Exkurs: Das Bochner-Integral

(Lebesgue-Integral für B-Raum-wertige Funktionen)

Hier seien stets $I \subset \mathbb{R}$ ein (ggf. uneigentliches) Intervall und E ein B-Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $\mathcal{B}(I)$ bezeichnet die Borel-σ-Algebra über I und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(I)$.

Def.: Eine Treppenfunktion (mit Werten in E) ist eine Funktion f der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} a_i$$

mit $A_i \in \mathcal{B}(I)$, $\lambda(A_i) < \infty$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $a_i \in E$. Hierfür definieren wir das (Bochner-)Integral

$$\int_I f(t)\, d\lambda(t) = \int_I f\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) a_i$$

Solche Treppenfunktionen bilden einen $\mathbb{K}$-VR, den wir mit $T(I,E)$ bezeichnen.

Bem.: (1) Ist $f \in T(I,E)$ und $x \in E \setminus \{0\}$, so gilt $\lambda(f^{-1}(\{x\})) < \infty$.

(2) Für $f \in T(I,E)$ ist $\|f(\cdot)\|_E : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|f(t)\|_E = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) \|a_i\|_E$ in $T(I,\mathbb{R})$

(3) Es gilt die Minkowski-(sche Integral-)Ungleichung:

$$\| \int_I f \, d\lambda \|_E = \| \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) a_i \| \leq \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) \| a_i \|$$

$$= \int_I \|f(t)\|_E \, d\lambda(t)$$

~~(Tatsächlich gilt sogar Gleichheit, da die A_i paarweise disjunkt sind. Diese geht aber später ohne Lin. verloren.)~~

(4) Durch $\|f\|_{T(I,E)} := \int_I \|f(t)\|_E \, d\lambda(t)$ wird eine Seminorm auf $T(I,E)$ definiert.

<u>Def.</u>: Eine Funktion $f : I \to E$ heißt meßbar, wenn eine Nullmenge $N \subset I$ und eine Folge $(f_n)_n$ in $T(I,E)$ existieren, so dass für alle $t \in I \setminus N$ gilt $f_n(t) \to f(t)$, d. h. $\lim_{n \to \infty} \| f_n(t) - f(t) \|_E = 0$.

<u>Bem.</u>: Ist $f : I \to E$ messbar, so ist auch $\|f(\cdot)\|_E$: $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|f(t)\|_E$ messbar. Denn $\|f_n(\cdot)\|_E \in T(I,\mathbb{R})$ und $| \|f(t)\|_E - \|f_n(t)\|_E | \leq \|f(t) - f_n(t)\|_E \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$.

<u>Satz 1</u> Sei $(f_n)_n$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : I \to E$, so dass $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$ für λ-fast alle $t \in I$. Dann ist auch f messbar.

("λ-fast alle": mit Ausnahme einer Lebesgue- oder Borel- -Nullmenge) wie in Analysis III üblich!

Zum Bew. nehmen wir o.E. an, dass $\lambda(I) < \infty$ ist.
(Das ist unproblematisch, weil $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ σ-endlich ist.)
Dann können wir ein Ergebnis aus der Maßtheorie benutzen, nämlich den (s. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie)

Satz von Egorov: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $\varphi_k : X \to \mathbb{R}$ eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen, die μ-f.ü. gegen $\varphi : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Ausnahmemenge $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x \in X_\varepsilon^c} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| = 0.$

Bem.: Wir haben also gleichmäßige Konvergenz auf X_ε^c. Ohne die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ wird die Aussage falsch, Bsp.: $\varphi_k = \chi_{[k,k+1)} \to 0$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.

Bew. von Satz 1: Vorausgesetzt ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \quad \text{für } \lambda\text{-fast alle } t \in I,$$

wobei die f_n messbar sind. Letzteres bedeutet: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(f_{n,k})_k$ in $T(I,E)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} f_{nk}(t) = f_n(t) \quad \text{für } \lambda\text{-fast alle } t \in I.$$

N_0 bezeichne diejenige Menge, wo die obigen Grenzwertaussagen nicht gelten. Dann ist N_0 eine λ-Nullmenge als abzählbare Vereinigung ebensolcher Nullmengen.

Nun wenden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Satz von Egorov an und zwar mit $\varepsilon = 2^{-n}$ und $\varphi_k(t) = \| f_{n,k}(t) - f_n(t) \|_E$ also $\varphi = 0$. Dann gibt es $I_n \in \mathcal{B}(I)$ mit $\lambda(I_n) \leq 2^{-n}$ und $\lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{t \in I_n^c} |\varphi_k(t)| = \lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{t \in I_n^c} \| f_{n,k}(t) - f_n(t) \|_E =$

Wir wählen zu $n \in \mathbb{N}$ $k = k(n)$, so dass

$$\| f_{n,k(n)}(t) - f_n(t) \|_E \leq \frac{1}{n} \quad \forall t \in I_n^c$$

und setzen $g_n := f_{n,k(n)} \in T(I,E)$. Weiter definieren wir $N := N_0 \cup \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \geq n} I_m$. Dann ist

$$\lambda(N) = \lambda\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} I_m \Big) \leq \lambda\Big(\bigcup_{m \geq n} I_m \Big)$$

$$\leq \sum_{m \geq n} \lambda(I_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{1-n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

und also $\lambda(N) = 0$. Für $t \in N^c$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $t \notin I_n$ $\forall n \geq 0$ und daher

$$\| g_n(t) - f_n(t) \|_E \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq n_0$$

Es folgt $\| g_n(t) - f(t) \|_E \leq \| f_n(t) - f(t) \|_E + \frac{1}{n}$

und damit $\lim\limits_{n \to \infty} \| g_n(t) - f(t) \|_E = 0$,

und also die Messbarkeit von f. $\square$

Folgerung: • Sind $f: I \to E$ und $\varphi: I \to \mathbb{R}$ messbar, so ist auch $\varphi \cdot f: I \to E$ messbar.

• Ist $(a_n)_n$ eine Folge in E und $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{B}(I)$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \cdot a_n \text{ messbar.}$$

• Sind $f: I \to E$ meßbar und $\varphi: E \to F$ stetig, so ist $\varphi \circ f: I \to F$ meßbar.

<u>Satz von Pettis:</u> Eine Funktion $f: I \to E$ ist genau dann messbar, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) f ist schwach messbar, d.h. für jedes $y \in E'$ ist $y[f]: I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto y[f(t)]$ messbar,

(2) es gibt eine Nullmenge $N \subset I$, so dass $f(I \setminus N)$ separabel ist.

(Dabei heißt eine Teilmenge eines metrischen Raumes separabel, wenn sie eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.)

Die Richtung "$\Rightarrow$" des Satzes ist leicht einzusehen:

• Ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ λ-f.ü. mit $f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \in T(I,E)$,

so folgt $y[f] = \lim_{n\to\infty} y[f_n] = \lim_{n\to\infty} y[\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y[a_i] \cdot \chi_{A_i} \text{ und } \sum_{i=1}^{n} y[a_i] \chi_{A_i} \in T(I,\mathbb{K})$$

- Für $f_n \in T(I,E)$ ist $\# f_n(I) < \infty$ und für λ-fast alle $t \in I$ gilt $f_*(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(I)}$, und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(I)$ ist abzählbar.

Für die andere Richtung benötigen wir ein vorbereitendes

<u>Lemma</u> 1: Sei E ein separabler B-Raum, E' sein Dualraum und B' die abgeschlossene Einheitskugel in E'. Dann existiert eine abzählbare Teilmenge $\{y_n : n\in\mathbb{N}\} \subset B'$, so dass gilt:

zu jedem $y \in B'$ existiert eine Folge $(y_{n_k})_k$ in $\{y_n, n\in\mathbb{N}\}$, so dass $\lim_{k\to\infty} y_{n_k}[x] = y[x]$ für alle $x\in E$.

Bem. zur Konvergenz in Lemma 1: Eine Folge $(\psi_k)_k$ in E' mit der genannten Eigenschaft, nämlich: Es existiert ein $\psi \in E'$, so dass für alle $x \in E$ gilt $\lim_{k\to\infty} \psi_k[x] = \psi[x]$, heißt schwach-*-konvergent gegen ψ. Man schreibt auch $\sigma^*\text{-}\lim_{k\to\infty} \psi_k = \psi$ oder $\psi_k \rightharpoonup \psi$ $(k\to\infty)$. Im ∞-dim. ist dieser Konvergenzbegriff echt schwächer als die Konvergenz in $\| \ \|_{E'}$.

Man kann die Aussage des Lemmas also auch so formulieren: In B' existiert eine abzählbare dichte Teilmenge bezüglich der σ^*-Topologie.

Bew. des Lemmas:

Es sei $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in E.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Abbildungen

$$F_n : B' \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto F_n(y) := (y[x_1], \dots, y[x_n]).$$

$(\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ mit $|z| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist separabel

und daher ist auch $F_n(B') \subset (\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ separabel.

(Denn: Ist (X, d) ein separabler metrischer Raum und $Y \subset X$, so ist auch $(Y, d|_Y)$ separabel $\to$ Ü.)

Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(y_{n,k})_k$ in B', so dass $F_n(\{y_{n,k} : k \in \mathbb{N}\})$ dicht ist in $F_n(B')$.

Ist nun $y \in B'$ gegeben, finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k(n)$, so dass $|F_n(y_{n,k(n)}) - F_n(y)| \le \frac{1}{n}$, also insbesondere

$$|y_{n,k(n)}[x_j] - y[x_j]| \le \frac{1}{n} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nun seien neben y auch $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall j \ge j_0(\varepsilon)$ gilt $\|x - x_j\|_E < \varepsilon/3$. Wir wählen $n \ge j_0$, so dass $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$.

$$\Rightarrow |y[x] - y_{n,k(n)}[x]| \le |y[x] - y[x_j]| +$$

$$|y[x_j] - y_{n,k(n)}[x_j]| + |y_{n,k(n)}[x_j] - y_{n,k(n)}[x]|$$

$\le 2\|x-x_j\|_E + \frac{1}{n} < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. (Beachte: $\|y\|_{E'} \le 1$ und $\|y_{n,k}\|_{E'} \le 1 \ \forall n,k$!). Also $\lim_{n\to\infty} y_{n,k(n)}[x] = y[x]$. $\square$

Bew. (Satz v. Pettis, difficult part): Sei also $f: I \to E$ schwach messbar und – für eine Nullmenge $N \subset I$ – $f(I \setminus N)$ separabel. Zu zeigen ist die Meßbarkeit von f.

(i) Nach Abänderung von f auf N (beeinträchtigt nicht die Meßbarkeit!) haben wir: $f(I)$ ist separabel. Sei M eine abzählbare dichte Teilmenge. Wir bilden $V = \langle M \rangle_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}$, dann ist V abzählbar und ein Vektorraum, $\overline{V} \subset E$ ist also ein separabler, abgeschlossener UVR von E, also ein $\mathcal{B}$-Raum, und es gilt $f(I) \subset \overline{V}$. Daher können o.E. E als separabel annehmen.

(ii) Wir zeigen: Ist $x \in E$ beliebig, so ist die Abbildung

$$I \to \mathbb{R},\quad t \longmapsto \|f(t)-x\|_E$$

meßbar(!)

Begründung: Für jedes $a \ge 0$ ist nach der Normformel und dem Lemma 1 mit $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ als "schwach dichter" Teilmenge

$$\{t \in I : \|f(t)-x\|_E \le a\} = \{t \in I : \max_{\substack{y \in E' \\ \|y\| \le 1}} |y[f(t)-x]| \le a\}$$

$$= \{t \in I : \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n[f(t)-x]| \le a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{t \in I : |y_n[\ldots]| \le a\}$$

Nun ist eine Funktion $g: I \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar genau dann, wenn alle Mengen

$$\{t \in I : g(t) \leq a\}, \quad a \in \mathbb{R}$$

~~Lebesgue~~-meßbar sind. Da f nach Vor. schwach meßbar ist, ist dies für

$$t \longmapsto |y_n[f(t)-x]| \;(= \varphi \circ f,\ \varphi \text{ stetig},$$ vgl. Folgerung aus Satz 1

der Fall. Dann ist aber auch der abzählbare Durchschnitt dieser Mengen Borel-meßbar und damit $\{t \in I : \|f(t)-x\|_E \leq a\}$. Das ist (!).

(iii) Nun sei $(x_j)_j$ dicht in $f(I)$. Nach (ii) sind für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $B_{n,j} := \{t \in I : \|f(t)-x_j\|_E \leq \frac{1}{n}\}$ und also auch $\Delta_{n,j} := B_{n,j} \setminus \bigcup_{i<j} B_{n,i}$ Borel-m.bar. Die Folgerung aus Satz 1 ergibt die Meßbarkeit von

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \chi_{\Delta_{n,j}}.$$

Ist nun $t \in I$, so existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\|f(t)-x_j\|_E \leq \frac{1}{n}$. Ist j_0 minimal mit dieser Eigenschaft, so ist $\chi_{\Delta_{n,j_0}}(t) = 1$, sonst haben wir $\chi_{\Delta_{n,j}}(t) = 0$. Also ist

$$\|f_n(t) - f(t)\| = \|f(t) - x_{j_0}\|_E \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Also $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$. Nach Satz 1 ist f meßbar. $\square$

Bevor wir zwei Folgerungen aus dem Satz v. Pettis ziehen, soll der Begriff der schwachen Konvergenz in einem B-Raum ($\neq$ schwach-$*$-Konvergenz) eingeführt werden:

Def. (i) Eine Folge $(x_n)_n$ in einem B-Raum E heißt schwach konvergent gegen $x \in E$, wenn für alle $y \in E'$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} y[x_n] = y[x].$$

Bezeichnung: $\sigma-\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \longrightarrow x \; (n \to \infty)$.

(ii) Eine Funktion $f: I \to E$ heißt schwach stetig, wenn für alle $y \in E'$ die Funktion $y \circ f: I \to \mathbb{K}$ stetig ist.
(Das bedeutet $\sigma-\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$ für alle Folgen $(t_n)_n$ in I mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Kann in einem einzelnen Punkt $t \in I$ oder für alle $t \in I$ so definiert werden.)

(iii) Der schwache Abschluß $\overline{M}^\sigma$ einer Teilmenge $M \subset E$ ist der Abschluß von M in E bezüglich der schwachen Topologie, also

$$\overline{M}^\sigma = \{x \in E : \exists (x_n)_n \text{ in } M, \text{ so dass } \sigma-\lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$

Bem.: Es gilt die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad (\text{Normkonvergenz in } E)$$

$$\Longrightarrow \sigma-\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad (\text{schwache Konvergenz in } E),$$

denn für $y \in E'$ ist $|y[x_n - x]| \leq \|y\|_{E'} \, \|x - x_n\|_E$,

die Umkehrung gilt nur im Endlich-dimensionalen.

Damit hat man auch

$$f : I \to E \text{ stetig} \implies f : I \to E \text{ ist schwach stetig}$$

und $\quad \overline{M} \subset \overline{M}^\sigma \quad$ ($\overline{M}$ = Abschluss bezüglich der Norm).

Wenn allerdings M ein linearer Teilraum ist, so gilt $\overline{M} = \overline{M}^\sigma$. Begründung mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach: Sei $x_0 \in \overline{M}^\sigma \setminus \overline{M}$, also insbesondere $x_0 \neq 0$. Dann setzen wir $F := \mathbb{K} x_0 + \overline{M}$ und definieren auf diesem linearen Teilraum von E das lineare Funktional

$$y[\lambda x_0 + \underset{\overline{M}}{\overset{\Uparrow}{v}}] = \lambda \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Nach Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $Y \in E'$ von y mit $Y[x_0] = y[x_0] = \operatorname{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$. Dann ist $Y[x_0] \neq 0 = \lim_{n\to\infty} Y[x_n]$ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\overline{M}$. Also $x_0 \notin \overline{M}^\sigma$, was ein Widerspruch ist.

Damit kommen wir zu

Folgerungen aus dem Satz von Pettis:

(1) Jede schwach stetige Funktion $f : I \to E$ ist meßbar.

(2) Ist $(f_n)_n$ eine Folge meßbarer Funktionen, die μ-f.ü. <u>schwach</u> gegen eine Funktion $f : I \to E$ konvergiert, so ist f meßbar.

Bew.: Zu (1):

f schwach stetig $\Rightarrow$ $y \circ f$ stetig für jedes $y \in E'$

$\Rightarrow$ $y \circ f$ ist meßbar, d.h. f ist schwach meßbar.
Nach dem Satz v. Pettis ist also nur noch zu zeigen, dass $f(I)$ separabel ist. Dazu starten wir mit der abzählbaren Menge $M = f(I \cap \mathbb{Q})$, bilden $\langle M \rangle_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} = A$, was ein abzählbarer lin. Teilraum von E ist. Dann ist – wg. der schwachen Stetigkeit von f – $f(I) \subset \overline{A}^{\sigma} = \overline{A}$ (= nach der Vorbem.!) und $\overline{A}$ ist separabel.

(2) Sei $y \in E'$. Dann ist für λ-fast alle $t \in I$

$y[f(t)] = \lim_{n \to \infty} y[f_n(t)]$, also $y \circ f$ meßbar, und das heißt f ist schwach meßbar. Bleibt zu zeigen: Für eine geeignete Nullmenge $N \subset I$ ist $f(I \setminus N)$ separabel.

N.V. sind die f_n meßbar. Also existieren Nullmengen $N_n \subset I$ und abzählbare Mengen $M_n \subset E$, sodass $f_n(I \setminus N_n) = \overline{M_n}$. N_0 sei diejenige Nullmenge, wo $f_n \not\to f$ und $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} N_n$. Dann ist N eine Nullmenge und $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar, ebenso $A = \langle M \rangle_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}$.
Dann ist $f(I \setminus N) \subset \overline{A}^{\sigma} = \overline{A}$, also $f(I \setminus N)$ separabel. $\square$ (Ende der Betrachtungen zur Meßbarkeit.)

Damit kommen wir zu Integrierbarkeit und Integration vektor-

wertiger Funktionen!

Def.: Eine meßbare Funktion $f: I \to E$ heißt integrierbar, wenn eine Folge $(f_n)_n$ in $T(I,E)$ existiert, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \| f_n(t) - f(t) \| \, dt = 0. \tag{1}$$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_I f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt. \tag{2}$$

Alternative Bezeichnungen: $\int_I f(t)\,dt = \int_I f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt$, letzteres, wenn $I = (a,b)$ ist, wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind. Man benutzt auch die Konvention

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Wohldef.: (1) Die Abbildung $t \mapsto \|f(t) - f_n(t)\|$, $I \to \mathbb{R}$, ist nichtnegativ und meßbar. Daher sind die Integrale $\int_I \|f_n(t) - f(t)\|\,dt$ definiert.

(2) Es gelte (1). Für $n, m \in \mathbb{N}$ haben wir dann wg. $f_n, f_m \in T(I,E)$

$$\left\| \int_I f_n(t)\,dt - \int_I f_m(t)\,dt \right\| \le \int_I \|f_n(t) - f_m(t)\|\,dt$$

$$\le \int_I \|f_n(t) - f(t)\|\,dt + \int_I \|f_m(t) - f(t)\|\,dt \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Also ist $\left(\int_I f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E und somit konvergent.

(3) Seien $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen in $T(I,E)$, so dass (1) gilt (mit demselben f). Dann zeigt die Rechnung zu (2), mit g_n anstelle von f_n, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_I f_n(t)dt - \int_I g_n(t)dt \right\| = 0,$$

also dass $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)dt.$

Das zeigt die Unabhängigkeit von $\int_I f(t)dt$ von der approximierenden Folge.

Ein wesentlicher Bestandteil der Integrationstheorie für vektorwertige Funktionen ist der folgende

<u>Satz von Bochner</u>: Sei $f: I \to E$ messbar. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\|f\| : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|f(t)\|$$

integrierbar ist, und es gilt

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\|dt.$$

<u>Bew.</u>: <u>"$\Rightarrow$"</u> Sei f integrierbar und (f_n) eine Folge in $T(I,E)$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t)-f(t)\|dt = 0.$

Dann ist $\|f\|$ meßbar und $\|f\| \leq \|f_n\| + \|f-f_n\| \in L^1(I)$. (55)

Also ist $\|f\|$ integrierbar.

"$\Leftarrow$" Nun sei $\|f\|$ integrierbar. Dann gibt es Folgen

- $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(I,\mathbb{R})$ mit $0 \leq g_n \nearrow \|f\|$ und
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(I,E)$ mit $f_n(t) \to f(t)$ λ-f.ü..

Wir setzen

$$u_n := \frac{g_n}{\|f_n\| + \frac{1}{n}} \cdot f_n \in T(I,E).$$

Dann gelten $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = f(t)$ λ.-f.ü., genauer

$\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t) - f(t)\| = 0$. λ.-f.ü und $\|u_n\| \leq |g_n| \leq \|f\|$,

also $\|u_n - f\| \leq 2\|f\| \in L^1(I)$. Der Lebesguesche Konvergenzsatz (für reellwertige Funktionen!) ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - f(t)\|\, dt = 0,$$

und damit ist f integrierbar.

Beweis der Ungleichung: $\left\|\int_I f(t)\,dt\right\| = \left\| E\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \int_I u_n(t)\,dt \right\|$

Stetigkeit der Norm $= \mathbb{R}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\int_I u_n(t)\,dt\right\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t)\|\,dt$

$= \int_I \|f(t)\|\,dt$, denn $\int_I \big|\,\|u_n(t)\| - \|f(t)\|\,\big|\,dt$

$\leq \int_I \|u_n(t) - f(t)\|\,dt \to 0 \quad (n\to\infty)$. $\square$

Nahezu als direkte Folgerung erhalten wir den Lebesgue'schen Konvergenzsatz für vektorwertige Integrale:

<u>Satz von der majorisierten Konvergenz:</u> Es seien $(f_n)_n$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : I \to E$, $g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f : I \to E$ eine Funktion, so dass

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ in E λ-f.ü. und

(ii) $\|f_n(t)\| \le g(t)$ für λ-fast alle $t \in I$.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I f(t)\,dt \quad \text{(Konvergenz in } E\text{)}.$$

Bew.: Zunächst ist f meßbar als (f.ü.) punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen. Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \big|\, \|f_n(t)\| - \|f(t)\| \,\big| \le \lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0 \quad \lambda\text{-f.ü}$$

nach Vor. (i), also $\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\| = \|f(t)\|$ λ-f.ü.

Da $\|f_n(t)\| \le g(t)$ f.ü. und $g \in L^1(I,\mathbb{R})$, ergibt der Lebesguesche Konvergenzsatz für reellwertige Funktionen, dass die Funktion $\|f\| : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|f(t)\|$ in $L^1(I,\mathbb{R})$ liegt. Nach dem Satz von Bochner ist also $f : I \to E$ integrierbar. Schließlich ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0, \quad \|f_n(t) - f(t)\| \le \|f\| + \|g\| \in L^1(I,\mathbb{R})$$

und – nach Standard-Lebesgue –

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t)-f(t)\|\,dt = 0,$$

was mit der Ungleichung aus dem Satz von Bochner

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_I f_n(t)-f(t)\,dt \right\| = 0, \text{ also } \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$$

(mit Konvergenz in E) nach sich zieht. □

Die <u>Banachräume $L^p(I,E)$:</u>

Banachraum, also vollständig!

Für eine meßbare Funktion $f: I \to E$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p(I,E)} := \left(\int_I \|f(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } 1\leq p<\infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(I,E)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} \|f(t)\| := \inf\{c>0 : \lambda\{t : \|f(t)\|>c\}=0\}.$$

(Hierbei ist zunächst $\|f\|_{L^p(I,E)}=\infty$ möglich.)

Es ist $\|f\|_{L^p(I,E)} = 0$ genau dann, wenn $f=0$ λ-f.ü.,

daher definiert $\|\ \|_{L^p(I,E)}$ eine Halbnorm auf

$$\mathcal{L}^p(I,E) := \{f : I\to E : f \text{ ist meßbar und } \|f\|_{L^p(I,E)}<\infty\}.$$

Wie für $\mathbb{K}$-wertige Funktionen setzt man

$$N := \{f\in\mathcal{L}^p(I,E) : f=0 \ \lambda\text{-f.ü.}\}$$

und bildet den Quotienten $L^p(I,E) := \mathcal{L}^p(I,E)/N$.

Da E als vollständig vorausgesetzt ist, gilt ähnlich wie im Fall $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen:

Satz 2: $L^p(I,E)$ ist vollständig.

Begründung / Beweisskizze für $1 \leq p < \infty$.

Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(I,E)$. Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_{L^p(I,E)} \leq 2^{-k}$.

Wir setzen

$$g_k := \begin{cases} f_{n_{k+1}} - f_{n_k} & (k \geq 1) \\ f_{n_1} & (k = 0) \end{cases} ; \quad G_k(t) := \sum_{\ell=0}^{k} \| g_\ell(t) \|_E$$

$$\Rightarrow \| G_k \|_{L^p(I,\mathbb{R})} \leq \sum_{\ell=0}^{k} \| g_\ell \|_{L^p(I,E)} \leq 1 + \| f_{n_1} \|_{L^p(I,E)}$$

Nach dem Satz von B. Levi: $G_k \nearrow G \in L^p(I,\mathbb{R})$, also insbes. existiert $\lim_{k\to\infty} G_k(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \| g_\ell(t) \|_E \quad \forall t \in I \setminus N$, N Nullmenge.

Wegen der Vollständigkeit von $E^{(*)}$ konvergiert dann auch

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} g_\ell(t) =: f(t) \quad \text{für alle } t \in I \setminus N \quad (\text{sonst: } f(t) = 0).$$

Also hat man $\lim_{k\to\infty} \| f_{n_k}(t) - f(t) \|_E = 0 \quad \forall t \in I \setminus N$

und jetzt zeigt man noch $f_{n_k} \to f \ (n \to \infty)$ in $L^p(I,E)$.

Wichtiges "By-product": Ist $\lim_{k\to\infty} f_n = f$ in $L^p(I,E)$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die punktweise f.ü. gegen f konvergiert, für die also $\| f_{n_k}(t) - f(t) \|_E \to 0$ f.ü. gilt. (Im Allgemeinen kann man von L^p-Konvergenz leicht auf punktweise Konvergenz schließen.)

(*) Dies ist der einzige Punkt, an dem man beachten muß, dass man B-Raum-wertige Funktionen betrachtet.

Satz 3: Für $1 \le p < \infty$ ist

$$C_c^\infty(I,E) := \{ f : I \to E : f \text{ ist beliebig oft diffbar} \}$$

dicht in $L^p(I,E)$.

Auch hier nur eine kurze Begründung bzw. Beweisskizze:

Per Konstruktion ist $T(I,E)$ dicht in $L^p(I,E)$. Daher reicht es zu überlegen, dass Funktionen der Form

$$f = a \cdot \chi_A \qquad a \in E \text{ fest}, \ A \in \mathcal{B}(I), \ \lambda(A) < \infty$$

durch C_c^∞-Funktionen approximierbar sind. Dazu setzt man $k(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & (|t|<1) \\ 0 & (|t| \ge 1) \end{cases}$, normiert zu $\hat{k}$ und bildet die Funktionenschar $(k_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, wobei $k_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{k}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. Dann setzt man f trivial fort zu $\tilde{f}$ und hat wie im $\mathbb{K}$-Fall: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| k_\varepsilon * \tilde{f} - \tilde{f} \|_{L^p(I,E)} = 0$ ($*$ = Faltung).

Nun sei $f \in L^p(I,E)$ und $g \in L^{p'}(I,E')$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und E' der (topologische) Dualraum von E ist. Dann wird durch

$$\Phi_g[f] := \int_I g(t)[f(t)]\, dt$$

ein stetiges lineares Funktional $\Phi_g \in (L^p(I,E))'$ definiert, denn mit der Hölder'schen Ungleichung gilt

$$|\Phi_g[f]| \le \int_I |g(t)[f(t)]|\, dt \le \int_I \|g(t)\|_{E'} \|f(t)\|_E \, dt$$

$$\text{Hölder} \longrightarrow \le \|g\|_{L^{p'}(I,E')} \|f\|_{L^p(I,E)}.$$

Unter welchen Voraussetzungen lässt sich jedes stetige lineare Funktional auf $L^p(I,E)$ in der angegebenen Weise darstellen? Hier gilt die folgende wirklich schwierig zu beweisende Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes:

Es sei $1 \le p < \infty$ und

- E reflexiv oder
- E' separabel.

Dann ist $L^{p'}(I,E') \cong (L^p(I,E))'$ in dem Sinne, dass die oben angegebene Abbildung $\Phi : L^{p'}(I,E') \to (L^p(I,E))'$, $g \mapsto \Phi_g$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Dabei heißt ein B-Raum E reflexiv, wenn die kanonische Einbettung $J_E : E \to E''$, definiert durch

$$J_E(x)[y] = y[x] \quad \forall y \in E'$$

surjektiv ist.

(Bsp.: $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ ist für $1<p<\infty$ reflexiv – eben aufgrund der "skalaren Version" des o. angegebenen Satzes – während $L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ i. allg. nicht reflexiv ist.)

Beweis dieser Aussage: Dinculeanu: Vector measures; New York, 1967; Chap. 13., Cor. 1 zu Thm. 8.)

<u>Satz 4</u>: Es seien E, F Banachräume, $A: E \supset D_A \to F$ linear und $1 \le p, q \le \infty$. Dann gelten:

(1) Ist $\lambda(I) < \infty$ und $p \le q$, so ist für $f \in L^q(I,E)$

$$\|f\|_{L^p(I,E)} \le \lambda(I)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(I,E)},$$

also haben wir $L^q(I,E) \subset L^p(I,E)$ mit einer stetigen Einbettung.

(2) Sind $f \in L^p(I,E)$ und $A \in L(E,F)$, so ist $Af \in L^p(I,F)$

und $$\|Af\|_{L^p(I,F)} \le \|A\|_{E\to F} \|f\|_{L^p(I,E)},$$

für $f \in L^1(I,E)$ gilt ferner $\int_I Af(t)\,dt = A \int_I f(t)\,dt$.

(3) Ist $E \subset F$ mit einer stetigen Einbettung, so ist $L^p(I,E) \subset L^p(I,F)$, ebenfalls mit einer stetigen Einbettung, und für $f \in L^1(I,E)$ stimmen die Integrale überein.

(4) Ist A dicht definiert und abgeschlossen, $f \in L^1(I,E)$ mit $f(t) \in D_A$ $\forall t \in I$ und $Af \in L^1(I,F)$, so ist $\int_I f(t)\,dt \in D_A$ und es gilt

$$A \int_I f(t)\,dt = \int_I Af(t)\,dt.$$

<u>Bew.</u>: (1) folgt aus der Hölderschen Ungleichung $\|g \cdot h\|_p \le \|g\|_r \|h\|_q$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$, hier angewendet mit $g = 1$, $h(t) = \|f(t)\|_E$.

(2) Für $f=\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \in T(I,E)$ ist $Af=\sum_{i=1}^{n}(Ax_i)\chi_{A_i} \in T(I,F)$

und daher $$\|Af\|_{L^p(I,F)} \underset{\substack{A_i\cap A_j=0\\ \text{für } i\neq j}}{=} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \|Ax_i\|_F \Big\|_{L^p(I)}$$

$$\leq \|A\|_{E\to F} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} \|x_i\|_E \Big\|_{L^p(I)} = \|A\|_{E\to F} \|f\|_{L^p(I,E)},$$

ferner haben wir $$\int_I Af(t)\,dt = \int_I \sum_{i=1}^{n} Ax_i \chi_{A_i}(t)\,dt$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Ax_i \int_I \chi_{A_i}(t)\,dt = A \sum_{i=1}^{n} x_i \int_I \chi_{A_i}(t)\,dt = A\int_I \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}(t)\,dt$$

$$= A\int_I f(t)\,dt.$$

Die allgemeine Aussage folgt durch Grenzübergang bzw. im Fall $p=\infty$ aus

$$\|Af(t)\|_F \leq \|A\|_{E\to F} \|f(t)\|_E \leq \|A\|_{E\to F} \|f\|_{L^\infty(I,E)}$$

$\forall\, t\in I\setminus N$ (N Nullmenge) und Supremumsbildung.

(3) Folgt aus (2), angewendet auf die Einbettung $J: E\to F$ für A.

(4) Da A abgeschlossen ist, ist $(D_A, \|\ \|_{D_A})$ mit $\|x\|_{D_A} = \|x\|_E + \|Ax\|_F$ ein B-Raum und $A\in L(D_A,F)$. Ferner folgt aus den Voraussetzungen an f, dass $f\in L^1(I,D_A)$.

Daher folgt die Beh. aus (2).

Satz 5 (Hauptsatz, 1. Version): Es seien $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}, E)$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $T_h f(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\,ds$. Dann gelten

(1) $T_h f \in C(\mathbb{R}, E) \cap L^\infty(\mathbb{R}, E)$ $(=: C_b(\mathbb{R}, E))$,

(2) $T_h \in L(L^p(\mathbb{R}, E))$ mit $\|T_h\| \leq 1$,

(3) $\lim\limits_{h \to 0} T_h f = f$ in $L^p(\mathbb{R}, E)$ sowie

(4) $\lim\limits_{h \to 0} T_h f(t) = f(t)$ für λ-fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Bew.: (1) Nach Satz 4 (1) ist $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, E)$ (d.h. $f \in L^1(J, E)$ für jedes kompakte Teilintervall $J \subset \mathbb{R}$). Daher ergibt der Lebesguesche Konvergenzsatz (bei festem h und t)

$$T_h f(s) - T_h f(t) = \frac{1}{h} \left(\int_t^s f(x)\,dx + \int_{t+h}^{s+h} f(x)\,dx \right) \longrightarrow 0 \ (s \to t),$$

und das ist die Stetigkeit von $T_h f$.

Die Höldersche Ungleichung ergibt

$$\|T_h f(t)\|_E \leq \frac{1}{|h|} \cdot \left\| \int_t^{t+h} 1 \cdot f(s)\,ds \right\|_E \leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} 1 \cdot \|f(s)\|_E\,ds$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \cdot |h|^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_t^{t+h} \|f(s)\|_E^p\,ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq |h|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p ,$$

wobei wir hier und im folgenden kurz $\|f\|_p$ für $\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$ schreiben. Also ist $T_h f$ beschränkt.

(2) Die Rechnung in (1) hat gezeigt, dass

$$\|T_h f(t)\|_E^p \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int_t^{t+h} \|f(s)\|_E^p\,ds$$

Hieraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \| T_h f(t) \|_E^p \, dt \le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|h|} \chi_{[t,t+h]}(s) \, \|f(s)\|_E^p \, ds \, dt =: (*)$$

mit $\chi_{[t,t+h]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \le s \le t+h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } s-h \le t \le s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$= \chi_{[s-h,s]}(t)$, also

$$(*) = \frac{1}{|h|} \cdot \int_{\mathbb{R}} \|f(s)\|_E^p \left| \int_{s-h}^{s} dt \right| ds = \|f\|_p^p, \text{ d.h.}$$

$\|T_h f\|_p \le \|f\|_p$ bzw. $\|T_h\| \le 1$.

(3) Zunächst sei $f \in C_c(\mathbb{R}, E)$. Dann ist

$$\| T_h f(t) - f(t) \|_E = \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) \, ds - f(t) \right\|_E$$

$$\le \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_E \, ds$$

Nun ist f stetig mit kompaktem Träger, also insbes. glm. stetig. Also finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $|h| > 0$, so dass $\forall\, s,t \in \operatorname{supp}(f)$ mit $|s-t| \le |h|$ gilt $\|f(s) - f(t)\|_E \le \varepsilon$ und damit $\|T_h f(t) - f(t)\|_E \le \varepsilon$. D.h. wir haben

$$\lim_{h \to 0} T_h f(t) = f(t) \quad \text{glm. in } \forall\, t \in \operatorname{supp}(f)$$

und damit auch in $L^p(\mathbb{R}, E)$.

Nun sei $f \in L^p(\mathbb{R}, E)$ beliebig. Dann finden wir eine Folge $(f_n)_n$ in $C_c(\mathbb{R}, E)$ mit $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Damit erhalten wir

$$\| T_h f - f \|_p \leq \| T_h (f - f_n) \|_p + \| T_h f_n - f_n \|_p + \| f_n - f \|_p$$

$$\leq 2 \| f - f_n \|_p + \| T_h f_n - f_n \|_p . \text{ Jetzt } h \to 0, \text{ dann } n \to \infty.$$
(2)

(4) Für $f \in C_c(\mathbb{R}, E)$ wurde die Beh. bereits in (3) gezeigt. Um den allgemeinen Fall hierauf zurückzuführen, verwenden wir das folgende Ergebnis aus der harmonischen Analysis (ohne Beweis): Für $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definiert man die Maximalfunktion

$$M\varphi(t) := \sup_{|h|>0} \frac{1}{|h|} \left| \int_t^{t+h} |\varphi(s)|\, ds \right| .$$

Dann gelten die Abschätzungen:

- $\forall \varepsilon > 0$ ist $\lambda \{ t \in \mathbb{R} : M\varphi(t) > \varepsilon \} \leq \frac{c}{\varepsilon} \| \varphi \|_{L^1(\mathbb{R})}$ und
- $\forall p \in (1, \infty)$ ist $\| M\varphi \|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \| \varphi \|_{L^p(\mathbb{R})}$

Nun sei $f \in L^p(\mathbb{R}, E)$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $C_c(\mathbb{R}, E)$ mit $\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_p = 0$. Dann ist für $\alpha > 0$:

$$\{ t \in \mathbb{R} : \limsup_{h \to 0} \| T_h f(t) - f(t) \|_E > \alpha \}$$

$$\subset \{ t \in \mathbb{R} : \limsup_{h \to 0} \| T_h (f - f_n)(t) \|_E > \alpha/3 \}$$

$$\cup \{ t \in \mathbb{R} : \limsup_{h \to 0} \| T_h f_n(t) - f_n(t) \|_E > \alpha/3 \}$$

$$\cup \{ t \in \mathbb{R} : \| f_n(t) - f(t) \|_E > \frac{\alpha}{3} \} = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

Dann ist $\lambda(M_2)=0$ und nach der Tschebyscheff'schen Un- (66)

gleichung

$$\mu\{x\in X : |\varphi(x)|>\varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^p}\int_X |\varphi(x)|^p\, d\mu(x)$$

$$\lambda(M_3) \le \left(\frac{3}{\alpha}\right)^p \|f_n-f\|^p_{L^p(I,E)} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

(beachte $\|T_h(f-f_n)\|_E \le M\|f(t)-f_n(t)\|_E = M\varphi(t)$)

und schließlich mit Hilfe der max.-fct.-Abschätzung

$$\lambda(M_1) \le C_{p,\alpha}\|f_n-f\|^p_{L^p(I,E)} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Also: $\forall \alpha>0$ ist

$$\lambda(\{t\in\mathbb{R} : \limsup_{h\to 0} \|T_h f(t)-f(t)\|>\alpha\})=0,$$

und das bedeutet $\lim\limits_{h\to 0} T_h f(t)=f(t)$ für λ-fast alle $t\in\mathbb{R}$. □

Folgerung: Ist $I\subset\mathbb{R}$ offen, $g\in L^1_{loc}(I,E)$, $t_0\in I$ und

$$f(t)=\int_{t_0}^t g(s)\,ds.$$

Dann ist f für fast alle $t\in I$ differenzierbar mit $f'(t)=g(t)$.

Bew.: Zu $[a,b]\subset I$ mit $t_0\in(a,b)$ wählen wir $\tilde g\in L^1(\mathbb{R},E)$ mit $\tilde g|_{[a,b]}=g|_{[a,b]}$ (abschneiden und trivial fortsetzen). Dann ist für $\forall$ alle t, $t+h\in(a,b)$

$$\frac{1}{h}(f(t+h)-f(t)) = T_h g(t) = T_h\tilde g(t) \underset{h\to 0,\ \text{Satz 5}}{\longrightarrow} \tilde g(t) = g(t) \text{ f.ü.}$$

Da I sich mit solchen Intervallen $[a,b]$ ausschöpfen läßt: $f'(t)=g(t)$ für fast alle $t\in I$. □

Bem.: Mit demselben Argument sieht man ein, dass in Satz 5 stets $\mathbb{R}$ durch ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ersetzt werden kann.

Auch die zweite Version des Hauptsatzes soll unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen gezeigt werden. Dazu benötigen wir den Sobolevraum $W^{1,p}(I,E)$, bestehend aus vektorwertigen L^p-Funktionen mit "schwachen" Ableitungen, die ebenfalls in $L^p(I,E)$ liegen. Das gibt mir die Gelegenheit, die Begriffe "Distribution" und "Sobolev-Raum" kurz zu wiederholen und zumindest teilweise auf den vektorwertigen Fall auszudehnen. Wir beginnen mit dem Konvergenzbegriff auf $C_c^\infty(\Omega)$, wobei im folgenden stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, in einer Dimension immer ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Def.: Eine Folge $(\varphi_n)_n$ in $C_c^\infty(\Omega)$ heißt konvergent gegen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, falls gilt

(1) es gibt ein Kompaktum $K \subset \Omega$, sodass $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \| D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \|_\infty = 0$ (glm. Konvergenz!) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ (dabei $D^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i}$)

Schreibweise: $\mathcal{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ oder $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$. Beruht auf der von L. Schwartz gewählten Bez. $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$.

Def.: Eine lineare Abbildung $T: \mathcal{D}(\Omega) \to E$ heißt stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} T[\varphi_n] = T[\varphi]$ gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und Folgen $(\varphi_n)_n$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$.

Die stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(\Omega)$ nach E (Funktionale im Fall $E = \mathbb{K}$) bilden einen (topologischen) Vektorraum, der mit $\mathcal{D}'(\Omega, E)$ bezeichnet wird. Zwei Fälle sind für uns von Bedeutung:

Standard: $E = \mathbb{K}$. Distributionen (ohne weiteren Zusatz). In diesem Fall schreibt man kurz $\mathcal{D}'(\Omega)$ statt $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{K})$.

Allgemeiner: E Banachraum. Vektorwertige Distributionen. Hierbei beschränken wir uns auf $\Omega = I \subset \mathbb{R}$ und schreiben $\mathcal{D}'(I, E)$. (Ist im Zsh. mit dem Bochner-Integral relevant.)

Reguläre Distributionen:

Ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ $(= L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{K}))$, so wird durch

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto T_f[\varphi] := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert. Solche Distributionen werden als regulär bezeichnet.

Allgemeiner können wir auch vektorwertige reguläre

Distributionen einführen, wobei wir uns auf $\Omega = I$ beschränken: Ist $f \in L^1_{loc}(I,E)$, so setzen wir ganz analog

$$T_f : \mathcal{D}(I) \longrightarrow E, \quad \varphi \mapsto T_f[\varphi] := \int_I f(t)\varphi(t)\,dt,$$

und erhalten eine stetige lineare Abbildung $T_f \in \mathcal{D}'(I,E)$.

In diesem Zusammenhang gilt:

Lemma 2 ($O=O$): Ist $f \in L^1_{loc}(I,E)$ und $T_f = 0$ in $\mathcal{D}'(I,E)$, so ist $f = 0$ (fast überall bzw. als Element von $L^1_{loc}(I,E)$).

Bew.: Übungen

Die Distributionsableitung:

Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, so ist $\nabla^\alpha \varphi$ $\left(= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{\alpha_i} \varphi\right)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ im klassischen Sinne definiert. Das verwendet man, um für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ einen sehr viel schwächeren Ableitungsbegriff einzuführen!

Def. Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt $\nabla^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, def. durch

$$\nabla^\alpha T[\varphi] := (-1)^{|\alpha|}\, T[\nabla^\alpha \varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

eine distributionelle Ableitung der Ordnung $|\alpha| \in \mathbb{N}_0$.

Der Faktor $(-1)^{|\alpha|}$ entspricht der Regel der partiellen Integration für diejenigen regulären Distributionen, die $|\alpha|$-mal stetig diffbar sind.

Für vektorwertige Distributionen verfährt man entsprechend, wobei wir uns wieder auf $I \subset \mathbb{R}$ und auf $|\alpha| = 1$ beschränken.

<u>Def.</u>: Für $T \in \mathcal{D}'(I,E)$ heißt $T' \in \mathcal{D}'(I,E)$, def. durch

$$T'[\varphi] = -T[\varphi'] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

die Distributionsableitung von T.

Hierfür gilt das wenig überraschende, aber nicht triviale

<u>Lemma</u> 3: Sei $T \in \mathcal{D}'(I,E)$ mit $T' = 0$. Dann ist T konstant im folgenden Sinne: Es gibt ein $x_0 \in E$, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt $T[\varphi] = x_0 \cdot \int_I \varphi(t)\,dt$.

Bew.: Übungen

<u>Sobolev-Räume</u>:

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ definiert man den Sobolev-Raum

$$W^{m,p}(\Omega) := \{ f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \le m \}$$

D^α ist hier als Distributionsableitung zu verstehen, und man verlangt, dass $D^\alpha f$ für alle $|\alpha| \le m$ regulär ist und als Funktion in $L^p(\Omega)$ liegt. $W^{m,p}(\Omega)$ wird ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{m,p} := \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_p ,$$

wobei sich die Summe über alle Multiindizes der Länge $|\alpha| \leq m$ erstreckt. $\| \ \|_p$ bezeichnet die Norm auf $L^p(\Omega)$. (71)

Wir können $W^{m,p}(\Omega)$ interpretieren als einen abgeschlossenen linearen Teilraum von $L^p(\Omega)^N$, wobei

$$N = \# \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \leq m\}.$$

Das erfordert die Abgeschlossenheit der Operatoren

$$A := \nabla^\alpha : L^p(\Omega) \supset W^{m,p}(\Omega) = \mathcal{D}_A \longrightarrow L^p(\Omega),$$

die nicht schwer nachzurechnen ist. Daher ist $W^{m,p}(\Omega)$ vollständig, also ein B-Raum.

Für vektorwertige Funktionen benötigen wir lediglich den Fall $m=1$ und $\Omega = I \subset \mathbb{R}$, also den Raum

$$W^{1,p}(I,E) := \{ f \in L^p(I,E) : f' \in L^p(I,E) \},$$

wobei wieder f' die Distributionsableitung bezeichnet. Dieser wird versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{1,p}(I,E)} := \|f\|_{L^p(I,E)} + \|f'\|_{L^p(I,E)}.$$

Mit demselben Argument wie oben skizziert, sieht man die Vollständigkeit von $W^{1,p}(I,E)$ ein, wobei man hier auf die Vollständigkeit von $L^p(I,E)$ (Satz 2) zurückgreift.

Satz 6 (Hauptsatz, 2. Version) Für ein $p \in [1,\infty]$ sei $f \in W^{1,p}(I,E)$. Dann gilt für fast alle $t_0, t \in I$

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds.$$

Bem.: Hierbei bezeichnet f' die distributionelle Ableitung!

Bew.: Wir zeigen, dass im distributionellen Sinne gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f'(s)ds = f'(t) \qquad (!)$$

Die linke Seite ist def. durch die Bed., dass $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$:

$$\int_I \left(\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f'(s)ds\right)\varphi(t)dt = -\int_I \left(\int_{t_0}^{t} f'(s)ds\right)\varphi'(t)dt$$

klassische Ableitung

$$= -\int_I \left(\int_{t_0}^{t} f'(s)ds\right) \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\varphi(t)-\varphi(t-h))}_{\text{mit glm. Konvergenz, Träger kompakt}} dt$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_I \left(\int_{t_0}^{t} f'(s)ds\right)(\varphi(t)-\varphi(t-h))dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_I \underbrace{\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} f'(s)ds\right)}_{T_h f'(t)}\varphi(t)dt = \int_I f'(t)\varphi(t)dt,$$

denn $\left\| \int_I (T_h f'(t) - f'(t))\varphi(t)dt \right\|_E \leq \underbrace{\| T_h f' - f' \|_{L^p(I,E)}}_{\longrightarrow 0,\ \text{Satz 5, (3)}} \|\varphi\|_{L^{p'}}$.

Also gilt (!). Nun setzt man $w(t) = f(t) - f(t_0) + \int_{t_0}^{t} f'(s)ds$ und hat $w' = 0$ (als Distribution), also nach Lemma 3 w konstant. $t = t_0$ ergibt $w = 0$, zunächst als Distribution und nach Lemma 2 auch punktweise f.ü.. $\square$

Folgerung: Es sei $p \in [1,\infty]$ und $f \in W^{1,p}(I,E)$. Dann ist f glm. stetig und beschränkt. Im Fall $1 < p \leq \infty$ ist f Hölder-stetig zum Exponenten $\alpha = \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$.

Bew.: Wir haben $\|f(t) - f(s)\|_E \leq \int_s^t \|f'(\sigma)\|_E \, d\sigma$. (*)

Hieraus folgen im Fall $\underline{p=1}$ die Beschränktheit und die glm. Stetigkeit. In der Tat: Sei $(t_n)_n$, $(s_n)_n$ ein Folgenpaar mit $\lim_{n\to\infty} |t_n - s_n| = 0$, so erhalten wir

$$\|f(t_n) - f(s_n)\|_E \leq \int_I \chi_{(s_n,t_n)}(\sigma) \, \|f'(\sigma)\|_E \, d\sigma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes.

$\underline{p > 1}$: Mit der Hölderschen Ungleichung folgt aus (*)

$$\|f(t) - f(s)\|_E \leq |t-s|^{\frac{1}{p'}} \, \|f'\|_{L^p(I,E)},$$

und das ist die globale Hölder-Stetigkeit ($\leadsto$ glm. Stetigkeit).

Zum Bew. der Beschränktheit betrachten wir zunächst $\varphi \in C^1(I) \cap W^{1,p}(I)$. Hierfür ist

$$|\varphi(t)|^p - |\varphi(t_0)|^p = p \cdot \int_{t_0}^t \operatorname{sign}(\varphi(s)) \, |\varphi(s)|^{p-1} \varphi'(s) \, ds$$

$$\leq p \cdot \int_{t_0}^t |\varphi(s)|^{p-1} \, |\varphi'(s)| \, ds \underset{\text{Hölder}}{\lesssim} \|\varphi\|_p^{p-1} \, \|\varphi'\|_p$$

$$\lesssim \left(\|\varphi\|_p + \|\varphi'\|_p\right)^p$$

Wählen wir jetzt noch t_0 so, dass $|\varphi(t_0)|^p \leq c_I \, \|\varphi\|_p^p$ gilt, erhalten wir

$$|\varphi(t)|^p \lesssim (\|\varphi\|_p + \|\varphi'\|_p)^p \Rightarrow \|\varphi\|_\infty \lesssim \|\varphi\|_{W^{1,p}(I)}$$

Ein Approximationsargument zeigt, dass diese Ungleichung für alle $\varphi \in W^{1,p}(I)$ gilt. Angewendet auf $\varphi(t) = \|f(t)\|_E$ ergibt sich $\|f\|_{L^\infty(I,E)} \lesssim \|f\|_{W^{1,p}(I,E)}$. Hierbei ist zu beachten, dass

$$\left| \|f(t)\|_E - \|f(s)\|_E \right| \leq \|f(t)-f(s)\|_E \leq \int_s^t \|f'(\sigma)\|_E \, d\sigma$$

gilt, also $\varphi = \|f(\cdot)\|$ fast überall diffbar ist mit $\varphi'(t) \leq \|f'(t)\|_E$. $\square$

Bem.: Die Aussage des Lemmas kann als Einbettungssatz formuliert werden. Man hat

$$W^{1,p}(I,E) \subset C_{u,b}(I,E) \qquad (1 \leq p \leq \infty) \quad \text{und}$$

$$W^{1,p}(I,E) \subset C^{0,\alpha}(I,E) \qquad (1 < p \leq \infty, \ \alpha = \tfrac{1}{p'})$$

mit einer stetigen Einbettung. Hierbei ist eine Norm auf $C^{0,\alpha}(I,E)$ gegeben durch

$$\|f\|_{0,\alpha} := \|f\|_{L^\infty(I,E)} + [f]_\alpha, \quad \text{wobei}$$

$$[f]_\alpha := \sup_{\substack{t,t+h \in I \\ h \neq 0}} \frac{\|f(t+h) - f(t)\|_E}{|h|} .$$