Exkurs: Die Banachalgebra $L(E)$

Hier soll die Potenzreihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ auf beschränkte lineare Abbildungen (= Operatoren) verallgemeinert werden. Das wird uns zwar leicht zum Ziel führen, was die für die PDE relevanten Differenzialoperatoren anbelangt (diese sind nämlich unbeschränkt), aber

- wir sehen mit der Potenzreihendarstellung eine wichtige Möglichkeit, Funktionen von Operatoren zu definieren (und sehen zugleich die Grenzen dieser Darstellung ein), !
- und lernen einige Begriffsbildungen kennen, die auch für die Charakterisierung von Differenzialoperatoren von Bedeutung sind.

Zunächst seien E und F normierte Vektorräume (in aller Regel: unendlich-dimensional!).

Def.: Eine lineare Abbildung $A : E \to F$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn
$$\|A\|_{E\to F} := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < \infty.$$

Bemerkung: Durch $\|A\|_{E\to F}$ wird eine Norm auf dem Vektorraum
$$L(E,F) := \{A : E \to F : A \text{ ist linear und beschränkt}\}$$
definiert (Übungsaufg., bei $L(E,F)$ handelt es sich um

einen Unterrektorraum oder linearen Teilraum von

Hom (E, F), dem VR aller linearen Abbildungen $A: E \to F$.)

Zur Bez.: Oft schreibe ich nur $\|A\|$ statt $\|A\|_{E \to F}$, wenn

vorher angegeben wurde, welchen Definitionsbereich bzw.

Zielbereich A hat. Entsprechend für $\|Ax\|_F$, $\|x\|_E$.

$L(E,F)$ enthält gerade alle stetigen linearen Abbildungen

$A: E \to F$. Genauer gilt der folgende

Satz: Sei $A: E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) A ist beschränkt (d.h. $A \in L(E,F)$),

(ii) A ist (global) Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $\|A\|_{E \to F}$ (wie oben definiert),

(iii) A ist gleichmäßig stetig,

(iv) A ist stetig

(v) A ist stetig im Nullpunkt.

Bew.: FA bzw. Übungsaufgabe. Begründung zu (v) $\Rightarrow$ (i):

Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|Ax\| \leq 1 \quad \forall x \in E \text{ mit } \|x\| \leq \delta.$$

Dann ist

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \frac{1}{\delta} \sup\{\|A\delta x\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

$$= \frac{1}{\delta} \sup \{ \|Ax\| : x \in E, \|x\| \leq \delta \} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Gegenbsp.:

(i) Differenzialoperatoren sind im allgemeinen nicht beschränkt.

Bsp. (klassische Ableitung): Es sei

$$A : (C^1([0,1]), \| \ \|_\infty) \to (C([0,1]), \| \ \|_\infty)$$

$$f \mapsto Af := f',$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Dann ist A unbeschränkt, denn für $f_n(x) = x^n$ haben wir $\|f_n\|_\infty = 1$; $Af_n(x) = nx^{n-1}$, also $\|Af_n\|_\infty = n$, und eine Abschätzung der Form $\|Af\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ kann also nicht bestehen.

(ii) Multiplikationsoperatoren (als Potenzial enthalten in den Hamiltonoperatoren $H = -\Delta + V$!) von $L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ sind im allgemeinen nicht beschränkt.

Genauer: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $1 \leq p \leq \infty$ und $M : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ definiert durch $Mf(x) = m(x) f(x)$ mit einer meßbaren Funktion m. Dann ist M beschränkt genau dann, wenn $m \in L^\infty(\mu)$.

Begründung: $\|Mf\|_p \leq \|m\|_\infty \|f\|_p$ gibt "$\Leftarrow$".

Umgekehrt: Wenn $m \notin L^\infty(\mu)$ ist, gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) = \varepsilon_n > 0$ und $|m(x)| \geq n \quad \forall x \in A_n$. Man setzt $f_n(x) := \frac{1}{\varepsilon_n^{1/p}} \chi_{A_n}(x)$ und hat $\|f_n\|_p = 1$ sowie $\|M f_n\|_p \geq n$.

Bem.: $L(E,F)$ ist vollständig, also ein Banach-Raum, wenn F ein Banachraum[(*)] ist.

Bew. dieser Aussage: FA. Einstieg: (A_n) Cauchy-Folge in $L(E,F)$, d.h. $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|A_n - A_m\|_{E\to F} = 0$. Dann ist für $x \in E$: $\|A_n x - A_m x\|_F = \|(A_n - A_m)x\|_F \leq \|A_n - A_m\|_{E\to F} \|x\|_E$.

Also ist $(A_n x)_n$ eine Cauchy-Folge in F. Wenn F vollständig ist, existiert $Ax := \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ (Grenzwert in F). Jetzt muß man noch $A \in L(E,F)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{E\to F} = 0$ zeigen.

Zwei wichtige Spezialfälle:

1. Der "topologische" Dualraum eines normierten VRes E, d.i.

$$E' := L(E, \mathbb{K}),$$

also der Raum aller stetigen linearen Funktionale $y: E \to \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vollständig ist. Nach der Vorbemerkung ist also E' stets vollständig.

(*) im folgenden häufig mit B-Raum abgekürzt.

Das Studium von E' ist (raumfüllender) Gegenstand der Funktionalanalysis. Von zwei Aussagen werden wir wiederholt Gebrauch machen:

(i) E' ist ausreichend groß, um die Punkte von E zu trennen,

d.h. $\forall x \in E \setminus \{0\} \; \exists y \in E'$, so dass $y[x] \neq 0$.

($\Rightarrow \forall x, z \in E$ mit $x \neq y$ existiert ein $y \in E'$ mit $y[x] \neq y[z]$!)

Mehr noch, wir haben sogar die sog. "Normformel":

(ii) $\forall x \in E \setminus \{0\} \; \exists y \in E'$ mit $\|y\|_{E'} = 1$, für das $y[x] = \|x\|$,

also $\|x\| = \max\{|y[x]| : \|y\|_{E'} \leq 1\}$ (Normformel)

Offenbar gilt: (ii) $\Rightarrow$ (i). (ii) folgt aus einem der fundamentalen Satz der linearen Funktionalanalysis, dem

<u>Satz von Hahn-Banach</u>: Sei E ein normierter $\mathbb{K}$-VR, $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $y \in F'$. Dann existiert ein $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\|_{E'} = \|y\|_{F'}$.

("Jedes stetige lineare Funktional auf einem linearen Teilraum eines normierten Raumes lässt sich auf den gesamten Raum fortsetzen, ohne die Norm zu vergrößern." $\longrightarrow$ Einf. FA für Beweis, allgemeinere Versionen und weiterführende Diskussion.)

Wie sieht man damit die Normformel ein? $F = \mathbb{K}x$ und $y[\lambda x] = \lambda \|x\|$. Dann ist $y[x] = \|x\|$ und $\|y\|_{F'} = \sup\{|y[z]| : z = \lambda x, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \frac{1}{\|x\|}\} = \sup\{|\lambda| \|x\| : |\lambda| \leq \frac{1}{\|x\|}\} = 1$. Die Fortsetzung hat die in (ii) beh. Eigenschaft.

Diese Aussagen (Hahn-Banach sowie (i) und (ii)) sind keineswegs trivial! Startet man z.B. mit einem lediglich quasi-normierten Vektorraum, d.h. dass die Dreiecksungleichung durch die schwächere

$$\|x+z\| \leq C(\|x\|+\|y\|)$$

(mit einem $C>1$) ersetzt wird, so gibt es i.allg. nicht genügend stetige lineare Funktionale, um (i) und (ii) zu gewährleisten. Bsp.: $L^p([0,1],\lambda)$ mit $p\in(0,1)$ und Quasi-Norm $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ (dann ist $\|f+g\|_p \leq 2(\|f\|_p+\|g\|_p)$).

In diesem Raum ist das einzige stetige lineare Funktional das Nullfunktional!

2. Die normierte Algebra $L(E)$

Im Fall $E=F$ schreiben wir $L(E):=L(E,E)$. Dies ist ein normierter VR und ein B-Raum, wenn E selbst vollständig ist. Neben Addition und Skalarer Multiplikation steht uns hier mit der Verknüpfung linearer Abbildungen

$$\circ : L(E)\times L(E)\to L(E), \quad (A,B)\mapsto AB$$

auch eine Multiplikation zur Verfügung. Diese ist

- assoziativ, aber
- i.allg. nicht kommutativ (2x2-Matrizen → Übung),
- besitzt mit der identischen Abbildung I ein Einselement und

- es gelten die Distributivgesetze

$$A(B+C) = AB + AC \quad ; \quad (A+B)C = AC + BC,$$

sowie $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Die algebraische Struktur ist also eine (nicht kommutative) Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement.

Versehen wir eine solche mit einer submultiplikativen Norm, d. h.

$$\| BC \| \leq \| B \| \, \| C \| \quad \forall B, C \in \mathcal{A},$$

für die auch noch $\| I \| = 1$ gilt (I = Einselement), so spricht man von einer <u>normierten Algebra</u>. (Dies ist für $L(E)$ gegeben, wenn wir diese mit der Operatornorm versehen.) Schließlich heißt eine vollständige normierte Algebra eine <u>Banach-Algebra</u>, oder kurz: eine <u>B-Algebra</u>. ($L(E)$ ist also eine B-Algebra, wenn E vollständig ist.)

Das genauere Studium der B-Algebren bleibt den Vorlesungen über Funktionalanalysis (Einführung oder der FA I) vorbehalten. Wir werden hier lediglich einige einfache Ergebnisse verwenden. Von Interesse ist für uns zuerst die Möglichkeit, auf einer B-Algebra Funktionen durch Potenzreihen definieren zu können. Wenn $L(E)$ die B-Algebra ist, die wir dabei im Auge haben, heißt das: Funktionen von stetigen / beschränkten linearen Abbildungen / Operatoren in dieser Weise zu definieren.

<u>Satz 1</u>: Es seien $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I und $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann wird durch

$$P: \mathcal{A} \supset B_R(0) \to \mathcal{A}, \quad a \mapsto P(a) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k$$

eine stetige Funktion definiert. Für jedes $r \in (0,R)$ konvergiert diese Reihe gleichmäßig auf $\overline{B_r(0)}$.

<u>Bew.</u>: Für $m,n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \le n$ und $a \in \overline{B_r(0)}$ haben wir

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} a_k a^k \Big\| \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| \, \|a^k\| \quad \text{(Normeigenschaften)}$$

Norm ist submultiplikativ

$$\le \sum_{k=m}^{n} |a_k| \, \|a\|^k \le \sum_{k=m}^{n} |a_k| r^k \to 0 \quad (m,n \to \infty),$$

letzteres, da $r \in (0,R)$ nach Voraussetzung.

Also ist die Partialsummenfolge $(S_n)_n$, also $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$, eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ und wegen der Vollständigkeitseigenschaft konvergent. Der Grenzwert sei mit a^* bezeichnet. Dann haben wir für $a \in \overline{B_r(0)}$:

$$\Big\| a^* - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a^k \Big\| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \, \|a^k\| \le \sum_{k=n}^{\infty} a_k r^k \to 0 \quad (n \to \infty),$$

und das ist die Aussage über die glm. Konvergenz. Zur Stetigkeit: Seien $a, b \in \overline{B_r(0)}$. Dann ist

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (a^k - b^k),$$

wobei anstelle der geometrischen Summenformel gilt

$$a^k - b^k = \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-1-l}(a-b)\, b^l. \quad (\mathcal{A} \text{ ist ggf. nicht abelsch!})$$

Hieraus folgt

$$\| P(a) - P(b) \| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1}}_{=: L < \infty,\ \text{da } r < R.} \cdot \|a-b\| \leq L \, \|a-b\|.$$

D.h. P ist Lipschitz-stetig auf $\overline{B_r(0)}$ mit Lipschitz-Konstante $L = L(r)$ wie oben. $\square$

Damit können wir für Elemente a einer B-Algebra $\mathcal{A}$ die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad a \mapsto \exp(a) := e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

ebenso durch eine Potenzreihe definieren wie für Matrizen oder komplexe Zahlen. Sie hat die folgenden Eigenschaften:

<u>Satz 2</u>: Es seien $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I, $a, b, c \in \mathcal{A}$, c invertierbar und $f \in C([-T,T], \mathcal{A})$. Dann gelten:

(1) Ist $a = c^{-1} b c$, so gilt $e^a = c^{-1} e^b c$.

(2) Wenn $[a,b] = 0$, so ist $e^{a+b} = e^a e^b$. Insbes. gilt für $s, t \in \mathbb{R}$: $e^{(s+t)a} = e^{sa} \cdot e^{ta}$.

(3) e^a ist invertierbar, und es gilt $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

(4) Die Abbildung $t \mapsto e^{ta} : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ ist differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dt} e^{ta} = a e^{ta}$ mit Grenzwertbildung in der Norm auf $\mathcal{A}$.

(5) Die Lösung u des Anfangswertproblems $u(t=0)=u_0 \in \mathcal{A}$ (2P)

für die Dgl. $\frac{du}{dt} = au + f$ ist in $C^1([-T,T],\mathcal{A})$ eindeutig

bestimmt und gegeben durch:

$$u(t) = e^{ta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)a} f(s)\,ds.$$

Bew. zu (5). Der Bew. von (5) benutzt den Hauptsatz der Differenzial- und Integral~~gleichung~~rechnung für vektorwertige Funktionen. Folgt im nächsten Abschnitt. Eindeutigkeit und Produktregel (wie in Ana I) verschieben wir in die → Übungen.

Bew.: (1) $$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (c^{-1}bc)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c^{-1}\left(\frac{1}{k!} b^k\right) c \overset{(*)}{=} c^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} b^k\right) c = c^{-1} e^b c.$$

Dabei wurde an der Stelle (*) verwendet, dass die Multiplikationen

$$M_r : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ a \mapsto ac \quad (c \text{ fest!})$$

und

$$M_e : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ a \mapsto c^{-1}a \quad (c^{-1} \text{ fest!})$$

linear und wg. der Submultiplikativität der Norm beschränkt, also stetig sind.

(2) Aus $[a,b]=0$ folgt die Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^l.$$

Damit erhalten wir

$$e^{a+b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^{l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{a^{k-l}}{(k-l)!} \frac{b^{l}}{l!}$$

$$\overset{(**)}{=} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!}\Big) = e^{a} \cdot e^{b},$$

wobei wir an der Stelle (**) das Cauchy-Produkt von Reihen benutzt haben. Dieses gilt unter der Voraussetzung von $\sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| < \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \| b_k \| < \infty$ ebenso und mit gleichem Beweis wie bei absoluter Konvergenz.

– Der Zusatz ist tatsächlich eine unmittelbare Folgerung.

(3) $$I = e^{0} = e^{a-a} \underset{(2)}{=} e^{a} \cdot e^{-a} \Rightarrow e^{-a} = (e^{a})^{-1}.$$

(4) Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq 1$. Dann haben wir

$$\Big\| \frac{1}{h}\big(e^{(t+h)a} - e^{ta}\big) - a \cdot e^{ta} \Big\| = \Big\| \Big\{ \frac{1}{h}\big(e^{ha} - I\big) - a \Big\} e^{ta} \Big\|$$

$$\leq \Big\| \frac{1}{h}\big(e^{ha} - I\big) - a \Big\| \, \| e^{ta} \| \leq \Big\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} a^{k} \Big\| \, e^{|t| \|a\|}$$

$$\leq |h| \cdot e^{(1+|t|)\|a\|} \longrightarrow 0 \quad (h \to 0)$$

(5, Existenzaussage): Da $e^{ta} \in \mathcal{A}$, die Multiplikation damit stetig und das Integral ein Grenzwert von Folgen (→ nächster Absatz) ist, können wir die angegebene Fkt. u schreiben als

$$u(t) = e^{ta}\Big(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s)\, ds\Big).$$

Dann ergeben (4) und die Produktregel $(\to \ddot{U})$

$$\frac{du}{dt}(t) = a e^{ta}\left(u_0 + \int_0^t e^{-sa} f(s)\,ds\right) + e^{ta}\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-sa} f(s)\,ds$$

$$= a u(t) + e^{ta} e^{-ta} \cdot f(t) \underset{(3)}{=} a u(t) + f(t).$$

(Hauptsatz)

Offensichtlich ist $u(t=0) = u_0$. $\square$

Auch die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,$$

spielt in B-Algebren eine wichtige Rolle, und zwar bei der Untersuchung der Invertierbarkeit ihrer Elemente. In diesem allgemeineren Rahmen wird die geometrische Reihe oft als <u>Neumann'sche Reihe</u> bezeichnet.

<u>Lemma 1</u>: Es sei $\mathcal{A}$ eine B-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$, so dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} < 1$. Dann ist $I - a$ invertierbar, und es gilt

$$(I-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Im Fall $\|a\| < 1$ hat man ferner die Ungleichungen

$$\|(I-a)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|a\|} \quad \text{und} \quad \|I - (I-a)^{-1}\| \le \frac{\|a\|}{1-\|a\|}.$$

Bem.: Wir werden später sehen, dass der Grenzwert in der Voraussetzung stets existiert. Diese ist also für $\|a\| < 1$ immer erfüllt.

Bew.: Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|} < 1$ ist, konvergiert nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\|$. Satz 1 bzw. das Argument zu diesem Beweis liefert die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ (bezüglich der Norm auf $\mathcal{A}$). Insbes. ist $\lim_{n\to\infty} \|a^n\| = 0$, und daraus folgt

$$(I-a)\cdot \sum_{k=0}^{n} a^k = I - a^{n+1} \longrightarrow I \quad (n\to\infty),$$

also $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (I-a)^{-1}$.

Im Fall $\|a\| < 1$ hat man ferner

$$\|(I-a)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} a^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|}$$

Δ's-Ungl. Norm ist submultiplikativ.

und $I - (I-a)^{-1} = (I-a-I)(I-a)^{-1} = -a(I-a)^{-1}$,

so dass $\|I-(I-a)^{-1}\| \leq \|a\|\,\|(I-a)^{-1}\| \leq \frac{\|a\|}{1-\|a\|}$. $\square$

Damit können wir zeigen:

<u>Satz</u> 3: In einer B-Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement I ist die Gruppe $G_{\mathcal{A}}$ der invertierbaren Elemente offen und die Inversion $a \mapsto a^{-1} : G_{\mathcal{A}} \to G_{\mathcal{A}}$ ist stetig.

Bew.: Sei $a \in G_{\mathcal{A}}$ und $b \in \mathcal{A}$ mit $\|a-b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$.

Dann ist

$$b = a - (a-b) = a\,(I - a^{-1}(a-b)),$$

wobei $\|a^{-1}(a-b)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-b\| < 1$. Nach Lemma 1 ist $I - a^{-1}(a-b)$ und damit auch b invertierbar.

Weiter gilt

$$b^{-1} = (I - a^{-1}(a-b))^{-1} a^{-1},$$

woraus mit der 1. Ungleichung in Lemma 1 folgt

$$\|b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|\,\|(I - a^{-1}(a-b))^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \frac{1}{1 - \|a^{-1}(a-b)\|},$$

also $\lim\limits_{b \to a} \|b^{-1}\| = \|a^{-1}\|$. Weiter haben wir

$$a^{-1} - b^{-1} = a^{-1}(I - a b^{-1}) = a^{-1}(b-a) b^{-1}.$$

und daher

$$\|a^{-1} - b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|\,\|b-a\|\,\|b^{-1}\| \longrightarrow 0 \quad (b \to a).$$

Damit kommen wir zu einigen Begriffen, die in Banach-Algebren (insbes. $L(E)$) einen natürlichen Rahmen haben und die wir später für unbeschränkte Operatoren in naheliegender Weise verallgemeinern können.

Def.: Es seien $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$. $G_{\mathcal{A}}$ bezeichne die Gruppe der invertierbaren Elemente. Dann heißen

- $\varrho(a) := \{ z \in \mathbb{C} : zI - a \in G_{\mathcal{A}} \}$ die <u>Resolventenmenge</u> von a und

- $R_a : \varrho(a) \to \mathcal{A}, \; z \mapsto R_a(z) := (zI - a)^{-1}$ die <u>Resolvente</u> von a und schließlich

- $\sigma(a) = \varrho(a)^c = \mathbb{C} \setminus \varrho(a)$ das <u>Spektrum</u> von a.

Für $\mathcal{A} = L(E)$ definiert man noch die folgenden Teilmengen des Spektrums: Für $A \in L(E)$ heißen

- $\sigma_p(A) = \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist nicht injektiv} \}$

  $= \{ \text{Eigenwerte von } A \}$ das <u>Punktspektrum</u>,

- $\sigma_c(A) = \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist injektiv, nicht surjektiv, mit dichtem Bild} \}$ das <u>Stetigkeitsspektrum</u>,

- $\sigma_r(A) = \{ z \in \sigma(A) : zI - A \text{ ist injektiv und hat kein dichtes Bild} \}$ das <u>Restspektrum</u> von A.

Bem.: Es gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$, denn eine stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen hat stets eine stetige Inverse (Banachscher Isomorphiesatz, $\to$ Einführung FA).

Satz 4 (Eigenschaften der Resolvente) Sei $\mathcal{A}$ eine komplexe! Banach-Algebra mit Einselement I und $a \in \mathcal{A}$. Dann gelten:

(1) Die Resolventenmenge $\varrho(a)$ ist offen und die Resolvente $R_a : \varrho(a) \to G_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ stetig.

(2) Für $z, w \in \varrho(a)$ gilt die Resolventengleichung

$$R_a(z) - R_a(w) = -(z-w) R_a(z) R_a(w).$$

(3) R_a ist komplex differenzierbar mit $R_a'(z) = -R_a(z)^2$ und kann lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Bew.: (1) Offenbar ist $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, $z \mapsto f(z) = zI - a$ stetig. Da $\varrho(a) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in G_{\mathcal{A}}\} = f^{-1}(G_{\mathcal{A}})$ und $G_{\mathcal{A}}$ nach Satz 3 offen in $\mathcal{A}$ ist, ist $\varrho(a)$ offen in $\mathbb{C}$.

$$R_a : \varrho(a) \to G_{\mathcal{A}}, \quad z \mapsto R_a(z) = (f(z))^{-1}$$

ist stetig als Verknüpfung von f mit der nach Satz 3 ebenfalls stetigen Inversion.

(2) $R_a(z) - R_a(w) = (zI-a)^{-1} - (wI-a)^{-1} =$

$$= ((wI-a) - (zI-a))((zI-a)^{-1}(wI-a)^{-1})$$

$$= (w-z) R_a(z) R_a(w)$$

(3) Für $z, w \in \varrho(a)$ mit $w \neq z$ ergibt sich daraus

$$\frac{1}{z-w}(R_a(z) - R_a(w)) = -R_a(z) R_a(w) \xrightarrow[w \to z]{} -R_a(z)^2,$$

letzteres aufgrund der Stetigkeit der Resolvente.

Schließlich sei $z_0 \in S(a)$ und $z \in S(a)$ mit $|z-z_0|$ hinreichend klein. Dann ergibt die Neumannsche Reihe für

$$zI-a = (z-z_0)I + (z_0I-a) = (z_0I-a)(I-(z_0-z)(z_0I-a)^{-1}) \quad ,$$

dass $$(zI-a)^{-1} = (z_0I-a)^{-1}\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k(z_0I-a)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k(z_0I-a)^{-(k+1)}.$$

□

Nun wenden wir uns dem Spektrum zu:

<u>Def.</u>: Die Größe $r(a) := \sup\{|z| : z\in\sigma(a)\}$ heißt der Spektralradius eines Elements a einer B-Algebra A mit Einselement.

<u>Satz 5</u>: Es seien A wie in Satz 4 und $a\in A$. Das Spektrum $\sigma(a)$ ist eine kompakte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für den Spektralradius gilt

$$r(a) = \lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

<u>Bew.</u>: (1) Aus Satz 4 (1) folgt die Abgeschlossenheit des Spektrums. Für $|z| > \|a\|$ konvergiert die Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{z^{k+1}} = R_a(z)$, woraus $r(a)\le\|a\|$ und insbesondere die Kompaktheit des Spektrums $\sigma(a)$ folgt.

<u>(2)</u>

Um $\sigma(a)\neq\emptyset$ zu zeigen, behandeln wir das Gegenteil an, also $S(a)=\mathbb{C}$, insbesondere $0\in S(a)$, so dass

$0 \neq R_a(0) = (-a)^{-1}$. Wir wählen $y \in \mathcal{A}'$, so dass $y[R_a(0)] \neq 0$ (existiert nach Hahn-Banach) und definieren

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\quad z \mapsto f(z) := y[R_a(z)].$$

Nach Satz 4 (3) ist f eine ganze Funktion. Wegen

$$\lim_{z\to\infty} R_a(z) = \lim_{z\to\infty} (zI-a)^{-1} = 0$$

folgt $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ und mit dem Satz von Liouville, dass $f \equiv 0$, im Widerspruch zu $f(0) \neq 0$.

(3)

Nun seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > r(a^n)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Lösungen von $z^n = \lambda$. Dann ist für $a \in \mathcal{A}$

$$a^n - \lambda = \prod_{j=1}^{n} a - \lambda_j ,$$

und die linke Seite ist invertierbar genau dann, wenn jeder Faktor auf der rechten Seite invertierbar ist. Ferner gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, dass $|\lambda_j|^n = |\lambda|$. Mit dieser Überlegung folgt

$$r(a^n) = \inf\{ r > 0 : a^n - \lambda I \in G_{\mathcal{A}} \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ mit } |\lambda| \geq r \}$$

$$\left(= \inf\{ r > 0 : \prod_{j=1}^{n} a - \lambda_j I \in G_{\mathcal{A}} \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \text{ mit } \underbrace{|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n|}_{\lambda_1^n = \dots = \lambda_n^n \text{ und }} \geq \sqrt[n]{r} \} \right)$$

$$= \inf\{ s^n > 0 : a - \mu I \in G_{\mathcal{A}} \ \forall \mu \in \mathbb{C} \text{ mit } |\mu| \geq s \}$$

$$= \left(\inf\{ s > 0 : a - \mu I \in G_{\mathcal{A}} \ \forall \mu \in B_s(0)^c \}\right)^n = r(a)^n.$$

Mit der Abschätzung $r(a) \leq \|a\|$ aus Schritt (1), angewandt auf a^n anstelle von a, folgt

$$r(a)^n = r(a^n) \leq \|a^n\| \Rightarrow r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und insbesondere

$$r(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(4) Bleibt z.z., dass

$$r(a) \geq \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}, \qquad (!)$$

dann folgt $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$, insbes. also auch die Existenz des Grenzwerts. Dazu benötigen wir ein fundamentales Ergebnis der Funktionalanalysis, das

<u>Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit</u>: Es seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $M \subset L(E,F)$ mit $\sup_{A\in M} \|Ax\| < \infty$ für alle $x \in E$. Dann ist bereits $\sup_{A \in M} \|A\| < \infty$.

(s. z.B. Meise/Vogt: Einführung FA, Thm. 8.10. In Worten: Jede punktweise beschränkte Teilmenge von $L(E,F)$ ist beschränkt, wenn E vollständig ist.)

Folgerung: Es sei E ein normierter Raum und $M \subset E$ eine Teilmenge mit $\sup_{x\in E} |y[x]| < \infty$ für alle $y \in E'$. Dann gilt bereits $\sup_{x\in E} \|x\| < \infty$.

(Jede schwach beschränkte Teilmenge eines normierten Raumes ist (norm-)beschränkt.)

Bew. der Folgerung: Die kanonische Einbettung

$J: E \to E''$, $x \mapsto J(x)$, def. durch $J(x)[y] := y[x]$ $\forall y \in E'$

ist eine Isometrie, denn

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{y \in E', \|y\|_{E'} \leq 1} |J(x)[y]| = \sup |y[x]| \underset{\sim}{=} \|x\|,$$

letzteres aufgrund der Normformel ($\to$ Hahn-Banach).

Dann lautet die Voraussetzung mit $\mathcal{M} = J(M)$

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{M}} |\varphi[y]| = \sup_{x \in M} |y[x]| < \infty$$

und das "Prinzip", angewendet in $E'' = L(E', \mathbb{K})$, ergibt

$$\sup_{x \in M} \|x\| = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}} \|\varphi\| < \infty. \qquad \square$$

Damit ausgerüstet, können wir jetzt den Beweis der Spektralradiusformel (und damit von Satz 5) zu Ende führen:

Für $a \in A$ und $y \in A'$ definieren wir die holomorphe (vgl. (2)) Funktion $f: \varrho(a) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) := y[R_a(z)]$.

Für $|z| > \|a\|$ ist dann wegen $R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[a^n] \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Rechts steht die Laurentreihe von f um $z_0 = 0$. Diese konvergiert auf dem gesamten "Kreisring" $\overline{B_{r(a)}(0)}^c$, auf dem f holomorph ist. Also ist für jedes $r > r(a)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{r^n} |y[a^n]| < \infty.$$

Die Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ergibt nun:

Für alle $r > r(a)$ ist $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|a^n\|}{r^n} < \infty$ bzw.

$\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C(r)^{\frac{1}{n}} \cdot r$. Für $n \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r \qquad \forall r > r(a)$$

und damit $\limsup\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$, wie behauptet. □

Zum Abschluss dieses Exkurses sollen die Begriffe "Resolvente", "Spektrum" etc. übertragen werden auf unbeschränkte Operatoren in einem Banachraum, wie z. B. Ableitungs- und Multiplikationsoperatoren. Die Formulierung "in einem Banachraum" bedeutet, dass der Zielraum wieder derselbe Raum ist, in dem man startet. Solche Operatoren sind in der Regel nicht überall definiert, wir setzen aber voraus, dass ihr Definitionsbereich ein dichter linearer Teilraum ist. In diesem Fall spricht man von einem dicht definierten Operator.

Def.: Es sei E ein Banach-Raum und $A : E \supset D_A \to E$ dicht definiert.

(1) $\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \to E$ ist bijektiv und

$$(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\}$$

heißt die Resolventenmenge von A.

(2) $R_A : \varrho(A) \to L(E),\ z \mapsto R_A(z) := (zI - A)^{-1}$ heißt die Resolvente (oder: Resolventenabbildung) von A.

(3) $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ heißt das Spektrum von A.

Bem.: (1) Das Spektrum wird ggf. wie oben weiter differenziert in σ_p, σ_c und σ_r.

(2) Der Unterschied zum Bisherigen liegt in der Definition von $\varrho(A)$. Zu beachten ist, dass von der Inversen $(\lambda I - A)^{-1}$ verlangt wird,

- E bijektiv nach D_A abzubilden und
- eine stetige Abbildung von $E \to E$ zu sein.

(3) Def.: Eine lineare Abbildung $A : E \supset D_A \to F$ zwischen normierten Räumen E und F heißt abgeschlossen, wenn ihr Graph $G_A := \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D_A\}$ in $E \times F$ (ausgestattet mit der Norm $\| \ \|_E + \| \ \|_F$) abgeschlossen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist $(x_n)_n$ eine Folge in D_A mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in E$, so dass auch die Bildfolge $(Ax_n)_n$ gegen ein $y \in F$ konvergiert, so ist $x \in D_A$ und $Ax = y$.

Die Abgeschlossenheit eines Operators $A: E \supset D_A \to E$ hat folgende Konsequenzen für seine Resolvente:

(4) Ist E ein Banachraum, $A: E \supset D_A \to E$ abgeschlossen und – für ein $z \in \mathbb{C}$ – die Abbildung $zI - A: D_A \to E$ ~~bij~~ bijektiv, so ist $(zI-A)^{-1}: E \to E$ stetig. Dies folgt aus einem tiefliegenden Satz der Funktionalanalysis, dem <u>Banachschen Isomorphiesatz</u>: Sind E und F Banachräume und $T: E \to F$ stetig, linear und bijektiv, so ist auch $T^{-1}: F \to E$ stetig (und somit T ein Isomorphismus von Banachräumen). Dieser Satz wird angewendet auf

$$zI - A : (D_A, \| \ \|_{D_A}) \longrightarrow E,$$

wobei D_A mit der "Graphennorm" $\|x\|_{D_A} = \|x\|_E + \|Ax\|_E$ ausgestattet wird. In den Übungen sollen Sie zeigen, dass $(D_A, \| \ \|_{D_A})$ vollständig ist, wenn E und F Banachräume sind und A abgeschlossen ist.

Wenn diese Situation vorliegt und $zI-A$ bijektiv ist, ist also stets $(zI-A)^{-1}: E \longrightarrow (D_A, \| \ \|_{D_A})$ stetig und damit auch $(zI-A)^{-1}: E \to E$ stetig.

(5) Ist $A: E \supset D_A \longrightarrow E$ dicht definiert und $\varrho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen. (Mit anderen Worten: Für nicht abgeschlossene Operatoren ist stets $\sigma(A) = \mathbb{C}$, und Spektraluntersuchungen machen wenig Sinn.)

Begründung: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in D_A mit $x_n \xrightarrow{\| \ \|_E} x \in E$ und $Ax_n \xrightarrow{\| \ \|_E} y \in E$. Nach Vor. existiert $\lambda \in \varrho(A)$, d.h. $(\lambda I-A)^{-1} \in L(E)$. Wir setzen $z_n := (\lambda I-A)^{-1} A x_n \in D_A$ und $z := (\lambda I-A)^{-1} y \in D_A$. Dann ist $x_n + z_n \in D_A$ und

$$\lim_{n\to\infty} x_n + z_n = \lim_{n\to\infty} (I + (\lambda I-A)^{-1} A) x_n = \lim_{n\to\infty} (\lambda I-A)^{-1} \lambda x_n$$

$$= \lambda (\lambda I-A)^{-1} x, \text{ denn } (\lambda I-A)^{-1} \text{ ist stetig.}$$

Also ist

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n + z_n - \lim_{n\to\infty} z_n = \lambda(\lambda I-A)^{-1} x - (\lambda I-A)^{-1} y$$

$$= (\lambda I-A)^{-1}(\lambda x - y) \in D_A \text{ und weiter}$$

$$(\lambda I-A)x = \lambda x - y \Rightarrow Ax = y.$$

(6) Nicht alle Aussagen aus den Sätzen 4 und 5 bleiben für unbeschränkte Operatoren gültig. Z.B. ist das Spektrum nicht mehr beschränkt, auch $\sigma(A) = \emptyset$ ist möglich (vgl. Werner, Bsp. (f) nach Satz VII.2.15).

Gültig bleiben die folgenden Aussagen:

Satz 4': $A : E \supset D_A \to E$ sei linear, dicht definiert und abgeschlossen. Dann gelten:

(1) $\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D_A \to E$ ist bijektiv und $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)\}$
ist offen und die Resolvente

$$R_A : \varrho(A) \to L(E), \quad z \mapsto R_A(z) = (zI - A)^{-1}$$

ist stetig.

(2) Es gilt die Resolventengleichung

$$R_A(z) - R_A(w) = (w - z) R_A(z) R_A(w),$$

R_A ist analytisch mit $R_A'(z) = -R_A(z)^2$.

(3) $\sigma(A)$ ist abgeschlossen.

Der Beweis von (1) ist etwas zu modifizieren. Für $z_0 \in \varrho(A)$ und $|z - z_0|$ hinreichend klein, zeigt man die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n R_A(z_0)^n =: S(z)$$

in der Operatornorm und die Identität

$$R_A(z) = R_A(z_0) \cdot S(z).$$

(Einzelheiten in: Yosida, Functional Analysis, Kap. VIII. 2)