Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
26.05.2023
Blatt 7

# ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

**Aufgabe 17 (6 P.)** Bestimmen Sie die kritische Sobolev-Regularität $s_c$ für das Cauchy-Problem $u(t=0)=u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R})$ für die in zweifacher Hinsicht verallgemeinerte KdV-Gleichung

$$u_t - |D_x|^\alpha \partial_x u = \partial_x(u^{k+1}), \qquad \alpha > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

Hinweise: Es handelt sich um ein Problem in einer Raumdimension. Teilergebnisse aus Aufgabe 12 können nützlich sein. Ein Anhaltspunkt für die Richtigkeit Ihrer Rechnung: Die kritische Regularität für KdV ist $s_c = -\frac{3}{2}$. - Zusatzfrage: Was ergibt sich speziell für mKdV und Benjamin-Ono?

**Aufgabe 18 (4 P.)** Zeigen Sie mit einem scaling-argument, dass die Strichartz-Abschätzung

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2}$$

für die Lösung $u$ der homogenen linearen Schrödinger-Gleichung mit $u(0)=u_0$ *nur* gelten kann, wenn $\frac{n}{2} = \frac{2}{p} + \frac{n}{q}$ ist. Bestimmen Sie ferner eine notwendige Bedingung für die Abschätzung

$$\|u\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|F\|_{L_t^{\tilde{p}'}(L_x^{\tilde{q}'})},$$

wobei $u$ die Gleichung

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = F \qquad \text{mit} \qquad u(0)=0 \qquad \text{löst.}$$

**Aufgabe 19 (5 P.)** Es sei $w$ eine reellwertige Lösung der inhomogenen linearen Plattengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta^2 w = \Delta F$$

mit Anfangswerten $w(0)=w_0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(0) = \Delta w_1$, wobei $w_{0,1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $F \in L_t^{p'}(\mathbb{R}, L_x^{q'}(\mathbb{R}^n))$ vorausgesetzt seien. Zeigen Sie, dass für alle Schrödinger-zulässigen Paare $(p,q)$ die Abschätzung

$$\|w\|_{L_t^p(L_x^q)} + \|\Delta^{-1}\frac{\partial w}{\partial t}\|_{L_t^p(L_x^q)} \lesssim \|w_0\|_{L_x^2} + \|w_1\|_{L_x^2} + \|F\|_{L_t^{p'}(L_x^{q'})}$$

gilt. Können Sie auf die Voraussetzung der Reellwertigkeit von $w$ verzichten?

Bitte wenden!

**Aufgabe 20 (4 P.)** Es seien $s \geq 0$, $1 \leq p, q < \infty$ und

$$T : L^2_x \to L^p_t([0,\infty), L^q_x), \qquad u_0 \mapsto Tu_0,$$

definiert durch $Tu_0(x,t) := (|D_x|^s e^{t\Delta} u_0)(x)$. (Hierbei bezeichnet $e^{t\Delta}u_0$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert $u_0$.) Bestimmen Sie $T^*$ und $TT^*$.

**Abgabe:** 09.06.2023, in der Vorlesung,
**Besprechung:** 16.06.2023