Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2023
28.04.2023
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 6 (6 P.) Es sei $u \in C([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ die eindeutige Lösung des Cauchy-Problems $u(t=0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für die Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Young'schen Ungleichung $\|f * g\|_p \leq \|g\|_r \|f\|_q$, sofern $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}$) für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $1 \leq q \leq p \leq \infty$, dass

$$\|\nabla_x^\alpha u(t)\|_{L_x^p} \lesssim_\alpha t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha|}{2}} \|u_0\|_{L_x^q}.$$

Aufgabe 7 (3+4 P.) Die Lösung des Cauchy-Problems

$$u(x,0) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x)$$

für die homogene lineare Wellengleichung

$$\Box u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

in drei Raumdimensionen ist nach der Kirchhoffschen Formel für $t > 0$ gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} h(x+y) dS_y.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes die Abschätzung

$$|u(x,t)| \lesssim t^{-1}(\|\nabla h\|_{L_x^1} + \|h\|_{L_x^{\frac{3}{2}}}).$$

(b) Weiter seien $\widehat{\varphi}$ eine glatte charakteristische Funktion von $\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1\}$, $\widehat{\varphi}_N(\xi) = \widehat{\varphi}(\frac{\xi}{N})$ und $h = h * \varphi_N$. Folgern Sie, dass

$$|u(x,t)| \lesssim N t^{-1} \|h\|_{L_x^1}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (Schwache Lyapunov-Ungleichung, 6 P.) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$, so dass $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, und $f \in L^{p_0,\infty}(X) \cap L^{p_1,\infty}(X)$. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(X)$ und

$$||f||_p \lesssim_{p,p_0,p_1} ||f||_{p_0,\infty}^{1-\theta} ||f||_{p_1,\infty}^{\theta}.$$

Abgabe: 05.05.2023, in der Vorlesung,
Besprechung: 12.05.2023