Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
16.06.2023
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 22 (Blow-up, 4+1+3+1=9 P.) Nach der Diskussion zu Aufgabe 2 erhält man mit

$$u(x,t) = \exp\big(\frac{it}{3}\big) y^{\frac{1}{2}}\big(\frac{2x}{\sqrt{3}}\big), \qquad y(z) = \operatorname{sech}(z)$$

eine spezielle Lösung der L^2-kritischen NLS

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0$$

in einer Raumdimension. Bestimmen Sie hierfür $v(x,t) = T_{-1}u(x,t)$ (T_ω aus Aufgabe 21), und zeigen Sie, dass für $0 \le t < 1$ gilt

$$\|\partial_x v(t)\|_2 \gtrsim \frac{1}{1-t},$$

was $\lim_{t\to 1^-} \|v(t)\|_{1,2} = \infty$ impliziert. Berechnen Sie ferner

(i) für $x \neq 0$ den punktweisen Grenzwert $\lim_{t\to 1^-} v(x,t)$ und

(ii) $\mathcal{S}' - \lim_{t\to 1^-} |v(\cdot,t)|^2$.

Wie kann man den "Blow-up-Mechanismus" mit einem Stichwort beschreiben?

Problem 3 (lokale H^1-Theorie für NLS, subkritischer Fall. 2+8+1+7=18 P.) Es seien $n \ge 3$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$ und

$$\Lambda u(t) := e^{it\Delta}u_0 \mp i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}|u(t')|^{p-1}u(t')dt'.$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass das Paar (r,q), definiert durch

$$\frac{1}{r} = \frac{(n-2)(p-1)}{4(p+1)} \qquad ; \qquad \frac{1}{q} = \frac{n+p-1}{n(p+1)}$$

Schrödinger-admissible ist.

Bitte wenden!

(b) Bestimmen Sie $R > 0$ und $T > 0$ so, dass die Abbildung Λ die Kugel

$$B_{R,T} := \{u \in L^r_T(H^{1,q}_x) : \|u\|_{L^r_T(H^{1,q}_x)} \leq R\}$$

in sich abbildet.

(c) Geben Sie explizit die Abhängigkeit der Lebensdauer T von $\|u_0\|_{1,2}$ an! Ist T eine monoton fallende Funktion von $\|u_0\|_{1,2}$?

(d) Zeigen Sie, dass für dieselbe Wahl von R und T - gegebenenfalls mit einer größeren Konstante c - die Abbildung $\Lambda : B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist.

Hinweise: Zu (b): Die Hölder-Ungleichung und der Sobolev'sche Einbettungssatz werden wiederholt benötigt. Überprüfen Sie jeweils die Voraussetzungen für dessen Anwendung. Zu (d): Hier können Sie dieselben Hölder-Exponenten und Einbettungen verwenden wie in (b).

Abgabe: 23.06.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 30.06.2023