip schon auf dem abstrakten Level für die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} + Au = N(u)$ zu Beginn der Vorlesung diskutiert, Stichwort: Blow up-alternative

Bsp.: Betrachten wir in drei Raumdimensionen das CP

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = u_0 \in H^s, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^{s-1} \\ \text{für die kubische Klein-Gordon-Gleichung} \\ \Box u + u + |u|^2 u = 0. \end{array}\right\} \quad (CP_3)$$

Die relevante Erhaltungsgröße ist hier die Energie

$$E(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 + |u(t,x)|^2 + \frac{1}{2}|u(t,x)|^4 dx,$$

die $\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\|_{L^2}^2$ kontrolliert. Andererseits haben Daten $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$ auch endliche Energie, denn $H^1 \subset L^2 \cap L^6 \subset L^4$ (Sobolev- und Lyapunow-Ungleichungen).

Die kritische Sobolev-Regularität – übrigens von der Wellengleichung – ist in diesem Fall

$$s_c = \frac{4}{2} - \frac{2}{k-1} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

und LWP im kritischen Fall haben wir oben gezeigt.

Jetzt: LWP in $H^s \times H^{s-1}$ für $s = \frac{1}{2} + 2\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1]$, (also $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$) zwischen s_c und dem "Energy-space", mit Kontrolle der Lebensdauer durch die Norm der Daten.

(was ja im kritischen Fall nicht möglich ist!)

Beweisskizze: In drei Raumdimensionen ist die Bedingung für "wave admissable" gerade

$$\frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} = \frac{n-1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2},$$

also $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \quad$ und $\quad 0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$.

Wählen wir $\frac{1}{p} = \frac{1}{4} - \varepsilon$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{4} + \varepsilon$ (mit $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$, wie oben), so sind diese Bedingungen erfüllt. Der Ableitungsverlust in den Strichartz-Abschätzungen ist bei dieser Wahl

$$\delta = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \varepsilon\right) = \frac{1}{2} - 2\varepsilon$$

und in diesem Fall ist $s + \delta - 1 = \frac{1}{2} + 2\varepsilon + \frac{1}{2} - 2\varepsilon - 1 = 0$.

Beachte: Für $s = 1$ ist $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und wir haben $\frac{1}{p} = 0$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Der "Strichartz-Raum" für die Iteration wird dann gerade $L^p_T(H^{s-\delta,q}) = L^\infty_T(H^1)$, in diesem Fall machen wir also nur von der trivialen Endpunkt-Abschätzung Gebrauch.

Wir setzen an für ein Kontraktionsargument in

$$B_{R,T} \subset L^p_T(H^{s-\delta,q}).$$

Dann haben wir für $\Lambda_{(u_0,u_1)}(u)(t)$

$$= W'(t)u_0 + W(t)u_1 - \int_0^t W(t-t')\,|u(t')|^2 u(t')\,dt'$$

mit $\quad W(t) = J^{-1}\sin(tJ), \quad J = \mathcal{F}_x^{-1}\langle\xi\rangle\mathcal{F}_x$

die Abschätzung (Strichartz, homogen und inhomogen)

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^p(H^{s-\delta,q})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}$$

$$+ \| u^3 \|_{L_T^{p'}(\underbrace{H_x^{s+\delta-1,q'}}_{\underbrace{=0}_{L_x^{q'}}})} ,$$

so dass der letzte Beitrag $\lesssim \|u\|^3_{L_T^{3p'}(L_x^{3q'})}$.

Nun haben wir

$$s-\delta-\frac{3}{q} = \frac{1}{2}+2\varepsilon-\left(\frac{1}{2}-2\varepsilon\right)-\frac{3}{4}-3\varepsilon = \varepsilon-\frac{3}{4}$$

und andererseits

$$-\frac{3}{3q'} = -\frac{1}{q'} = \frac{1}{q}-1 = \frac{1}{4}+\varepsilon-1 = \varepsilon-\frac{3}{4},$$

so dass die Sobolev-Einbettung $H^{s-\delta,q} \subset L^{3q'}$ gilt.

Weiter ist

$$\frac{1}{3p'} = \frac{1}{r}+\frac{1}{p} \quad \text{für} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{3p'}-\frac{1}{p} = \frac{1}{3}-\frac{4}{3p} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{4\varepsilon}{3} = \frac{4\varepsilon}{3}$$

und also

$$\|u\|_{L_T^{3p'}(L_x^{3q'})} \lesssim T^{\frac{4\varepsilon}{3}} \|u\|_{L_T^p(H^{s-\delta,q})}$$

Insgesamt:

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^p(H^{s-\delta,q})} \lesssim \|(u_0,u_1)\|_{H^s\times H^{s-1}} + T^{4\varepsilon} \|u\|^3_{L_T^p(H^{s-\delta,q})}$$

Mit $R \sim \|(u_0,u_1)\|_{H^s\times H^{s-1}}$ und $T^{4\varepsilon}R^2 \leq \frac{1}{2}$,

also $T \sim \left(\frac{1}{R^2}\right)^{\frac{1}{4\varepsilon}} = R^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$ können wir ein

Kontraktionsargument durchführen (für die Differenzabschätzungen benötigen wir möglicherweise größere Konstanten, aber das ändert ja nichts wesentliches.)

Die einmalige Anwendung des Fixpunktsatzes ergibt also als untere Schranke für die Lebensdauer:

$$T = T(\|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}}) \gtrsim (\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s})^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$$

wobei $\varepsilon = \frac{s-\frac{1}{2}}{2}$, also $2\varepsilon = s - \frac{1}{2}$ und damit der Exponent $-\frac{1}{2\varepsilon} = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}}$ wird.

Für $s \searrow \frac{1}{2}$, d.h. $\varepsilon \searrow 0$ wird die Kontrolle der Lebensdauer durch die Größe der (Normen der) Daten immer schwächer, und geht schließlich im Grenzfall ganz verloren.

Für $s = 1$ hingegen haben wir (mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$)

$$T(\|u_0\|_{H^1}, \|u_1\|_{L^2}) \gtrsim (\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^2})^{-2} \gtrsim E(u(0))^{-1}$$

und wir können auf globale Wohlgestelltheit schließen:

<u>Proposition 1:</u> (CP_3) ist global wohlgestellt für Daten $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$.

Persistence of higher regularity

Nehmen wir an, uns werden neue Daten

$$(u_0, u_1) \in H^\sigma \times H^{\sigma-1}$$

für ein $\sigma > 1$ vorgelegt. Dann haben wir insbesondere $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$ und daher eine eindeutige globale Lösung

$$u \in C_b([0,\infty), H^1) \cap C_b^1([0,\infty), L^2),$$

wobei sich das b für "beschränkt" aus der Energieerhaltung ergibt. Nun ist zumindest denkbar, dass die höheren Sobolev-Normen in endlicher Zeit explodieren, dass also für ein $T^* < \infty$ gilt

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{H^\sigma} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|_{H^{\sigma-1}} = \infty .$$

Diese Möglichkeit können wir ausschließen, wenn wir das obige Fixpunktargument etwas verfeinern.

Behalten wir die Wahlen der Exponenten

$s \in (\frac{1}{2}, 1]$ vorgegeben, dazu $\varepsilon, p, q, \delta$

bei und nehmen lediglich ein $\sigma \geq s$ hinzu.

Die Strichartz-Normen kürzen wir ab:

$$\| \quad \|_{L_T^p(H^{\sigma-\delta,q})} =: ||| \quad |||_\sigma$$

Dann zeigen unsere bisherigen Rechnungen:

$$|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v)|||_s$$

$$\lesssim \|u_0 - v_0\|_{H^s} + \|u_1 - v_1\|_{H^{s-1}} + T^{4\varepsilon}(|||u|||_s + |||v|||_s)^2 \, |||u-v|||_s$$

und wenn wir statt der Hölder-Ungleichung die verallgemeinerte Leibniz-Regel verwenden

$$|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(v_0,v_1)}(v)|||_\sigma \lesssim \|u_0 - v_0\|_{H^\sigma} + \|u_1 - v_1\|_{H^{\sigma-1}}$$

$$+ T^{4\varepsilon}\{(|||u|||_\sigma + |||v|||_\sigma)(|||u|||_s + |||v|||_s)\,|||u-v|||_s$$

$$+ (|||u|||_s + |||v|||_s)^2 \, |||u-v|||_\sigma\}.$$

Hierin stehen die höheren Ableitungen J^σ linear auf. Wir definieren

$$B_{R_s,R_\sigma,T} := \{u \in L^p_T(H^{\sigma-\delta,q}) : |||u|||_s \le R_s \wedge |||u|||_\sigma \le R_\sigma\}$$

Nun seien $u, v \in B_{R_s,R_\sigma,T}$. Dann erhalten wir

$$|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u)|||_\sigma \lesssim \|u_0\|_\sigma + \|u_1\|_\sigma + T^{4\varepsilon} R_s^2 R_\sigma,$$

was insbesondere auch für $\sigma = s$ gilt, und

$$|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(u_0,u_1)}(v)|||_\sigma \lesssim$$

$$T^{4\varepsilon}\{R_s R_\sigma \, |||u-v|||_s + R_s^2 \, |||u-v|||_\sigma\},$$

was sich für $\sigma = s$ reduziert auf

$$\lesssim T^{4\varepsilon} R_s^2 \, |||u-v|||_s.$$

Ist jetzt C die größte aller oben auftretenden Konstanten, so treffen wir die Wahlen

$$R_\sigma = 2C(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}) \quad , \quad R_\sigma = 2C(\|u_0\|_{H^\sigma} + \|u_1\|_{H^{\sigma-1}})$$

und $T^{4\varepsilon} \cdot C R_\sigma^2 = \frac{1}{2}$, also $T = \left(\frac{1}{2CR_s^2}\right)^{\frac{1}{4\varepsilon}} = \tilde{C} \cdot R_s^{-\frac{1}{2\varepsilon}}$,

also werden R_s und T wie vorher (evtl. mit einer größeren Konstante) gewählt, insbesondere ist

$$T = T(\|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}})$$

und hängt also nicht von den σ-Normen ab.

Mit dieser Wahl haben wir

$$|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u)|||_\sigma \leq R_\sigma ,$$

und das gilt auch für $\sigma = s$, so dass

$$\Lambda_{(u_0,u_1)} : B_{R_s,R_\sigma,T} \longrightarrow B_{R_s,R_\sigma,T} .$$

Ferner: $|||\Lambda_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda_{(u_0,u_1)}(v)|||_s \leq \frac{1}{2}|||u-v|||_s$, so dass nach Iteration für $n \geq 1$: $|||\Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v)|||_s \leq \frac{1}{2^n}|||u-v|||_s$. (*)

Für die $|||\ \ |||_\sigma$ der Differenz erhalten wir:

$$|||\Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v)|||_\sigma \leq \frac{1}{2^n}\left(1 + n\frac{R_\sigma}{R_s}\right)|||u-v|||_\sigma$$

bzw. durch Induktion, wobei für $n=0$ nichts z.z. ist:

$$|||\Lambda^{n+1}_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^{n+1}_{(u_0,u_1)}(v)|||_\sigma \leq CT^{4\varepsilon}\Big(R_s^2\, |||\Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v)|||_\sigma$$
$$+ R_s R_\sigma\, |||\Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v)|||_s\Big)$$

mit $T^{4\varepsilon} C R_s^2 = \frac{1}{2}$, (*) und IV.:

$$\leq \frac{1}{2}\left(\left|\!\left|\!\left| \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v) \right|\!\right|\!\right|_\sigma + \frac{R_\sigma}{R_s} \left|\!\left|\!\left| u - v \right|\!\right|\!\right|_s \right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\left(1 + n\frac{R_\sigma}{R_s}\right) \left|\!\left|\!\left| u-v \right|\!\right|\!\right|_\sigma + \frac{1}{2^n}\frac{R_\sigma}{R_s} \left|\!\left|\!\left| u-v \right|\!\right|\!\right|_s \right)$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + (n+1)\frac{R_\sigma}{R_s}\right) \left|\!\left|\!\left| u-v \right|\!\right|\!\right|_\sigma ,$$

wobei im letzten "$\leq$" die Monotonie von $|\!|\!|\ \ |\!|\!|_\sigma$ benutzt wurde. Damit ist

$$\Lambda_{(u_0,u_1)} : B_{R_s,R_\sigma,T} \longrightarrow B_{R_s,R_\sigma,T}$$

zwar keine Kontraktion, aber wir verfügen über eine Abschätzung

$$\left|\!\left|\!\left| \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(v) \right|\!\right|\!\right|_\sigma \leq a_n \left|\!\left|\!\left| u-v \right|\!\right|\!\right|_\sigma$$

mit einer summierbaren Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Daraus folgt, dass $(\Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u))_{n\in\mathbb{N}_0}$ bei beliebigem Startwert eine Cauchy-Folge ist, denn für $n \geq m$ gilt

$$\left|\!\left|\!\left| \Lambda^n_{(u_0,u_1)}(u) - \Lambda^m_{(u_0,u_1)}(u) \right|\!\right|\!\right|_\sigma \leq \sum_{k=m}^{n-1} \left|\!\left|\!\left| \Lambda^{k+1}_{(\,)}(u) - \Lambda^k_{(\,)}(u) \right|\!\right|\!\right|_\sigma$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} a_k \left|\!\left|\!\left| \Lambda_{(\,)}(u) - u \right|\!\right|\!\right|_\sigma \longrightarrow 0 \quad (m,n \to \infty)$$

Also konvergiert die Folge der Iterierten, und der Grenzwert ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Lambda_{(\cdot)}$. (FPS von Weissinger, der für $a_k = q^k$, $q \in (0,1)$ in der Banachschen übergeht.)

Wir erhalten somit die "Beständigkeit" (=persistence) der höheren Regularität σ:

Ist (CP_3) wohlgestellt in H^s mit Lösung

$$u \in C([0,T], H^s) \cap C^1([0,T], H^{s-1}),$$

und sind die Daten $(u_0, u_1) \in H^\sigma \times H^{\sigma-1}$ für ein $\sigma > s$, so ist auch $u \in C([0,T], H^\sigma) \cap C^1([0,T], H^{\sigma-1})$.

Insbesondere haben wir für Daten in $H^\sigma \times H^{\sigma-1}$ mit $\sigma > 1$, dass für die Lösung gilt

$$u \in C([0,\infty), H^\sigma) \cap C^1([0,\infty), H^{\sigma-1}),$$

allerdings nicht mehr notwendig beschränkt.

Globale Wohlgestelltheit <u>innerhalb</u> des Energie-Raumes

(Nach einer Idee von J. Bourgain († 22.12.2018), Ausführung für

(CP_3) $(\Box + 1)u + |u|^2 u = 0$, $(u(0), \frac{\partial u}{\partial t}(0)) = (u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$ (CP_3)

in drei Raumdimensionen von KPV, 2000.)

<u>Beh.</u>: Sei $s \in (\frac{3}{4}, 1)$. Dann existieren die lokalen Lösungen $u \in C([0,T], H^s) \cap C^1([0,T], H^{s-1})$ von (CP_3) auf jedem Zeitintervall $[0,T]$, $T > 0$.

Ich beschreibe zunächst das Iterationsverfahren, und werde mich dann den Abschätzungen zu, um zu zeigen, dass auf diese Weise die Existenz auf einem vorgegebenen Intervall $[0,T]$ erreicht werden kann:

Die Daten (u_0, u_1) werden zerlegt in

$$u_0 = v_0 + w_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = P_N u_0 \in H^1$$

$$u_1 = v_1 + w_1 \quad , \quad v_1 = P_N u_1 \in L^2$$

wobei N an später Stelle ($\gg 1$) gewählt wird.

Es gelten $v_i \in H^\sigma$ für alle $\sigma \geq 0$, und für $\sigma \geq s$ gilt

$$\|v_0\|_{H^\sigma} + \|v_1\|_{H^{\sigma-1}} \leq N^{\sigma-s} \left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} \right)$$

(großer, glatter Anteil, insbesondere ist die Energie von (v_0, v_1) $\sim N^{2(1-s)} < \infty$). Für $\sigma \leq s$ haben wir

$$\|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}} \leq N^{\sigma-s} \left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} \right),$$

der kleine (wg. des Faktors $N^{\sigma-s}$) irregeläre Anteil.

<u>1. Schritt</u>: <u>Lösung auf einem Teilintervall $[0,\Delta T]$.</u>

Das Problem $v(0) = v_0$, $\frac{\partial v}{\partial t}(0) = v_1$ für die Gleichung

$$(\Box + 1) v + |v|^2 v = 0$$

ist global wohlgestellt, besitzt also eine Lösung

$$v \in C_b([0,\infty], H^1) \cap C_b^1([0,\infty), L^2)$$

Eine Lösung $u \in C([0,\Delta T], H^s) \cap C([0,\Delta T], H^{s-1})$ von

$$(\Box + 1)\, u + |u|^2 u = 0 \quad , \quad u(0) = u_0 ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

suchen wir in der Form $u = v + w$, also $w = u - v$,

also

$$(\Box + 1)\, w = (\Box + 1)(u) - (\Box + 1)\, v = -|u|^2 u + |v|^2 v$$

$$= |v|^2 v - |v + w|^2 (v + w) = -F(v, w)$$

mit typischen Beiträgen zu F:

$$F_1(v, w) = v^2 w \qquad\qquad F_3 = w^3$$

(komplexe Konjugation spielt keine Rolle, der Term vw^2 ist „intermediate")

Das Problem $(\Box + 1)\, w + F(v, w) = 0,\ w(0) = w_0,\ \frac{\partial w}{\partial t}(0) = w_1$ (CP_w) werden wir mit dem FPS lösen,(!!) auf einem möglichst großen Zeitintervall ΔT. Dazu benötigen wir Abschätzungen der Strichartz-Normen von v → später.(!)

Nun ist $u(\Delta T) = v(\Delta T) + w(\Delta T)$ und

$$w(\Delta T) = \underbrace{\cos(\Delta T\, J)\, w_0}_{W'(\Delta T)} + \underbrace{J^{-1} \sin(\Delta T\, J)\, w_1}_{W(\Delta T)} + \underbrace{J^{-1} \int_0^{\Delta T} \sin((\Delta T - t')\, J)\, F(t')\, dt'}_{= z(\Delta T)}$$

und alles weitere beruht auf der Beobachtung, dass der Duhamelterm $z(\Delta T)$, der zu w gehört, aufgrund des Operators J^{-1} glatter ist als w, genauer $z(\Delta T) \in H^1$, also in der weiteren Evolution der Ein-

Gleichheit unterworfen. (Zu zeigen sind also $z(\Delta T) \in H^1$ und eine (gute) Abschätzung für $\|z(\Delta T)\|_{H^1}$. (!!!))

<u>2. Schritt: Konstruktion einer Lösung auf $[\Delta T, 2\Delta T]$</u>, wieder in der Form $u(\Delta T + \cdot) = \tilde{v} + \tilde{w}$, wobei allerdings jetzt

$$(\Box + 1)\tilde{v} + |\tilde{v}|^2 \tilde{v} = 0$$

$$\tilde{v}(0) = v(\Delta T) + z(\Delta T) \in H^1$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(0) = \frac{\partial v}{\partial t}(\Delta T) + \frac{\partial z}{\partial t}(\Delta T) \in L^2$$

und

$$(\Box + 1)\tilde{w} + F(\tilde{v}, \tilde{w}) = 0$$

$$\tilde{w}(0) = w(\Delta T) - z(\Delta T) = \underbrace{W'(\Delta T) w_0 + W(\Delta T) w_1}_{w_{ein}} \in H^s$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(0) = W''(\Delta T) w_0 + W'(\Delta T) w_1 = (I - \Delta) W(\Delta T) w_0 + W'(\Delta T) w_1 \in H^{s-1}$$

und das wird jetzt so oft wiederholt, bis das vorgegebene T erreicht ist, schematisch:

$$t = 0 \qquad \Delta T$$

$$(v_0, v_1) \in H^1 \times L^2 \longrightarrow (v(\Delta T), v_t(\Delta T)) \qquad = (\tilde{v}(0), \tilde{v}_t(0))$$

$$(w_0, w_1) \in H^s \times H^{s-1} \longrightarrow \left(w_{ein}(\Delta T), \frac{\partial w_{ein}}{\partial t}(\Delta T)\right) + \left(z(\Delta T), \frac{\partial z}{\partial t}(\Delta T)\right)$$

$$2\Delta T$$

$$H^1 \times L^2 \longrightarrow \left(\tilde{v}(\Delta T), \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(\Delta T)\right) \qquad = \left(\tilde{\tilde{v}}(0), \tilde{\tilde{v}}_t(0)\right)$$

$$H^s \times H^{s-1} \longrightarrow \left(w_{ein}(2\Delta T), \frac{\partial w_{ein}}{\partial t}(2\Delta T)\right) + \left(\tilde{z}(\Delta T), \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}(\Delta T)\right)$$

$\longrightarrow$ ...

Dabei muss man sicherstellen, dass die Schrittweite ΔT in jedem Schritt gleich groß gewählt werden kann.

Da die Lösungen $v, \tilde{v}, \ldots$ alle global sind, wird die Schrittweite ΔT begrenzt durch die Wahl, die wir im Beweis der lokalen Existenz für $w, \tilde{w}, \ldots$ treffen. Wir werden sehen (bzw. die Sache so einrichten), dass

$$\Delta T = \Delta T\, \Xi\big(\| \underbrace{v(k\Delta T)}_{=\tilde{v}^{(k)}(0)} \|_{H^1} + \| \tfrac{\partial v}{\partial t}(k\Delta T) \|_{L^2} \big)$$

gewählt werden kann. Dann haben wir lediglich darauf zu achten, dass der Zuwachs der Energie von v (durch die Additionen der Beiträge von $z(\Delta T), \tilde{z}(\Delta T), \ldots$) während des ganzen Prozesses nicht die ursprüngliche übersteigt – einen Faktor 2 bei der Gesamtenergie können wir verkraften.

Und jetzt wenden wir uns den Rechnungen zu: Die "homogene Version" der Strichartz-Abschätzungen notieren wir in der Form:

Löst φ das CP $(\Box + 1)\varphi = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) = \varphi_1$,

so ist für jedes $\theta \in [0,1)$

$$\| J^{1-\theta} \varphi \|_{L_t^{\frac{2}{\theta}}(L_x^{\frac{2}{1-\theta}})} \lesssim_\theta \| \varphi_0 \|_{H^1} + \| \varphi_1 \|_{L^2}$$

(Der Ableitungsverlust ist gerade $\delta = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \underset{\text{hier}}{=} 2 \cdot \frac{1}{p} = \theta$ mit den Bez. $p = \frac{2}{\theta}$, $q = \frac{2}{1-\theta}$. $\theta = 1 \mathrel{\hat{=}} q = \infty$ ist ausgeschlossen. Die Konstante kann für $\theta \in [0, 1-\varepsilon_0]$ glm. gewählt werden.)

Lemma 2 Für die reguläre Lösung v von

$$(\Box+1)v + |v|^2 v = 0, \quad v(0)=v_0, \ \frac{\partial v}{\partial t}(0) = v_1$$

auf dem ersten Zeitintervall $[0,\Delta T]$ gelten

$$\|(v(t), \tfrac{\partial v}{\partial t}(t))\|_{H^1\times L^2} + \|v(t)\|_{L^4}^2 \sim N^{1-s}$$

sowie, für jedes $\theta \in [0,1)$,

$$\|J^{1-\theta} v\|_{L_{\Delta T}^{\frac{2}{\theta}}(L_x^{\frac{2}{1-\theta}})} \lesssim_\theta N^{1-s} + \Delta T (N^{1-s})^3.$$

(Diese Ungleichungen bleiben gültig für $\tilde{v}, \tilde{\tilde{v}}, \dots$, wenn $E(z(\Delta T)) \ll E(v(0))$ und entsprechendes in jedem Iterationsschritt gilt.)

Bew.: $\|(v(t), v_t(t))\|_{H^1\times L^2} + \|v(t)\|_{L^4}^2$

$$\sim \|(v_0,v_1)\|_{H^1\times L^2} + \|v_0\|_{L^4}^2 \lesssim \|(v_0,v_1)\|_{H^1\times L^2} \lesssim N^{1-s},$$

da $\|v_0\|_{L^4}^2 \leq C\|v_0\|_{H^{3/4}} \leq C\|v_0\|_{H^{1/2}}\|v_0\|_{H^1}$

$$\leq \|u_0\|_{H^{1/2}} \cdot \|v_0\|_{H^1}.$$

Damit und aus der Strichartz-Abschätzung folgt

$$\|J^{1-\theta} v\|_{L_{\Delta T}^{\frac{2}{\theta}}(L_x^{\frac{2}{1-\theta}})} \lesssim_\theta \|(v_0,v_1)\|_{H^1\times L^2} + \|\int_0^{\Delta T} v^3(t')\,dt'\|_{L_x^2}$$

$$\lesssim_\theta N^{1-s} + \Delta T \|v\|^3_{L_{\Delta T}^\infty L_x^6}.$$

Mit der Sobolev-Einbettung $H^1 \subset L^6$ und dem vorhergehenden folgt die Beh. $\square$

Wenden wir uns nun dem Cauchy-Problem (CP_w) für den inregulären Anteil w zu. Dazu seien

- $\sigma \in [0,1)$ (wird später auf $[0,s]$ eingeschränkt)
- $w_0 \in H^\sigma$, $w_1 \in H^{\sigma-1}$ und
- $v \in C_b([0,\infty), H^1) \cap C_b^1([0,\infty), H^{\sigma-1})$

$\Big\}$ (V1)

Dann suchen wir einen Fixpunkt w der Abbildung $\Lambda = \Lambda_{(w_0,w_1;v)}$, die definiert durch $(W(t) = J^{-1}\sin(tJ))$

$$\Lambda(w)(t) := W'(t)w_0 + W(t)w_1 - \int_0^t W(t-t')F(v(t'),w(t'))dt'$$

mit $F(v,w) = -|v|^2 v + |v+w|^2(v+w)$.

Die Picard-Iteration soll durchgeführt werden in einer Kugel $B^\sigma_{R,\Delta T} \subset L^\infty_{\Delta T}(H^\sigma) \cap L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T}(L_x^{\frac{2}{1-\sigma}}) =: E_\sigma$,

der mit der natürlichen Norm

$$|||\ \ |||_\sigma := \|\ \ \|_{L^\infty_{\Delta T}(H^\sigma)} + \|\ \ \|_{L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T}(L_x^{\frac{2}{1-\sigma}})}$$

versehen wird.

Lemma 3: Es seien $\sigma \in [\frac{4}{7}, 1)$ und w_0, w_1, v gemäß (V1) sowie $w \in E_\sigma$. Dann gilt für jedes $\theta \in [0,1)$:

$$\| J^{\sigma-\theta} \Lambda(w) \|_{L^{\frac{2}{\theta}}_{\Delta T}(L^{\frac{2}{1-\theta}}_x)} \lesssim_\theta \|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}}$$

$$+ (\Delta T)^{2\sigma-1} |||w|||_\sigma^3 + \Delta T \cdot E(v(0)) \, |||w|||_\sigma .$$

Bew.: $\| J^{\sigma-\theta} (w'(\cdot) w_0 + w(\cdot) w_1) \|_{L^{\frac{2}{\theta}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\theta}}_x} \lesssim_\theta \|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}}$

folgt aus den Strichartz-Abschätzungen. Diese liefern für den Duhamel-Term

$$\| J^{\sigma-\theta} \int_0^t W(t-t') F(v,w)(t') dt' \|_{L^{\frac{2}{\theta}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\theta}}_x} \qquad \left(\int_0^t = \chi_{[0,t]} \int_0^{\Delta T} \right)$$

$$\lesssim_\theta \int_0^{\Delta T} \| J^{\sigma-1} F(v,w)(t') \|_{H^{\sigma-1}} dt'$$

Sobolev, mit $\sigma - 1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{q}$

$$\lesssim_\theta \| F(v,w) \|_{L^1_{\Delta T} L^q_x} \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{5-2\sigma}{6}$$

Dies wird jetzt abgeschätzt für $F_1(v,w) = v^2 w$ und $F_3(v,w) = w^3$. (An dieser Stelle wird auch klar, warum komplexe Konjugation ebenso vernachlässigbar ist wie die letzten Terme.)

$$\| F_1(v,w) \|_{L^1_{\Delta T} L^q_x} \leq \Delta T \cdot \|v\|^2_{L^\infty_{\Delta T} L^6_x} \|w\|_{L^\infty_{\Delta T} L^r_x}$$

mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{5-2\sigma}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{3}$

$\Leftrightarrow \sigma - \frac{3}{2} = -\frac{3}{r}$, so dass $H^\sigma \subset L^r$. Da auch $H^1 \subset L^6$, folgt

$$\ldots \lesssim \Delta T \|v\|^2_{L^\infty_{\Delta T}(H^1)} \|w\|_{L^\infty_{\Delta T}(H^\sigma)} \leq \Delta T \, E(v(0)) \, |||w|||_\sigma$$

Für den Beitrag von $F_3(v,w) = w^3$ haben wir

$$\|w^3\|_{L^1_{\Delta T} L^q_x} = \|w\|^3_{L^3_{\Delta T} L^{3q}_x} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{1}{q} = \frac{5-2\sigma}{6}\right)$$

$$\|w\|_{L^3_{\Delta T} L^{3q}_x} = \|1 \cdot |w|^{\vartheta} |w|^{1-\vartheta}\|_{L^3_{\Delta T} L^{3q}_x}$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} (\Delta T)^{\frac{1}{p_0}} \| |w|^{\vartheta} \|_{L^{p_1}_{\Delta T} L^{q_1}_x} \| |w|^{1-\vartheta} \|_{L^{\infty}_{\Delta T} L^{q_2}_x}$$

$$= (\Delta T)^{\frac{1}{p_0}} \|w\|^{\vartheta}_{L^{\vartheta p_1}_{\Delta T} L^{\vartheta q_1}_x} \|w\|^{1-\vartheta}_{L^{\infty}_{\Delta T} L^{\vartheta q_2}_x},$$

wobei $\frac{1}{3} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{3q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

Nun wählen wir $\frac{1}{\vartheta p_1} = \frac{\sigma}{2}$, $\frac{1}{\vartheta q_1} = \frac{1-\sigma}{2}$ und q_2 so, dass $\sigma - \frac{3}{2} = -\frac{3}{\vartheta q_2}$ und damit $H^{\sigma} \subset L^{\vartheta q_2}$. Dann erhalten wir die obere Schranke

$$\lesssim (\Delta T)^{\frac{1}{p_0}} \|w\|^{\vartheta}_{L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\sigma}}_x} \|w\|^{1-\vartheta}_{L^{\infty}_{\Delta T} H^{\sigma}} \qquad a^{\vartheta} b^{1-\vartheta} \leq a+b$$

$$\lesssim (\Delta T)^{\frac{1}{p_0}} \left(\|w\|_{L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\sigma}}_x} + \|w\|_{L^{\infty}_{\Delta T} H^{\sigma}}\right) = (\Delta T)^{\frac{1}{p_0}} |||w|||_{\sigma}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems für $\frac{1}{p_{0,1}}, \frac{1}{q_{1,2}}, \vartheta$ führt auf

$$\frac{1}{p_0} = \frac{2\sigma - 1}{3} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{4(1-\sigma)}{3\sigma}.$$

Das ergibt den angegebenen Exponenten bei ΔT. Die notwendige Bedingung $\vartheta \leq 1 \iff 4 - 4\sigma \leq 3\sigma \iff \sigma \geq \frac{4}{7}$, was vorausgesetzt ist. $\square$

Folgerungen:

(1) Für $\frac{4}{7} \leq \sigma \leq 5$ ist (CP_w) lokal wohlgestellt für Daten $(w_0, w_1) \in H^\sigma \times H^{\sigma-1}$. Unter der Voraussetzung

$$E(v(0)) \lesssim N^{2(1-s)}$$

beträgt die Lebensdauer der lokalen Lösungen

$$\Delta T = \varepsilon_0 N^{-2(1-s)} \quad (\text{mit einem } 0 < \varepsilon_0 \ll 1).$$

Gelten ferner

$$\|w_0\|_{H^\sigma} \lesssim N^{\sigma-s} \quad \text{und} \quad \|w_1\|_{H^{\sigma-1}} \lesssim N^{\sigma-s},$$

so haben wir die Abschätzungen für die Lösung w:

$$|||w|||_\sigma \lesssim N^{\sigma-s} + (\Delta T)^{2\sigma-1} |||w|||_\sigma^3 + \varepsilon_0 |||w|||_\sigma \lesssim N^{\sigma-s}.$$

Bew.: Wenden wir das Lemma an mit $\theta = \sigma$ und $\theta = 0$, so ergibt sich

$$|||\Lambda(w)|||_\sigma \lesssim_\sigma \|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}}$$

$$+ (\Delta T)^{2\sigma-1} |||w|||_\sigma^3 + (\Delta T) E(v(0)) |||w|||_\sigma.$$

Nehmen wir weiter $w \in B^\sigma_{R,\Delta T} \subset E_\sigma$ und $E(v(0)) \lesssim N^{2(1-s)}$ an:

$$\ldots \lesssim_\sigma \|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}} + (\Delta T)^{2\sigma-1} R^3 + (\Delta T) N^{2(1-s)} R.$$

Nun wählen wir

implizite Konstante

- $R = 2C_\sigma \left(\|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}} \right)$
- $\underline{\Delta T = \varepsilon_0 \cdot N^{-2(1-s)}}$ (wie oben als Lebensdauer angegeben)

und N ausreichend groß (R hat eine von N unabhängige obere Schranke!), so ist

$$|||\Lambda(w)|||_\sigma \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} = R,$$

und bei evtl. Berücksichtigung größerer Konstanten reicht unsere Abschätzung auch für die Kontraktionsargument. Das ergibt sowohl die LWP-Aussage und die Behauptung über die lifespan, ebenso für die Lösung w

$$|||w|||_\sigma = |||\Lambda(w)|||_\sigma \leq \frac{R}{2} + \frac{1}{2}|||w|||_\sigma \Rightarrow |||w|||_\sigma \leq R$$

und wenn $R \sim \|(w_0, w_1)\|_{H^\sigma \times H^{\sigma-1}} \lesssim N^{\sigma-s}$ gegeben ist, so folgt auch die letzte Abschätzung. $\square$

(2) Für die Strichartz-Norm des großen regulären Anteils v unserer (im Raum befindlichen) Lösung u haben wir die in Lemma 2 Ungleichung

$$\|J^{1-\theta} v\|_{L_{\Delta T}^{\frac{2}{\theta}} L_x^{\frac{2}{1-\theta}}} \lesssim_\theta N^{1-s} + (\Delta T)(N^{1-s})^3$$

gezeigt. Mit $\Delta T = \varepsilon_0 N^{-2(1-s)}$, wie in (1) gewählt, vereinfacht sich das zu: $\underline{\|J^{1-\theta} v\|_{L_{\Delta T}^{\frac{2}{\theta}} L_x^{\frac{2}{1-\theta}}} \lesssim_\theta N^{1-s}}$

(3) Die Voraussetzung $\sigma \geq \frac{4}{7}$ in Lemma 3 haben wir benötigt bei der Abschätzung von

$$\|w^3\|_{L^1_{\Delta T} L^q_x} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{5-2\sigma}{6}.$$

Für $\sigma \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$ kann man diesen Beitrag kontrollieren durch

$$(\Delta T)^{\frac{1}{3}} \, |||w|||^2_{2/3} \, |||w|||_\sigma ,$$

so dass für die Lösung w von $\Lambda(w) = w$

$$\|J^{\sigma-\theta} w\|_{L^{\frac{2}{\theta}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\theta}}_x} \lesssim_\theta \|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}}$$

$$+ (\Delta T)^{\frac{1}{3}} \, |||w|||^2_{2/3} \, |||w|||_\sigma + (\Delta T) E(v(0)) \, |||w|||_\sigma$$

($\longrightarrow$ Übungen), mit $\|w_0\|_{H^\sigma} + \|w_1\|_{H^{\sigma-1}} \lesssim N^{\sigma-s}$; $|||w|||_\sigma \lesssim N^{\sigma-s}$ für $\sigma \in [\frac{4}{7}, s]$ und $\Delta T = \varepsilon_0 N^{-2(1-s)}$ also

$$\ldots \lesssim_\theta N^{\sigma-s} + \Big(\varepsilon_0^{\frac{1}{3}} \underbrace{N^{-\frac{2}{3}(1-s)} N^{2(\frac{2}{3}-s)}}_{N^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}s} \ll 1} + \varepsilon_0\Big) |||w|||_\sigma$$

$$\Longrightarrow \quad |||w|||_\sigma \lesssim N^{\sigma-s} \quad \text{auch für } \sigma \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{7}).$$

(4) Wir benötigen darüber hinaus Abschätzungen für $\|w\|_{L^\infty_{\Delta T} H^\sigma}$ im Bereich $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$. Für $\sigma = 0$ schätzen wir ab:

$$\|w\|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} = \|\Lambda(w)\|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \lesssim N^{-s} + \|F\|_{L^1_{\Delta T}(H^{-1}_x)}$$

$$\lesssim N^{-s} + \|v^2 w\|_{L^1_{\Delta T} L^{6/5}_x} + \|w^3\|_{L^1_{\Delta T} L^{6/5}_x},$$

letzteres aufgrund der Sobolev-Einbettung

$$L^{6/5}_x \subset H^{-1} \quad \text{(die dual zu } H^1 \subset L^6_x \text{ ist, beachte } n=3!\text{)}$$

Nun haben wir wg. $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6}$

$$\| v^2 w \|_{L^1_{\Delta T} L^{6/5}_x} \leq \Delta T \, \| v \|^2_{\underset{\cup \atop H^1}{L^\infty_{\Delta T} L^6_x}} \, \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \lesssim \varepsilon_0 \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x}$$

und $\left(\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \text{ für } x, \quad 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{\infty} \text{ für } \Delta T \right)$

$$\| w^3 \|_{L^1_{\Delta T} L^{6/5}_x} \leq \underbrace{(\Delta T)^{1/3} \| w \|^2_{L^3_{\Delta T} L^6_x}} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \lesssim N^{\frac{2}{3} - \frac{4s}{3}} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x}$$

$$\leq N^{-\frac{2}{3}(1-s)} \, |||w|||^2_{2/3} \lesssim N^{-\frac{2}{3}(1-s)} N^{2(\frac{2}{3}-s)} = N^{\frac{2}{3} - \frac{4s}{3}}$$

$$\Rightarrow \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \leq C N^{-s} + \frac{1}{2} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \Rightarrow \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \lesssim N^{-s}$$

Mit dem Ergebnis aus (3) zusammen ergibt sich dann für $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\underline{\underline{\| w \|_{L^\infty_{\Delta T} H^\sigma}}} \leq \| w \|^{1-\vartheta}_{L^\infty_{\Delta T} H^{\frac{1}{2}}} \, \| w \|^{\vartheta}_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \qquad \left(\sigma = \frac{1-\vartheta}{2} + 0 \cdot \vartheta \right)$$

$$\lesssim N^{(\frac{1}{2} - s) 2\sigma} \, N^{-s(1-2\sigma)} \qquad \begin{array}{l} (\Leftrightarrow 2\sigma = 1 - \vartheta) \\ (\Leftrightarrow \vartheta = 1 - 2\sigma) \end{array}$$

$$= \underline{\underline{N^{\sigma - s}}} \, ,$$

und hierüber können wir nun für alle $\sigma \in [0, s]$ verfügen.

Damit können wir uns dem <u>Energiezuwachs</u> (von v) <u>in jedem einzelnen Schritt</u> der Iteration zuwenden:

Lemma 4: Für v und w wie in den Lemmata 2 und 3 und den Folgerungen daraus und $t \in [0, \Delta T]$

$$z(t) = \int_0^t W(t-t')\, F(v(t'), w(t'))\, dt' \qquad (\text{mit } W(t) = J^{-1} \sin(tJ)).$$

Dann gilt für jedes ε' mit $0 < \varepsilon' \ll 1$:

$$\left\| \left(z(\Delta T), \frac{\partial z}{\partial t}(\Delta T)\right) \right\|_{H^1 \times L^2_x} + \| z(\Delta T) \|^2_{L^4_x} \lesssim_{\varepsilon'} N^{2-3s+\varepsilon'}.$$

Bew.: $$\left\| \left(z(\Delta T), \frac{\partial z}{\partial t}(\Delta T)\right) \right\|_{H^1 \times L^2} \leq \int_0^{\Delta T} \| F(v(t'), w(t')) \|_{L^2_x}\, dt'$$

$$\lesssim \| v^2 w \|_{L^1_{\Delta T} L^2_x} + \| w^3 \|_{L^1_{\Delta T} L^2_x} =: I + II$$

Für die nachfolgenden Abschätzungen von I sei zunächst angenommen, dass die auftretenden rechten Seiten endlich ausfallen. Dann haben wir einerseits

$$I \leq \| v \|^2_{L^2_{\Delta T} L^\infty_x} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T} L^2_x} \qquad (I, 1),$$

wobei v in der "verbotenen" Endpunkt-Strichartz-Norm auftritt, über die wir keine Kontrolle haben.

Andererseits:

$$I \leq (\Delta T) \| v \|^2_{L^\infty_{\Delta T}(L^6_x)} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T}(L^6_x)}$$

$$\text{Sob.} \lesssim (\Delta T) \| v \|^2_{L^\infty_{\Delta T}(L^6_x)} \| w \|_{L^\infty_{\Delta T}(H^1_x)} \qquad (I, 2)$$

Hierin ist die Norm von v zwar durch die Energie kontrolliert, aber w bereitet Probleme. Nun interpolieren wir zwischen $(I,1)$ und $(I,2)$ mit Interpolationsparameter $0 < \varepsilon \ll 1$. Dann folgt

$$I \lesssim (\Delta T)^{\varepsilon} \, \|v\|^2_{L^p_{\Delta T} L^q_x} \, \|w\|_{L^\infty_{\Delta T}(H^\varepsilon_x)} ,$$

wobei $\frac{1}{p} = \frac{1-\varepsilon}{2} \left(+\frac{\varepsilon}{\infty}\right)$ und $\frac{1}{q} = \left(\frac{1-\varepsilon}{\infty} +\right) \frac{\varepsilon}{6}$.

Nun ist $\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{2} \left(= -\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{3\varepsilon}{6} = -\frac{3}{q}$, so dass

$$H^{\varepsilon, \frac{2}{\varepsilon}} \subset L^q$$

und also

$$\|v\|_{L^p_{\Delta T} L^q_x} \lesssim \|J^\varepsilon v\|_{L^{\frac{2}{1-\varepsilon}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{\varepsilon}}_x} \leq N^{1-s} ,$$

so dass (mit $\Delta T \sim N^{-2(1-s)}$, $\|w\|_{L^\infty_{\Delta T} H^\varepsilon} \lesssim N^{\varepsilon - s}$)

$$I \lesssim N^{-2\varepsilon(1-s)} N^{2(1-s)} N^{\varepsilon - s} = N^{2-3s+\varepsilon'} ,$$

vgl. Folgerung (4) oben

wobei $\varepsilon' = \varepsilon(2s-1)$

Für den zweiten Beitrag haben wir (mit Folgerung (1)):

$$\|w^3\|_{L^1_{\Delta T} L^2_x} = \|w\|^3_{L^3_{\Delta T} L^6_x} = \|w\|^3_{L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T} L^{\frac{2}{1-\sigma}}_x} \quad \text{für } \sigma = \frac{2}{3}$$

$$\leq |||w|||^3_{2/3} \lesssim N^{3\left(\frac{2}{3} - s\right)} = N^{2-3s} .$$

Und schließlich haben wir

$$\|z(\Delta T)\|^2_{L^4_x} \lesssim \|z(\Delta T)\|^2_{H^{3/4}} \leq \|z(\Delta T)\|^2_{H^1} \lesssim N^{2(2-3s+\varepsilon')} ,$$

was wg $2-3s+\varepsilon' \leq 0$ mit den vorhergehenden die Beh. ergibt. $\square$

Wird nun eine Existenzzeiten $T > 0$ beliebig vorgegeben, so erreichen wir diese nach

$$\frac{T}{\Delta T} = \frac{T}{\varepsilon_0} N^{2(1-s)}$$

Iterationsschritten, sofern wir die Schrittweite ΔT stets beibehalten können. Das ist möglich, wenn der zunächst zu $E(v(0))^{\frac{1}{2}}$ (hiervon hängt ja ΔT ab) diese Größe nicht wesentlich übersteigt. Die entscheidende Bedingung ist also

$$\frac{T}{\varepsilon_0} N^{2(1-s)} \cdot N^{2-3s+\varepsilon'} \leq \frac{N^{1-s}}{E(v(0))^{1/2}}$$

bzw. $\quad 4-5s+\varepsilon' < 1-s \iff 3+\varepsilon' < 4s \Leftarrow s > \frac{3}{4}$.

Und damit ist die Bedingung an s in der Behauptung über die globale Wohlgestelltheit geklärt.

<u>Bem.</u>: Bourgain's "splitting argument" ist in der Folge von den "fabulous five", das sind J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka und T. Tao, weiterentwickelt worden zur sog. I-method. Hierbei steht I für einen Fourier-Multiplikator, der nicht die Daten, sondern die Lösungen abschneidet, und dadurch effektiver Anwendbarkeit der Evolutionsgleichungen unter die Kontrolle durch Erhaltungsgrößen

bringen kann. Damit werden im Bereich der nicht-linearen dispersiven Glen. z.T. überwältigende Erfolge erzielt, z.B. konnte das Quintett für die KdV-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}(u^2) \quad \text{mit} \quad u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R})$$

zeigen, dass man GWP für $s > -\frac{3}{4}$ erhält. Bis auf den Endpunkt ist das der gesamte Bereich, in dem man überhaupt LWP mit einem Fixpunktargument zeigen kann.

Das Ergebnis von KPV, was ich Ihnen hier präsentiert habe, ist jedoch meines Wissens bis heute nicht verbessert worden.

3.1.2 Semilineare Wellengleichungen mit Ableitungen erster Ordnung

Untersuchen wir das Cauchy-Problem

$$u(0) = u_0 \qquad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1$$

für die semilinearen Wellengleichungen

$$\Box u = \partial(u^k) \quad (DNLW_0) \quad \text{und} \quad \Box u = (\partial u)^k \quad (DNLW)$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $\partial \in \{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ im Hinblick auf LWP für Daten in $H^s \times H^{s-1}$ (für $(DNLW_0)$) bzw. in $H^{s+1} \times H^s$ (für $(DNLW)$) mit möglichst kleiner Sobolev-Regularität s. (Hier sind tatsächlich die inhomogenen Datenräume H^s gemeint!)

Hierbei scheint $(DNLW)$ wegen der vielen Ableitungen deutlich gefährlicher zu sein als $(DNLW_0)$. Tatsächlich ist aber LWP von $(DNLW_0)$ für Daten in $H^s \times H^{s-1}$ in der Regel gleichwertig zu LWP von $(DNLW)$ für Daten in $H^{s+1} \times H^s$. Dazu eine kurze

<u>Heuristische Überlegung</u>: Sei $u \in C([0,T], H^{s+1})$ eine Lösung von

$$\Box u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^k \quad \text{mit einem festen } j \in \{1, \dots, n\}$$

zu Anfangswerten $u(0) = u_0 \in H^{s+1}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^s$.

Differentiation der Gleichung nach x_j ergibt

$$\Box \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \Box u = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^k \right).$$

Setzen wir $v = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ also $v \in C([0,T], H^s)$,

$$\Box v = \frac{\partial}{\partial x_j}(v^k) \quad \text{und} \quad v(0) = \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \in H^s, \ \frac{\partial v}{\partial t}(0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \in H^{s-1}.$$

Hieraus einen exakten Beweis der Gleichwertigkeit beider Probleme zu bauen, ist unschön (Unterscheidbarkeit von $\frac{\partial}{\partial x_j}$, unterschiedliche Ableitungen wie $(\partial u)^k$, ...). Praktisch ist es meist so, dass dieselben Abschätzungen (evtl. mit geringen Modifikationen) beide Probleme lösen.

Betrachten wir zum Einstieg die Integralgleichung, die (DNLW$_0$) mit $\partial = \frac{\partial}{\partial x_j}$ (j fest) entspricht:

$$u(t) = \Lambda_{(u_0,u_1)}(u)(t) = \cos(tD)u_0 + D^{-1}\sin(tD)u_1$$
$$+ D^{-1}\int_0^t \sin((t-t')D)\,\frac{\partial}{\partial x_j}(u^k)(t')\,dt'.$$

Dann stellen wir fest, dass wg

$$D^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j} = \mathcal{F}_x^{-1}\, i\,\frac{\xi_j}{|\xi|}\,\mathcal{F}_x \quad \text{und} \quad \left|\frac{\xi_j}{|\xi|}\right| \le 1$$

die Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}$ auf der Nichtlinearität zwar kontrolliert wird, aber damit der Glättungs-Operator D^{-1} auch vollständig aufgezehrt ist. Da die Strichartz-Abschätzungen für die Wellengleichung, die wir hier ins Spiel bringen möchten, fast alle mit einem Ableitungsverlust einhergehen, haben wir anscheinend ein Problem!

1. Beobachtung: Es gibt genau eine Strichartz-Abschätzung für die Wellengleichung die ohne Ableitungsverlust auskommt, nämlich die $L^\infty_t(L^2_x)$-Abschätzung, allgemeiner

$$\| e^{\pm itD} u_0 \|_{L^\infty_t(H^s)} = \| u_0 \|_{H^s} ,$$

was uns dann in Form einer Ungleichung auch für $\cos(tD)$ und $\sin(tD)$ zur Verfügung steht. Mit Hilfe dieser Abschätzung können wir tatsächlich zu einem Ergebnis gelangen. Dazu nehmen wir $T \leq 1$ an und beachten

$$\left| |\xi|^{-1} \sin(t|\xi|) \right| \lesssim \langle \xi \rangle^{-1} \qquad (|t| \leq T \leq 1).$$

Dann erhalten wir

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L^\infty_T(H^s)} \lesssim \| u_0 \|_{H^s} + \| u_1 \|_{H^{s-1}} \tag{1}$$

$$+ \left\| \int_0^t \sin((t-t')D)\, u^k(t')\, dt' \right\|_{L^\infty_T(H^s)} ,$$

wobei wir den Duhamelterm weiter abschätzen können durch

$$\left\| \int_0^t \sin \ldots \, dt' \right\|_{L^\infty_T H^s} \leq \int_0^T \| u^k(t') \|_{H^s} \, dt' \tag{1a}$$

$$\leq T \, \| u^k \|_{L^\infty_T(H^s)} \tag{1b}$$

Nun ist H^s für $s > \frac{n}{2}$ eine Banach-Algebra unter punktweiser Multiplikation (folgt aus glm. Leibniz, kann man auch mit der Fouriertransformation leicht nachrechnen!), so dass wir fortfahren können mit

$$(1b) \lesssim T \, \| u \|^k_{L^\infty_T(H^s)}$$

Insgesamt: $\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^\infty(H^s)}$

$$\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} + T \|u\|^k_{L_T^\infty(H^s)},$$

was uns bei geeigneter Wahl von R und T (wünschlich) zu einem ersten <u>Tarlergebnis</u> führt:

(DNLW$_0$) mit $\partial = \partial_{x_j}$ ist LWP für Daten in $H^s \times H^{s-1}$, sofern $s > \frac{n}{2}$. (Gilt auch für $n=1$.)

Insbesondere sehen wir, dass (DNLW$_0$) (und damit auch (DNLW)) grundsätzlich der Behandlung mit dem CMP zugänglich ist. Jetzt können wir versuchen, zusätzlich die anderen Strichartz-Abschätzungen zu verwenden, um das 1. Ergebnis zu verbessern.

2. <u>Beobachtung</u>: Ist $n \geq 2$ und (p,q) Wave admissable, also: $\underline{q < \infty, \ \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}}$ und $\underline{\frac{2}{p} + \frac{n-1}{q} = \frac{n-1}{2}}$, sowie $\underline{\delta = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}$ der Ableitungsverlust in der entsprechenden Strichartz-Abschätzung für die homog. lin. Gleichung, so haben wir

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^p(H^{s-\delta,q})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} + \int_0^T \|u^k(t)\|_{H^s} \, dt, \tag{2}$$

und das ist exakt dieselbe obere Schranke wie für $\| \Lambda_{\cdot\cdot} \|_{L_T^\infty(H^s)}$ in (1) und (1a) in unserem bescheidenen ersten Versuch.

Idee (Pecher & Sideris, 1993; dort ausgeführt für $n=3$):

Wenn wir eine Fixpunktiteration in einer Kugel $B_{R,T}$ im Durchschnitt $L^\infty_T(H^s) \cap L^p_T(H^{s-\delta,q})$ ausführen, dann stehen uns zur Abschätzung der rechten Seite in (1), (1a) und (2) beide Normen zur Verfügung.

Dann hätten wir also für zunächst noch unbestimmte $s \geq 0$, (p,q) admissable:

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L^\infty_T(H^s)} + \| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L^p_T(H^{s-\delta,q})}$$
$$\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}} + \int_0^T \|u^k(t)\|_{H^s}\, dt . \qquad (3)$$

Den Integranden schätzen wir bei festem t mit der generalized Leibniz rule ab und benutzen anschließend den Sobolevschen ES:

$$\|u^k(t)\|_{H^s} \lesssim \|u(t)\|_{H^s} \|u(t)\|^{k-1}_{L^\infty}$$
$$\lesssim \|u(t)\|_{H^s} \|u(t)\|^{k-1}_{H^{s-\delta,q}} ,$$

letzteres, sofern $s-\delta-\frac{n}{q} > 0$, d.h. $\underline{s > \delta + \frac{n}{q}}$.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für das Integral in (3)

$$\int_0^T \|u^k(t)\|_{H^s} dt \lesssim \int_0^T \|u(t)\|_{H^s} \|u(t)\|^{k-1}_{H^{s-\delta,q}} dt$$

$$\lesssim \|u\|_{L^\infty_T H^s} \cdot T^{\frac{1}{r'}} \cdot \left(\int_0^T \|u(t)\|^{r(k-1)}_{H^{s-\delta,q}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{Hölder, } \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$$

$$= \|u\|_{L^\infty_T H^s} \cdot T^{\frac{1}{r'}} \|u\|^{k-1}_{L^p_T(H^{s-\delta,q})} \quad \text{wenn } \underline{\frac{1}{p} = \frac{1}{r(k-1)}}$$

$$\lesssim T^{\frac{1}{r'}} \left(\|u\|_{L_T^\infty(H^s)} + \|u\|_{L_T^p(H^{s-\delta,q})} \right)^k ,$$

hat einer positiven Potenz von T, sofern

$$1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} > 0 \iff \frac{1}{r} < 1 \iff \underline{\frac{1}{p} < \frac{1}{k-1}}$$

Entsprechende Differenzabschätzungen lassen sich ganz ähnlich erbringen, so dass ein Fixpunktargument zum Ziel führt, sofern wir alle unterwegs aufgetretenen Bedingungen an die Hölder- und Sobolev-Exponenten in Einklang bringen können. Formulieren wir diese als

Ungleichungen für s und $\frac{1}{p} = \frac{u-1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$, (4)

letzteres ist dann die definierende Gleichung für q.

Die definierende Gleichung für δ lautet dann

$$\delta = \frac{u+1}{u-1} \cdot \frac{1}{p} . \tag{5}$$

Dann sind noch die folgenden Ungleichungen zu erfüllen.

① $\frac{1}{2} - \frac{1}{u-1} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{u-1} < \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \leq 0$

$\iff 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \frac{1}{u-1} \iff 0 \leq \frac{2}{(u-1)p} < \frac{1}{u-1} \iff 0 \leq \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$

Für $\underline{u=2}$ benötigen wir ausserdem $q < \infty$ bzw. $\frac{1}{q} > 0$ und dass bedeutet $\frac{1}{p} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) < \frac{1}{4}$, also $0 \leq \frac{1}{p} < \frac{1}{4}$

Zusammen mit der Forderung ② $\frac{1}{p} < \frac{1}{k-1}$ also

$\underline{u=2}$: $\underline{0 \leq \frac{1}{p} < \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{k-1}\right)}$; $\underline{u \geq 3}$: $\underline{0 \leq \frac{1}{p} < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k-1}\right)}$

Bleibt noch die Bedingung an s zu berücksichtigen:

(3) $$s > \delta + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} + \underbrace{\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{p}}_{=\delta} - n\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}_{=\frac{2}{p(n-1)}}$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{2n}{n-1} - \frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{p} \left(\overset{!}{>} \frac{n}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k-1}\right),\right.$$

$\frac{1}{4}$ für $n=2$

Jetzt haben wir das Ungleichungssystem soweit aufgelöst, dass wir sinnvoll eine Wahl treffen können:

Sei $s > \frac{n}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k-1}\right)$ für $n \geq 3$ bzw.

$s > 1 - \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{k-1}\right)$ für $n = 2$.

Dann existiert ein p mit

$$0 \leq \frac{1}{p} < \left\{\begin{array}{l} \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k-1}\right) \ (n \geq 3) \\ \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{k-1}\right) \ (n=2) \end{array}\right\} \text{ und } s > \frac{n}{2} - \frac{1}{p}$$

Zu einem solchen p wählen wir q gemäß (4) und δ gemäß (5). Dann gilt mit

$$\varepsilon \left(= \frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r}\right) = 1 - \frac{k-1}{p} > 0$$

die Abschätzung

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^\infty(H^s) \cap L_T^p(H^{s-\delta,q})} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}$$

$$+ T^\varepsilon \, \mathcal{F}^k \|u\|_{L_T^\infty(H^s) \cap L_T^p(H^{s-\delta,q})}.$$

Die bereits diskutierten Argumente führen dann zu:

<u>Satz 1:</u>

Das Cauchy Problem $u(0) = u_0 \in H^s$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^{s-1}$ für (DNLW$_0$) mit $\partial = \partial_{x_j}$ ist LWP für $s > \frac{n}{2} - \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k-1}\right)$, falls $n \geq 3$ ist und für $s > 1 - \min\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{k-1}\right)$, falls $n = 2$.

Diskussion:

(1) Genauso für Klein-Gordon.

(2) Die semilineare Dirac-Gleichung

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + H_0\psi = \langle\psi,\beta\psi\rangle^{\frac{k-1}{2}}\cdot\psi \quad , \; k\geq 3 \text{ ungerade}$$

mit Anfangsbedingung $\psi(0)=\psi_0\in(H^s(\mathbb{R}^4))^N$ kann im selben Setting behandelt werden und ist LWP unter denselben Voraussetzungen an s wie oben. In der Tat ist ja nach Diagonalisierung die DG ein System von Glen. der

$$i\frac{\partial\psi_j}{\partial t} \pm \xi(-\Delta+m^2)^{\frac{1}{2}}\psi_j = \prod_{\ell=1}^{k}\psi_{j_\ell} \quad (+\text{ sim.})$$

und insofern die Gleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t} \pm (-\Delta+m^2)^{1/2}u = u^k$$

ein angemessenes "toy model" für (DG). Die Strichartz-Abschätzungen hierfür sind aber gerade die oben verwendeten. (Escobedo & Vega, 1997)

(3) Enthält die Nichtlinearität in (DNLW) nur Ableitungen nach den Ortsvariablen, so lautet die Fixpunktgleichung $\Lambda_{(u_0,u_1)}(u)=u$ mit

$$\Lambda_{(u_0,u_1)}(u)(t) = \cos(tD)u_0 + D^{-1}\sin(tD)u_1 + D^{-1}\int_0^t \sin((t-t')D)\prod_{\ell=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_{j_\ell}}u(t')\,dt'.$$

$s, p, q, \delta, \varepsilon$ stellen genau so, wie in der obigen Diskussion (DNLW$_0$). Dann haben wir mit den bereits erbrachten Abschätzungen

$$\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{L_T^\infty(H^{s+1}) \cap L_T^p(H^{s+1-\delta,q})} \lesssim \|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s}$$

$$+ \int_0^T \Big\| \prod_{\ell=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_{j_\ell}} u(t) \Big\|_{H^s} dt$$

$\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$-Trick

$$\lesssim \|u_0\|_{H^{s+1}} + \|u_1\|_{H^s} + T^{\varepsilon} \prod_{\ell=1}^{k} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_{j_\ell}} \Big\|_{L_T^\infty(H^s) \cap L_T^p(H^{s-\delta,q})}$$

$$\lesssim \quad \text{—} \; " \; \text{—} \quad + T^{\varepsilon} \|u\|_{L_T^\infty(H^{s+1}) \cap L_T^p(H^{s+1-\delta,q})}$$

Damit ergibt sich:

Satz 2: Das Cauchy-Problem $u(0) = u_0 \in H^{s+1}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^s$ für (DNLW) mit $\partial \in \{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ ist LWP unter denselben Voraussetzungen an s wie in Satz 1.

(4) Für (DNLW) mit $\partial = \frac{\partial}{\partial t}$ an mindestens einer Stelle ist das Argument etwas zu modifizieren. Setzen wir

$$E_{s+1} := L_T^\infty(H^{s+1}) \cap L_T^p(H^{s+1-\delta,q}),$$

so führt man das Fixpunktargument durch in

$$B_{R,T} := \{ u \in E_{s+1} : \frac{\partial u}{\partial t} \in E_s \text{ und } \|u\|_{E_{s+1}} + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{E_s} \leq R \}$$

Dann gibt einen die zweite Norm die Kontrolle über die Faktoren $\frac{\partial u}{\partial t}$ in der Nichtlinearität. Für

$\| \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{E_s}$ hat man aber mit Strichartz dieselben oberen Schranken wie für $\| \Lambda_{(u_0,u_1)}(u) \|_{E_{s+1}}$.

(5) Die kritische Sobolev-Regularität für ($DNLW_0$) ist

gerade $s_c = \frac{n}{2} - \frac{1}{k-1}$ (für (DNLW) entspr. $s_c = \frac{n}{2} + 1 - \frac{1}{k-1}$).

D.h. unsere Ergebnisse in den Sätzen 1 und 2 erledigen den gesamten subkritischen Bereich, wenn

$n \geq 3$ und $k \geq 3$ ist, und wenn

$n = 2$ und $k \geq 5$ ist.

Im Fall $n = 3$ und $k = 2$ hat Lindblad ill-posedness für Daten in $H^s \times H^{s-1}$ und $s \leq 1$ gezeigt für $\Box u = \frac{\partial}{\partial x_j}(u^2)$, desgleichen für $\Box u = (\frac{\partial u}{\partial x_j})^2$ mit Daten in $H^{s+1} \times H^s$, so dass hier leicht hinauf bleibt der Grenzfall als offene Frage bleibt.