Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
19.05.2023
Blatt 6

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 14 (Endpunkte im Sobolev'schen Einbettungssatz, 4+2=6 P.) Zeigen Sie, dass $L^1(\mathbb{R}^n)$ für $p \in (1,\infty)$ und $s = -\dfrac{n}{p'}$ *nicht* stetig in $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ eingebettet ist. Betrachten Sie dazu eine approximative Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit $K_\varepsilon(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und führen Sie die mit der Annahme $L^1(\mathbb{R}^n) \subset H^s_p(\mathbb{R}^n)$ verbundene Normabschätzung zu einem Widerspruch. (Argumentieren Sie sorgfältig. Der relevante Faltungskern g_{-s} ist positiv, und für $0 < \sigma < n$ sowie $|x| \leq 2$ gilt $g_\sigma(x) \gtrsim |x|^{\sigma-n}$.) Folgern Sie mit einem Dualitätsargument, dass auch $H^{\frac{n}{p'}}_{p'}(\mathbb{R}^n)$ *nicht* stetig in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ eingebettet ist.

Aufgabe 15 (3+3=6 P.) Es seien $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ und $1 < p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 < \infty$. Ferner existiere ein $\theta \in (0,1)$, so dass

(i) $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$,

(ii) $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$,

(iii) $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Hölderschen und der Lyapunovschen Ungleichung:

(a) $\|f\|_{B^s_{p,q}} \lesssim \|f\|^{1-\theta}_{B^{s_0}_{p_0,q_0}} \|f\|^{\theta}_{B^{s_1}_{p_1,q_1}}$,

(b) $|||f|||_{s,p} \lesssim |||f|||^{1-\theta}_{s_0,p_0} |||f|||^{\theta}_{s_1,p_1}$.

Hinweis: Mit $Q_0 = P_0$, $Q_N = P_{\Delta N}$ und $\|f\|_{B^s_{p,q}} = \Big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{sq} \|Q_N f\|_p^q \Big)^{\frac{1}{q}}$ sowie $|||f|||_{s,p} = \| \big(\sum_{N \in 2^{\mathbb{N}_0}} N^{2s} |Q_N f|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \|_p$ werden die Rechnungen einigermaßen übersichtlich und Sie können $\leq$ anstelle von $\lesssim$ erreichen.

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (Galilei-Invarianz semilinearer Schrödinger-Gleichungen, 4 P.) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f(|u|)u$$

und, mit festem $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $v(x,t) = \exp\left(ix\xi_0 - it|\xi_0|^2\right)u(x - 2t\xi_0, t)$. Zeigen Sie, dass v dieselbe Differentialgleichung löst.

Abgabe: 26.05.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 09.06.2023