Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
12.05.2023
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 10 (4 P.) Es seien $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Finden Sie $f \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, so dass $fg \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Widerspricht das dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz? (Es gilt die "Schwache Höldersche Ungleichung"

$$p\|fg\|_{p,\infty} \leq q\|f\|_{q,\infty} r\|g\|_{r,\infty},$$

wenn $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, s. Grafakos, Exercise 1.1.15.)

Aufgabe 11 (5 P.) Für welche $s \in \mathbb{R}$ liegen die nachstehenden (verallgemeinerten) Funktionen in $H^s(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Ergebnisse!

(a) $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$,
(b) $g = f * f$ mit f wie in (a),
(c) $T = P.V.\frac{1}{x}$,
(d) $h(x) = e^{-|x|}$.

Verallgemeinern Sie Ihre Aussage zu Teil (d) auf höhere Raumdimensionen. Beachten Sie die Beispiele zur Fouriertransformation temperierter Distributionen auf den Seiten 8 - 10 in Abschnitt 1.2 der Vorlesung.

Aufgabe 12 (3 P.) Zeigen Sie die Notwendigkeit der Bedingung

$$s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{q}$$

für das Bestehen der Ungleichung

$$\|f\|_q \lesssim \|I^s f\|_p \qquad \text{für alle } f \in \dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n)$$

mit einer impliziten Konstante, die nur von $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty)$ und der Raumdimension n abhängt. Betrachten Sie dazu für $\lambda > 0$ und $f \in H^s_p(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 13 (Hölder-Stetigkeit von H^s-Funktionen, 6 P.) In der Vorlesung wurde ein einfaches Argument für die stetige Einbettung $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ unter der Voraussetzung $s > \frac{n}{2}$ angegeben. Entwickeln Sie dieses Argument weiter zum Beweis der folgenden Aussage: Ist $\alpha \in (0,1)$, $s = \frac{n}{2} + \alpha$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, so ist f Hölder-stetig zum Exponenten α.

Abgabe: 19.05.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 26.05.2023