Exkurs: Die Banachalgebra $L(E)$

Hier soll die Potenzreihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ auf beschränkte lineare Abbildungen (= Operatoren) verallgemeinert werden. Das wird uns zwar leider zum Ziel führen, was die für die PDE relevanten Differenzialoperatoren anbelangt (diese sind nämlich unbeschränkt), aber

- wir sehen erst der Potenzreihendarstellung eine wichtige Möglichkeit, Funktionen von Operatoren zu definieren (und sehen zugleich die Grenzen dieser Darstellung ein),
- und lernen einige Begriffsbildungen kennen, die auch für die Charakterisierung von Differenzialoperatoren von Bedeutung sind.

Zunächst seien E und F normierte Vektorräume (in aller Regel: unendlich-dimensional!).

Def.: Eine lineare Abbildung $A: E \to F$ heißt beschränkt, wenn $\|A\|_{E\to F} := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < \infty$.

Bemerkung: Durch $\|A\|_{E\to F}$ wird eine Norm auf dem Vektorraum

$$L(E,F) := \{A : E \to F : A \text{ ist linear und beschränkt}\}$$

definiert (Übungsaufg., bei $L(E,F)$ handelt es sich um einen Unterraum oder linearen Teilraum von $\mathrm{Hom}(E,F)$, dem VR aller linearen Abbildungen $A: E \to F$.)

Zur Bez.: Oft schreibe ich nur $\|A\|$ statt $\|A\|_{E\to F}$, wenn vorher angegeben wurde, welchen Definitionsbereich bzw. Zielbereich A hat. Entsprechend für $\|Ax\|_F$, $\|x\|_E$.

$L(E,F)$ enthält gerade alle stetigen linearen Abbildungen $A: E \to F$. Genauer gilt der folgende

Satz: Sei $A: E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) A ist beschränkt (d.h. $A \in L(E,F)$),

(ii) A ist (global) Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\|A\|_{E\to F}$ (wie oben definiert),

(iii) A ist gleichmäßig stetig,

(iv) A ist stetig

(v) A ist stetig im Nullpunkt.

Bew.: FA bzw. Übungsaufgabe. Begründung zu (v) $\Rightarrow$ (i):

Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|Ax\| \leq 1 \quad \forall x \in E \text{ mit } \|x\| \leq 1.$$

Dann ist

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \frac{1}{\delta} \sup\{\|A\delta x\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \frac{1}{\delta} \sup \{ \|Ax\| : x \in E, \|x\| \le \delta \} \le \frac{1}{\delta}.$$

Bem. bzw. Bsp.:

(i) Differenzialoperatoren sind im allgemeinen nicht beschränkt

Bsp. (klassische Ableitung): Es sei

$$A : (C^1([0,1]), \| \ \|_\infty) \longrightarrow (C([0,1]), \| \ \|_\infty)$$

$$f \longmapsto Af := f',$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in [0,1] \}$. Dann ist A unbeschränkt, denn für $f_n(x) = x^n$ haben wir $\|f_n\|_\infty = 1$; $Af_n(x) = n x^{n-1}$, also $\|Af_n\|_\infty = n$, und eine Abschätzung der Form $\|Af\|_\infty \le C \|f\|_\infty$ kann also nicht bestehen.

(ii) Multiplikationsoperatoren (als Potenzial enthalten in dem Hamiltonoperator $H = -\Delta + V$!) von $L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ sind im allgemeinen nicht beschränkt.

Genauer: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \le p \le \infty$ und $M : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ definiert durch $Mf(x) = m(x) f(x)$ mit einer meßbaren Funktion m. Dann ist M beschränkt genau dann, wenn $m \in L^\infty(\mu)$.

Begründung: $\|Mf\|_p \le \|m\|_\infty \|f\|_p$ gibt "$\Leftarrow$".

Umgekehrt: Wenn $m \notin L^\infty(\mu)$ ist, gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) = \varepsilon_n > 0$ und $|m(x)| \geq n \ \forall x \in A_n$. Man setzt $f_n(x) := \frac{1}{\varepsilon_n^{1/p}} \chi_{A_n}(x)$ und hat $\|f_n\|_p = 1$ sowie $\|M f_n\|_p \geq n$.

Bem.: $L(E,F)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum, wenn F ein Banachraum[(*)] ist.

Bew. dieser Aussage: FA. Einstieg: (A_n) Cauchy-Folge in $L(E,F)$, d.h. $\lim_{n,m\to\infty} \|A_n - A_m\|_{E\to F} = 0$. Dann ist für $x \in E$: $\|A_n x - A_m x\|_F = \|(A_n - A_m)x\|_F \leq \|A_n - A_m\|_{E\to F} \|x\|_E$

Also ist $(A_n x)_n$ eine Cauchy-Folge in F. Wenn F vollständig ist, existiert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ (Grenzwert in F). Jetzt muß man noch $A \in L(E,F)$ und $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{E\to F} = 0$ zeigen.

Zwei wichtige Spezialfälle:

1. Der "topologische" Dualraum eines normierten VRes E,

d.i. $$E' := L(E, \mathbb{K}),$$

also der Raum aller stetigen linearen Funktionale $y : E \to \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vollständig ist. Nach der Vorbemerkung ist also E' stets vollständig.

(*) Im folgenden häufig mit B-Raum abgekürzt.

Das Studium von E' ist (umfassender) Gegenstand der Funktionalanalysis. Von zwei Aussagen werden wir wiederholt Gebrauch machen:

(i) E' ist ausreichend groß, um die Punkte von E zu trennen,

d.h.: $\forall x \in E \setminus \{0\} \; \exists y \in E'$, so dass $y[x] \neq 0$.

($\Rightarrow \forall x, z \in E$ mit $x \neq y$ existiert ein $y \in E'$ mit $y[x] \neq y[z]$!)

Mehr noch, wir haben sogar die sog. "Normformel":

(ii) $\forall x \in E \; \exists y \in E'$ mit $\|y\|_{E'} = 1$, für das $y[x] = \|x\|$,

also $\quad \|x\| = \max\{|y[x]| : \|y\|_{E'} \leq 1\}$ (Normformel)

Offenbar gilt: (ii) $\Rightarrow$ (i). (ii) folgt aus einem der fundamentalen Satz der linearen Funktionalanalysis, dem

<u>Satz von Hahn-Banach</u>: Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-VR, $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $y \in F'$. Dann existiert ein $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\|_{E'} = \|y\|_{F'}$.

("Jedes stetige lineare Funktional auf einem linearen Teilraum eines normierten Raumes lässt sich auf den gesamten Raum fortsetzen, ohne die Norm zu vergrößern." $\longrightarrow$ Einf. FA für Beweis, allgemeinere Versionen und weiterführende Diskussion.)

Wie sieht man damit die Normformel ein? $F = \mathbb{K}x$ und $y[\lambda x] = \lambda \|x\|$. Dann ist $y[x] = \|x\|$ und $\|y\|_{F'} = \sup\{|y[z]| \ldots z = \lambda x, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \frac{1}{\|x\|}\} = \sup\{|\lambda|\,\|x\| : |\lambda| \leq \frac{1}{\|x\|}\} = 1$. Die Fortsetzung hat die in (ii) behauptete Eigenschaft

Diese Aussagen (Hahn-Banach sowie (i) und (ii)) sind keineswegs trivial! Startet man z.B. mit einem lediglich quasinormierten Vektorraum, d.h. dass die Dreiecksungleichung durch die schwächere

$$\|x+z\| \leq C(\|x\|+\|y\|)$$

(mit einem $C>1$) ersetzt wird, so gibt es i.allg. nicht genügend stetige lineare Funktionale, um (i) und (ii) zu gewährleisten. Bsp.: $L^p([0,1],\lambda)$ mit $p\in(0,1)$ und Quasi-Norm $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ (dann ist $\|f+g\|_p \leq 2(\|f\|_p+\|g\|_p)$). In diesem Raum ist das einzige stetige lineare Funktional das Nullfunktional!

2. Die normierte Algebra $L(E)$

Im Fall $E=F$ schreiben wir $L(E):=L(E,E)$. Dies ist ein normierter VR und ein B-Raum, wenn E selbst vollständig ist. Neben Addition und skalarer Multiplikation steht uns hier mit der Verknüpfung linearer Abbildungen

$$\circ : L(E)\times L(E)\to L(E),\quad (A,B)\mapsto AB$$

auch eine Multiplikation zur Verfügung. Diese ist

- assoziativ, aber
- i.allg. nicht kommutativ (2×2-Matrizen → Übung),
- besitzt mit der identischen Abbildung I ein Einselement und

- es gelten die Distributivgesetze

$$A(B+C) = AB + AC \quad ; \quad (A+B)C = AC + BC,$$

sowie $\quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Die algebraische Struktur ist also eine (nicht kommutative) Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement.

Versehen wir eine solche mit einer submultiplikativen Norm, d.h. $\quad \| BC \| \leq \| B \| \, \| C \| \quad \forall\, B, C \in \mathcal{A}$,

für die auch noch $\| I \| = 1$ gilt (I = Einselement), so spricht man von einer <u>normierten Algebra</u>. (Dies ist für $L(E)$ gegeben, wenn wir diese mit der Operatornorm versehen.) Schließlich heißt eine vollständige normierte Algebra eine <u>Banach-Algebra</u>, oder kurz: eine <u>B-Algebra</u>. ($L(E)$ ist also eine B-Algebra, wenn E vollständig ist.)

Das genauere Studium der B-Algebren bleibt den Vorlesungen über Funktionalanalysis (Einführung oder der FA I) vorbehalten. Wir werden hier lediglich einige einfache Ergebnisse verwenden. Von Interesse ist für uns zuerst die Möglichkeit, auf einer B-Algebra Funktionen durch Potenzreihen definieren zu können. Wenn $L(E)$ die B-Algebra ist, die wir dabei im Auge haben, heißt das: Funktionen von stetigen / beschränkten linearen Abbildungen / Operatoren in dieser Weise zu definieren.

Satz 1: Es seien $\mathcal{A}$ eine B-Algebra und $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann wird durch

$$P: \mathcal{A} \supset B_R(0) \to \mathcal{A},\ a \mapsto P(a) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k$$

eine stetige Funktion definiert. Für jedes $r \in (0,R)$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf $\overline{B_r(0)}$.

Bew.: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \le n$ und $a \in \overline{B_r(0)}$ haben wir

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} a_k a^k \Big\| \le \sum_{k=m}^{n} |a_k|\, \|a^k\| \quad \text{(Normeigenschaften)}$$

Norm ist submultiplikativ

$$\le \sum_{k=m}^{n} |a_k|\, \|a\|^k \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| r^k \to 0 \quad (m,n \to \infty),$$

letzteres, da $r \in (0,R)$ nach Voraussetzung.

Also ist die Partialsummenfolge $(S_n)_n$, also $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$, eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ und wegen der Vollständigkeitseigenschaft konvergent. Der Grenzwert sei mit a^* bezeichnet. Dann haben wir für $a \in \overline{B_r(0)}$:

$$\Big\| a^* - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a^k \Big\| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|\, \|a^k\| \le \sum_{k=n}^{\infty} a_k r^k \to 0 \ (n \to \infty),$$

und das ist die Aussage über die glm. Konvergenz. Zur Stetigkeit: Seien $a, b \in \overline{B_r(0)}$. Dann ist

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (a^k - b^k),$$

wobei anstelle der geometrischen Summenformel gilt

$$a^k - b^k = \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l}(a-b)\,b^l. \quad (\mathcal{A} \text{ ist ggf. nicht abelsch!})$$

Hieraus folgt

$$\|P(a)-P(b)\| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1}}_{=:L<\infty,\ \text{da } r<R.} \cdot \|a-b\| \le L\,\|a-b\|.$$

D.h. P ist Lipschitz-stetig auf $\overline{B_r(0)}$ mit Lipschitz-Konstante $L = L(r)$ wie oben.

Damit können wir für Elemente a einer B-Algebra $\mathcal{A}$ die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad a \mapsto \exp(a) := e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

ebenso durch eine Potenzreihe definieren wie für Matrizen oder komplexe Zahlen. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

<u>Satz 2</u>: Es seien $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I, $a, b, c \in \mathcal{A}$, c invertierbar und $f \in C([-T,T], \mathcal{A})$. Dann gelten:

(1) Ist $a = c^{-1}bc$, so gilt $e^a = c^{-1}e^b c$.

(2) Wenn $[a,b]=0$, so ist $e^{a+b} = e^a e^b$, insbes. gilt für $s,t \in \mathbb{R}$: $e^{(s+t)a} = e^{sa} \cdot e^{ta}$.

(3) e^a ist invertierbar, und es gilt $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

(4) Die Abbildung $t \mapsto e^{ta} : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ ist differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} e^{ta} = a\,e^{ta}$ mit Grenzwertbildung in der Norm auf $\mathcal{A}$.

(5) Die Lösung u des Anfangswertproblems $u(t=0)=u_0 \in \mathcal{A}$ (28)

für die Dgl. $\frac{du}{dt} = au + f$ ist in $C^1([-T,T],\mathcal{A})$ eindeutig

bestimmt und gegeben durch:

$$u(t) = e^{ta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)a} f(s)\,ds.$$

Bew. zu (5). Der Bew. von (5) benutzt den Hauptsatz der Differenzial- und Integralgleichung für vektorwertige Funktionen. Folgt im nächsten Abschnitt. Eindeutigkeit und Produktregel (wie in Ana I) verschieben wir in die → Übungen.

Bew.: (1) $e^{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (c^{-1}bc)^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c^{-1}\left(\frac{1}{k!} b^k\right)c \overset{(*)}{=} c^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b^k\right)c = c^{-1}e^{b}c.$$

Dabei wurde an der Stelle (*) verwendet, dass die Multiplikationen,

$$M_r : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad a \mapsto ac \qquad (c \text{ fest!})$$

und $\quad M_l : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad a \mapsto c^{-1}a \qquad (c^{-1} \text{ fest!})$

linear und wg. der Submultiplikativität der Norm beschränkt, also stetig sind.

(2) Aus $[a,b]=0$ folgt die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes $\quad (a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^l.$

Damit erhalten wir

$$e^{a+b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^{l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{a^{k-l}}{(k-l)!} \frac{b^{l}}{l!}$$

$$\overset{(**)}{=} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \Big) \Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!} \Big) = e^{a} \cdot e^{b},$$

wobei wir an der Stelle (**) das Cauchy-Produkt von Reihen benutzt haben. Dieses gilt unter der Voraussetzung von $\sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| < \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \| b_k \| < \infty$ ebenso und mit gleichem Beweis wie bei absoluter Konvergenz.

— Der Zusatz ist tatsächlich eine unmittelbare Folgerung.

(3) $$I = e^{0} = e^{a-a} \overset{(2)}{=} e^{a} \cdot e^{-a} \Rightarrow e^{-a} = (e^{a})^{-1}.$$

(4) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \le 1$. Dann haben wir

$$\Big\| \frac{1}{h} \big(e^{(t+h)a} - e^{ta} \big) - a \cdot e^{ta} \Big\| = \Big\| \Big\{ \frac{1}{h} (e^{ha} - I) - a \Big\} e^{ta} \Big\|$$

$$\le \Big\| \frac{1}{h} (e^{ha} - I) - a \Big\| \, \| e^{ta} \| \le \Big\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} a^{k} \Big\| \, e^{|t| \|a\|}$$

$$\le |h| \cdot e^{(1+|t|)\|a\|} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

(5, Existenzaussage): Da $e^{ta} \in \mathcal{A}$, die Multiplikation damit stetig und das Integral ein Grenzwert von Folgen (⟶ nächster Absatz) ist, können wir die angegebene Fkt. u schreiben als

$$u(t) = e^{ta} \Big(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s) \, ds \Big).$$

Dann ergeben (4) und die Produktregel (→ Ü)

$$\frac{du}{dt}(t) = a\, e^{ta}\left(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s)\,ds\right) + e^{ta} \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-sa} f(s)\,ds$$

$$= a\,u(t) + e^{ta} e^{-ta} \cdot f(t) \underset{(3)}{=} a\,u(t) + f(t).$$

(Hauptsatz)

Offensichtlich ist $u(t=0) = u_0$. □

Auch die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,$$

spielt in B-Algebren eine wichtige Rolle, und zwar bei der Untersuchung der Invertierbarkeit ihrer Elemente. In diesem allgemeineren Rahmen wird die geometrische Reihe oft als <u>Neumann'sche Reihe</u> bezeichnet.

<u>Lemma</u> 1: Es sei $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} < 1$. Dann ist $I - a$ invertierbar, und es gilt

$$(I-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Im Fall $\|a\| < 1$ hat man ferner die Ungleichungen

$$\|(I-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|a\|} \quad \text{und} \quad \|I - (I-a)^{-1}\| \leq \frac{\|a\|}{1-\|a\|}.$$

<u>Bem.</u>: Wir werden später sehen, dass der Grenzwert in der Voraussetzung stets existiert. Diese ist also für $\|a\| < 1$ immer erfüllt.

Bew.: Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} < 1$ ist, konvergiert nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\|$. Satz 1 bzw. das Argument zu dessen Beweis liefert die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ (bezüglich der Norm auf $\mathcal{A}$). Insbes. ist $\lim_{n\to\infty} \|a^n\| = 0$, und daraus folgt

$$(I-a)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k = I - a^{n+1} \longrightarrow I \quad (n\to\infty),$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (I-a)^{-1}$.

Im Fall $\|a\| < 1$ hat man ferner

$$\|(I-a)^{-1}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right\| \underset{\Delta\text{'s-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty}\|a^k\| \underset{\text{Norm ist submultiplikativ}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty}\|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|}$$

und $I - (I-a)^{-1} = (I-a-I)(I-a)^{-1} = -a(I-a)^{-1}$,

so dass $\|I-(I-a)^{-1}\| \leq \|a\|\,\|(I-a)^{-1}\| \leq \dfrac{\|a\|}{1-\|a\|}$. □

Damit können wir zeigen:

<u>Satz</u> 3: In einer B-Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement I ist die Gruppe $G_{\mathcal{A}}$ der invertierbaren Elemente offen und die Inversion $a \mapsto a^{-1} : G_{\mathcal{A}} \to G_{\mathcal{A}}$ ist stetig.

<u>Bew.</u>: Sei $a \in G_{\mathcal{A}}$ und $b \in \mathcal{A}$ mit $\| a-b \| < \| a^{-1} \|^{-1}$. Dann schreiben wir

$$b = a - (a-b) = a\,(I - a^{-1}(a-b)),$$

wobei $\| a^{-1}(a-b) \| \leq \| a^{-1} \| \, \| a-b \| < 1$. Nach Lemma 1 ist $I - a^{-1}(a-b) \in G_{\mathcal{A}}$ und damit auch b invertierbar. Weiter gilt

$$b^{-1} = (I - a^{-1}(a-b))^{-1} \cdot a^{-1},$$

damit

$$a^{-1} - b^{-1} = (I - (I - a^{-1}(a-b))^{-1})\, a^{-1}$$

und laut der zweiten Ungleichung im Lemma 1 folgt

$$\| a^{-1} - b^{-1} \| \leq \| I - (I - a^{-1}(a-b))^{-1} \| \, \| a^{-1} \|$$
$$\leq \frac{\| a^{-1} \| \, \| a^{-1}(a-b) \|}{1 - \| a^{-1}(a-b) \|}$$

Letzteres strebt gegen Null, wenn $b \to a$, also wenn $\| a-b \|$ gegen Null konvergiert, und das zeigt die Stetigkeit der Inversion auf $G_{\mathcal{A}}$.

An dieser Stelle soll der Beweis der Existenz des Grenzwerts $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| a^n \|}$ mit einem elementaren Argument nachgetragen werden.

Lemma 2: Es sei $(x_n)_n$ eine Folge in $[0,\infty)$ mit $x_{n+m} \le x_n x_m$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ und stimmt mit $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x_n}$ überein.

Bew.: Wir setzen $x := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x_n}$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[N]{x_N} \le x + \varepsilon$. Eine natürliche Zahl $n \ge N$ schreiben wir als $n = kN + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, \dots, N-1\}$. Dann ist

$$\sqrt[n]{x_n} = \left(x_{kN+r}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(x_N^k \cdot x_r\right)^{\frac{1}{n}} \le (x+\varepsilon)^{\frac{Nk}{n}} \cdot x_r^{\frac{1}{n}}$$

$$= (x+\varepsilon)\,(x+\varepsilon)^{-\frac{r}{n}}\, x_r^{\frac{1}{n}}$$

Beachten wir $0 \le r \le N-1$ (insbes. bewegt sich x_r zwischen $\min\limits_{r=1}^{N-1} x_r$ und $\max\limits_{r=1}^{N-1} x_r$), so ergibt sich für $n \to \infty$:

$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le x + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \le x = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{x_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}. \qquad \square$$

Damit kommen wir zu einigen Begriffen, die in B-Algebren (insbes. in $L(E)$, E B-Raum) einen natürlichen Rahmen haben, die sich aber auch für unbeschränkte Operatoren in naheliegender ~~natürlicher~~ Weise verallgemeinern lassen.

<u>Def.</u>: Es seien $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$. $G_{\mathcal{A}}$ bezeichne die Gruppe der invertierbaren Elemente. Dann heißen

- $\varrho(a) := \{ z \in \mathbb{C} : zI - a \in G_{\mathcal{A}} \}$ die Resolventenmenge von a und
- $R_a : \varrho(a) \longrightarrow \mathcal{A}, \quad z \longmapsto R_a(z) := (zI - a)^{-1}$ die Resolvente von a und schließlich
- $\sigma(a) = \varrho(a)^c = \mathbb{C} \setminus \varrho(a)$ das Spektrum von a.

Für <u>$\mathcal{A} = L(E)$</u> definiert man noch die folgenden Teilmengen des Spektrums: Für $A \in L(E)$ heißt

- $\sigma_p(A) := \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist nicht injektiv} \}$
  $= \{ \text{Eigenwerte von } A \}$
  das Punktspektrum,
- $\sigma_c(A) := \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, mit dichtem Bild} \}$
  das Stetigkeitsspektrum und
- $\sigma_r(A) := \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist injektiv, hat aber kein dichtes Bild} \}$
  das Restspektrum von A.

<u>Bem.</u>: $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, denn eine stetige Bijektion zwischen B-Räumen hat stets eine stetige Inverse (Satz von der offenen Abbildung bzw. Banachscher Iso- Umkehrsatz → Einführung FA.)

Satz 4 (Eigenschaften von Resolvente und Spektrum eines Elements a einer B-Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement) (35)

(1) Die Resolventenmenge $\varrho(a) \subset \mathbb{C}$ ist offen und die Resolvente $R_a : \varrho(a) \to G_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ ist stetig.

(2) Für $z, w \in \varrho(a)$ gilt die <u>Resolventengleichung</u>

$$R_a(z) - R_a(w) = -(z-w)\, R_a(z)\, R_a(w)$$

(3) R_a ist komplex differenzierbar mit $R_a'(z) = -R_a^2(z)$ und kann lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden.

(4) $\sigma(a)$ ist eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Es gilt $\sup\{|z| : z \in \sigma(a)\} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$.

Bem.: Die Größe $r(a) := \sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}$ wird als Spektralradius bezeichnet. Es kann sogar $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ gezeigt werden.

<u>Bew.</u> des Satzes: (1) Die Abb. $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, $z \mapsto f(z) = zI - a$ ist offensichtlich stetig. Da $\varrho(a) = f^{-1}(G_{\mathcal{A}})$ und $G_{\mathcal{A}}$ nach Satz 3 offen in $\mathcal{A}$ ist, ist $\varrho(a)$ offen in $\mathbb{C}$. $R_a : \varrho(a) \to G_{\mathcal{A}}$, $z \mapsto R_a(z) = (f(z))^{-1}$ ist stetig als Verknüpfung von f mit der Inversion, die beide stetig sind (nochmal Satz 3!).

(2) Wir haben

$$R_a(z) - R_a(w) = (zI-a)^{-1} - (wI-a)^{-1}$$
$$= ((wI-a) - (zI-a))(zI-a)^{-1}(wI-a)^{-1}$$

vertauschen!

$= (w-z)\, R_a(z)\, R_a(w)$, wie behauptet.

(3) Für $w, z \in \rho(a)$ mit $w \neq z$ haben wir also

$$\frac{1}{z-w}\left(R_a(z) - R_a(w)\right) = -R_a(z)\, R_a(w).$$

Mit der Stetigkeit der Resolvente folgt für $w \to z$:

$$R_a'(z) = \lim_{w \to z} \frac{1}{z-w}\left(R_a(z) - R_a(w)\right) = -R_a(z)^2$$

Für $z_0 \in \rho(a)$ und $z \in \rho(a)$ mit $|z - z_0|$ hinreichend klein ergibt die Neumannsche Reihe

$$R_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z_0 - z)^k (z_0 I - a)^{-(k+1)}$$

(Rechnung wie zu Lemma 1, Konvergenz wird erzwungen durch die Kleinheit von $|z - z_0|$. $\to$ Ü).

(4) Aus (1) folgt die Abgeschlossenheit des Spektrums. Für $|z| > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}}$ gegen $R_a(z)$, d.h. $z \in \rho(a)$. Das liefert $|z| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ für alle $z \in \sigma(a)$, nämlich $r(a) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$, also insbesondere die Beschränktheit und damit die Kompaktheit des Spektrums (dieser Schluß ist zulässig, wir sind gerade in $\mathbb{C}$!).

Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(a) \neq \emptyset$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an, so ist $\rho(a) = \mathbb{C}$, also insbesondere $a \in G_A$, also $\exists\, R_a(0) = (-a)^{-1} \neq 0$.

Wir wählen $y \in \mathcal{A}'$ mit $y[R_a(0)] \neq 0$. (Dass ein solches y existiert, hatten wir aus dem Satz von Hahn-Banach gefolgert.) Nun betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := y(R_a(z))$$

Nach (3) ist f komplex diff'bar, wg. $S(a) = \mathbb{C}$ also eine ganze holomorphe Funktion. Nun ist für $|z| > \|a\|$

$$|f(z)| \leq \|y\| \, \|R_a(z)\| = \|y\| \, \|(zI-a)^{-1}\|$$

Lemma 1: $\leq \|y\| \cdot \dfrac{1}{|z|} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{\|a\|}{|z|}} \longrightarrow 0 \quad (|z| \to \infty)$.

Also ist f insbesondere beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Damit widersprechen sich aber $f(0) \neq 0$ und $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. $\square$

Zum Abschluss dieses Exkurses sollen die Begriffe Resolvente, Spektrum etc. übertragen werden auf unbeschränkte Operatoren in einem B-Raum, wie z.B. Ableitungs- und Multiplikationsoperatoren. Die Formulierung "in einem B-Raum" bedeutet, dass der Zielraum wieder derselbe B-Raum ist, in dem man startet. Solche Operatoren sind in der Regel nicht überall definiert, wir setzen aber voraus, dass ihr <u>Definitionsbereich ein dichter linearer Teilraum</u> ist. In diesem Fall spricht man von einem dicht definierten Operator.

Def.: Es sei E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert.

(1) $\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \to E$ ist bijektiv und
$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\}$$
heißt die Resolventenmenge von A.

(2) $R_A : \varrho(A) \to L(E)$, $z \mapsto R_A(z) := (\lambda I - A)^{-1}$
heißt die Resolvente von A (manchmal auch: Resolventenabbildung.

(3) $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ heißt das Spektrum.

Bem.: (i) Das Spektrum wird ggf. wie oben weiter differenziert in σ_p, σ_c und σ_r.

(ii) Der Unterschied zum bisherigen liegt in der Definition von $\varrho(A)$. Zu beachten ist, dass von der Inversen $(\lambda I - A)^{-1}$ verlangt wird

- sie bildet E bijektiv nach D_A ab und
- sie ist eine stetige Abbildung von $E \to E$.

(iii) Diese Stetigkeitseigenschaft der Resolvente gilt stets, wenn der Operator A abgeschlossen ist, dahinter steckt allerdings der tiefliegende "Satz von der offenen Abbildung" ($\longrightarrow$ Einführung FA), nachdem eine stetige lineare Surjektion zwischen B-Räumen stets offen ist, d.h. offene Mengen werauf offene Mengen abgebildet, was bei bijektiven Abbildungen der Stetigkeit der Inversen entspricht.

(iv) Def.: Eine lineare Abbildung $A: E \supset D_A \to F$ zwischen normierten Räumen heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn ihr Graph $G_A := \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D_A\}$ abgeschlossen ist in $E \times F$ (Norm auf $E \times F$ ist gerade $\| \|_E + \| \|_F$). Das ist genau dann der Fall, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für jede Folge (x_n) in $D(A)$, die in E gegen ein $x \in E$ konvergiert, derart, dass auch die Bildfolge (Ax_n) in F gegen ein $y \in F$ konvergiert, gilt $x \in D_A$ und $Ax = y$.

(v) Ist $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und $\varrho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen. (M.a.W.: Für nicht abgeschlossene Operatoren ist stets $\sigma(A) = \mathbb{C}$, und Spektraluntersuchungen machen keinen Sinn.)

Begründung: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in D_A mit $x_n \xrightarrow{\| \|_E} x \in E$ und $Ax_n \xrightarrow{\| \|_E} y \in E$. N.V. ex. $\lambda \in \varrho(A)$, d.h. $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)$. Wir setzen $z_n = (\lambda I - A)^{-1} Ax_n \in D_A$ (Def.!) und $z = (\lambda I - A)^{-1} y \in D_A$. Dann ist $x_n + z_n \in D_A$ und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n + z_n =$

$$\lim_{n \to \infty} (I + (\lambda I - A)^{-1} A) x_n = \lim_{n \to \infty} (\lambda I - A)^{-1} (\lambda I - A + A) x_n$$

$$= \lambda (\lambda I - A)^{-1} x \quad , \text{ denn } (\lambda I - A)^{-1} \text{ ist stetig.}$$

Andererseits: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $z = (\lambda I - A)^{-1} y \in D_A$ und also

$$x = \lambda (\lambda I - A)^{-1} x - (\lambda I - A)^{-1} y = (\lambda I - A)^{-1} (\lambda x - y) \in D_A$$

und $(\lambda I - A) x = \lambda x - y \implies Ax = y$.

(vi) Nicht alle Aussagen aus Satz 4 bleiben gültig für unbeschränkte Operatoren, so ist das Spektrum $\sigma(A)$ nicht mehr beschränkt, es ist auch $\sigma(A) = \emptyset$ möglich. (vgl. Werner, Bsp. f. nach Satz VII.2.15) Gültig bleiben die folgenden Aussagen.

<u>Satz</u> 4': $A : E \supset D_A \to E$ sei linear und dicht definiert.

(1) $\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \to E$ ist bijektiv und $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\}$ ist offen und

die Resolvente $R_A : \varrho(A) \to$ ist stetig;

(2) Es gilt die Resolventengleichung $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu)$, R_A ist analytisch mit $R_A'(\lambda) = -R_A(\lambda)^2$;

(3) $\sigma(A)$ ist abgeschlossen.

Lediglich für (1) ist der Beweis etwas zu modifizieren. (→ Ü)