Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
09.06.2023
Blatt 8

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Problem 2 (Strichartz-Abschätzungen mit Ableitungsgewinn für die Wärmeleitungsgleichung. 1+4+2+2+1=10 P.) Es seien $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ gegeben durch $u(x,t) = e^{t\Delta}u_0(x)$, also u eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert u_0. Ferner sei für $f \in C([0,\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$

$$F(x,t) := \int_0^t e^{(t-t')\Delta} f(x,t')dt',$$

also F eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial F}{\partial t} - \Delta_x F = f$, $F(t=0) = 0$.

(a) Folgern Sie aus den Ergebnissen der Aufgaben 6 und 15, dass für $s \geq 0$ und $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$ gilt

$$\||D_x|^s u(t)\|_{L^p_x} \lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{s}{2}} \|u_0\|_{L^q_x}.$$

(b) Unter welchen Voraussetzungen an den Sobolev-Exponenten s und an die Kehrwerte $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\sigma}$, $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ der unten auftretenden Hölder-Exponenten können Sie die Raum-Zeitabschätzung

$$\||D_x|^s F\|_{L^\rho_t([0,\infty),L^p_x)} \lesssim \|f\|_{L^\sigma_t([0,\infty),L^q_x)}$$

beweisen? Führen Sie die Einzelheiten aus. (Können Sie $s = 2$ für irgendeine Kombination von ρ, σ, p, q zulassen?)

(c) Worauf reduzieren sich die in (b) bestimmten Bedingungen, wenn zusätzlich $\sigma = \rho'$ und $q = p'$ verlangt ist? Stimmen diese für $s = 0$ mit denen für die Strichartz-Abschätzungen für die Schrödinger-Gleichung überein?

(d) Untersuchen Sie, ob unter den in (c) ermittelten Voraussetzungen auch die Abschätzung

$$\|TT^* f\|_{L^\rho_t([0,\infty),L^p_x)} \lesssim \|f\|_{L^{\rho'}_t([0,\infty),L^{p'}_x)}$$

gilt, wenn $T : L^2_x \to L^\rho_t([0,\infty)L^p_x)$ durch $Tu_0(x,t) := |D_x|^{\frac{s}{2}} e^{t\Delta} u_0(x)$ gegeben ist.

(e) Welche Stetigkeitsabschätzung für T ergibt jetzt das TT^* - Argument?

Bitte wenden!

Aufgabe 21 (Pseudokonforme Invarianz der L^2-kritischen NLS, 8 P.) Für eine Funktion $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert man

$$T_\omega u(x,t) := (1+\omega t)^{-\frac{n}{2}} \exp\big(i\frac{\omega|x|^2}{4(1+\omega t)}\big) u\big(\frac{x}{1+\omega t}, \frac{t}{1+\omega t}\big).$$

T_ω wird als pseudokonforme Transformation bezeichnet, der Definitionsbereich von $T_\omega u$ ist $\mathbb{R}^n \times (-\frac{1}{\omega}, \infty)$, falls $\omega > 0$ ist, andernfalls $\mathbb{R}^n \times (-\infty, -\frac{1}{\omega})$. Zeigen Sie: Ist u eine Lösung von

$$iu_t + \Delta u \pm |u|^{\frac{4}{n}} u = 0,$$

so auch $T_\omega u$ (Ginibre/Velo, 1979).

Abgabe: 16.06.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 23.06.2023