Vorlesung

Partielle Differenzialgleichungen I im SoSe 2018 (PDE I)

1. Einführung: Evolutionsgleichungen

Evolutionsgleichungen sind Differenzialgleichungen, die die zeitliche Entwicklung eines Systems beschreiben. In dieser Vorlesung soll es um partielle Differenzialgleichungen gehen, die in diese Kategorie fallen. Das bedeutet:

(i) die gesuchten Lösungen hängen von der Zeitvariablen $t \in I \subset \mathbb{R}$ (I Intervall) und von mehreren Variablen, in der Regel den Ortsvariablen $x = (x_1, .., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (Ω offen) ab;

(ii) die betrachteten Gleichungen enthalten partielle Ableitungen nach t und nach den Orts- /oder sonstigen) Variablen.

Wir werden nur lineare oder semilineare Gleichungen betrachten. Semilinear bedeutet, dass der nichtlineare Anteil (bzw. die nichtlinearen Terme) der Gleichung als Störung eines linearen Hauptteils betrachtet werden können. (In der Regel ist dies der Fall, wenn die Ableitungsordnung in der Nichtlinearität echt kleiner ist als im linearen Hauptteil, vgl. Bsp. unten.)

1.1 Typische Beispiele (aus dem Bereich der p Dgln.):

1. Die Wärmeleitungsgleichung

(WLG, auch Diffusionsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f ,$$

wobei $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator und

$$u : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (x,t) \mapsto u(x,t)$$

die gesuchte Lösung ist. Die rechte Seite f ist gegeben, z.B.

- $f = 0$: homogene lineare WLG
- $f : \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ (x,t) \longrightarrow f(x,t)$:

  die inhomogene lineare WLG
- $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, etwa $f(u) = |u|^{p-1} u$,

  eine semilineare WLG,

Spezialfälle kommen unter der Bezeichnung Reaktions-Diffusionsgleichungen in Chemie und Biologie vor wie
$f(u) = u(1-u)$, $f(u) = u(1-u^2)$, $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$

- $f(u) = -(u \cdot \nabla) u = -\left(\sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) u$, wobei

  $u : \mathbb{R}^n \times I \supset \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

tritt auf als Nichtlinearität in der Navier-Stokes-Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, \\ &\operatorname{div} u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{gathered}\text{Navier-}\\\text{Stokes}\end{gathered}\right),$$

(Divergenz)

die linearisierte Form wird als <u>Stokes-Gleichung</u> bezeichnet.

die aus der Strömungsmechanik kommt. Die gesuchte Lösung besteht hier aus

- einem Vektorfeld u (wie oben), das die Geschwindigkeitsverteilung einer inkompressiblen ($\operatorname{div} u = 0$!) Flüssigkeit angibt, und einem Skalarfeld
- $p : \Omega \times I \to \mathbb{R}$,

  das als Druckverteilung in der Flüssigkeit zu interpretieren ist.

Ein vereinfachtes eindimensionales Modell hierfür ist die (<u>viskose</u>) <u>Burgers'-Gleichung</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (\text{mit } x \in \mathbb{R}),$$

wobei $\mu \geq 0$ der Viskositäts- (= Zähigkeits-) koeffizient ist ($\mu = 0$: die eigentliche Burgers-Gleichung)

Die (lineare) Wärmeleitungsgleichung ist der typische Vertreter der Klasse der <u>parabolischen Gleichungen</u>, die die allgemeine Gestalt (mit variablen Koeffizienten) hat

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x,t)\cdot u = f$$

wobei von der Koeffizientenmatrix $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{1\le i,j\le n}$ vorausgesetzt wird, dass für ein ε_0 gilt

$$\langle \xi, A(x,t)\xi \rangle \ge \varepsilon_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(Positive Definitheit oder Koerzivität, und zwar gleichmäßig in x und t).

Zu dieser Klasse gehört auch die in der Finanzmathematik gefeierte "Black-Scholes-Gleichung", d. h.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + r S \frac{\partial u}{\partial S} - r u = 0,$$

wobei: σ^2, r Konstanten,

t die Zeitvariable, S der Aktienkurs (u.a. Variable)

u der Preis einer Option (allgemeiner: eines Derivates) auf die entsprechende Aktie, und das ist die gesuchte Lösung.

Gegenüber der WLG das "falsche" Vorzeichen (was in der Regel das Problem wesentlich verändert: Wärmeleitung ist ein irreversibler Vorgang!), variable Koeff. und l.o.t.'s.

Betrachtet man diese Gleichung auf einem endlichen Zeitintervall $[0,T]$, kann man mit Hilfe der Substitutionen

$\tau = T - t$ (⇝ VZ-Wechsel in der Zeitableitung)

$v = u \cdot e^{r\tau}$

$x = \ln(S) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau$ (⇝ $S\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x}$ ⇝ eliminiert die Variablen Koeffizienten)

in die homogene lineare WLG

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

für die neue abhängige Veränderliche v überführen.

2. Die (zeitabhängige) Schrödingergleichung (SG)

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu := (-\Delta + V)u, \quad u: \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

mit dem "Hamiltonoperator" H, bestehend aus

- dem Laplace-Operator Δ, der die kinetische Energie des durch die gesuchte Lösung u beschriebenen Systems repräsentiert, und
- dem Potential V (reellwertig),

so dass dem Operator H die Bedeutung der Gesamtenergie zukommt.

Die SG ist die Grundgleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Im Rahmen dieser Theorie spielt sie eine ebenso fundamentale Rolle wie das 2. Newtonsche Axiom

$$m\ddot{x} = F \quad \text{(Kraft ist Masse × Beschleunigung)}$$

in der klassischen Mechanik.

Vergleich mit WLG

SG → WLG

Ersetzt man formal die Zeitvariable t in der Schrödingergleichung durch it, so erhält man eine Wärmeleitungsgleichung. Von ihrer Struktur her scheint die Schrödingergleichung also in die Kategorie der parabolischen Gleichungen zu gehören. Es stellt sich jedoch heraus, dass sie (bzw. ihre Lösungen) ein wesentlich anderes Verhalten aufweisen und in verschiedener Hinsicht mehr eher den Charakter einer Wellen- bzw. hyperbolischen Gleichung hat.

Physik

phys. Auffassung der Lösungen

Die Lösung u einer Schrödingergleichung enthält alle Informationen des beschriebenen quantenmechanischen Teilchens bzw. Systems, ist aber selbst keine beobachtbare Größe (= Observable, wie der Ort x oder der Impuls $p = m \cdot \frac{dx}{dt} = mv$ in der klassischen Mechanik). In der Physik hat sich eine statistische Interpretation der Lösungen der Schrödingergleichung durchgesetzt. Demnach ist

- $|u(x,t)|^2$ die Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit (des beschriebenen Teilchens) zur Zeit t,

damit

- $\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$ die W'keit, dass sich dieses Teilchen zur Zeit t im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aufhält;
- $\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \overline{A u(x,t)} dx$ der zeitabhängige Erwartungswert einer Observablen A, die durch einen Operator A repräsen-

hört wird, etwa

Observable	Operator
Ort x	$Au = x \cdot u$, Multiplikationsoperator
Impuls p	$Au = i\nabla u$ (Gradient, Ableitungsoperator)

In aller Regel: unbeschränkte lineare Abbildungen in einem Hilbertraum H, z.B. $L^2(\mathbb{R}^3)$; $L^2(\mathbb{R}^n)$; $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, mehr dazu später.

Spezielle Potenziale

(i) lineare Gleichungen

(i.i) $V = 0$, die homogene lineare oder auch "freie" Schrödinger gleichung.

Auf $\Omega = \mathbb{R}^n$ betrachtet, erweist sie sich als dispersiv. Das bedeutet, dass Beiträge verschiedener Frequenzen zu einer Lösung u unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben, was zu einem zeitlichen Abfall ("time decay") und zu einem schwachen Glättungseffekt führt. Bei Einschränkung auf ein beschränktes Gebiet Ω wird dieser dispersive Charakter z.T. aufgehoben.

(i.ii) $V = V(x)$, ein zeitunabhängiges aber in x variables Potenzial. Mathematisch betrachtet liegt immer noch eine homogene lineare Gleichung vor, allerdings mit variablen Koeffizienten. Spezielle Beispiele!

– $V(x) = x^2$, der "harmonische Oszillator", quantale Version in einer Raumdim. eines Faden- oder Federpendels. Allgemeiner:

$V(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, oder $V(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$ (*)

Das Oszillatorpotenzial ist aus (mindestens) zwei Gründen von besonderer Bedeutung:

- Eines der wenigen Beispiele, die man exakt durchrechnen kann, aus dieser Rechnung lassen sich zumindest qualitative Aspekte auf (*) verallgemeinern,
- in der Festkörperphysik werden Kristallgitter als Systeme von Teilchen modelliert, die um eine Ruhelage schwingen, also oszillieren. Bei geeigneter Wahl der Koordinaten "entkoppeln" diese Systeme, was mathematisch der Diagonalisierung einer Matrix entspricht. Man kann das Problem zurückführen auf den eindim. harmonischen Oszillator.

– $V(x) = \frac{1}{|x|}$ $(x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, das sogenannte Coulomb-Potential, ist aus der klassischen Mechanik bekannt als Gravitationspotenzial bzw. Potenzial elektrostatischer ~~[illegible]~~ Anziehung/Abstoßung. Wird in der QM wesentlich im Modell des Wasserstoff-Atoms, ebenfalls eines der wenigen Modelle, die exakt berechnet werden können.

Ebenso wie beim Übergang zu einem beschränkten Gebiet zeigt sich, dass unbeschränkte Potentiale den dispersiven

Charakter der SG einschränken. Vom physikalischen Standpunkt-

punkt aus wenig verwunderlich, wenn man schreibt

$$V(x) = \infty \cdot \chi_{\Omega^c}(x) \quad \text{mit } "\infty \cdot 0 = 0".$$

Die Restriktion auf Ω entspricht einem "unendlich hohen Potenzialwall".

(ii) semilineare Gleichungen

Hier hängt das Potential V von der gesuchten Lösung ab, ein Modellbeispiel ist

(iii) $V(u) = |u|^{p-1}$ → "die" semilineare Schrödingergleichg

Formal betrachtet ist die SG immer noch semilinear, wenn eine einfache x-Ableitung in einem nichtlinearen Term auftritt, etwa bei (eindim. Problem)

$$iu_t + u_{xx} = (|u|^2 u)_x$$

Tatsächlich ist diese Gleichung schon hart an der Grenze dessen, was man mit "Störungsmethoden" behandeln kann.

3. <u>Die Klein-Gordon- und die klassische Wellengleichg</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = f$$

$m = 0$: klassische Wellengleichung, beschreibt die Ausbreitung von Licht, Schall, ... in homogenen Medien,

$m \neq 0$: Klein-Gordon-Gleichung; erster Versuch einer fundamentalen Gleichung für eine relativistische QM; in diesem Fall f oft in der Form $V \cdot u$ mit $V = V(x)$ (homogen linear) oder $V = V(u, u_t, \nabla_x u)$ (semilinear).

Mehr zu Glen. dieses Typs im nächsten Semester, dann überwiegend mit Methoden der harmonischen Analysis.

Soweit die drei Hauptbeispiele für Evolutionsgleichungen aus dem Gebiet der partiellen Dglen. Im ersten (und Haupt-)teil dieser Vorlesung soll es darum gehen, eine allgemeine Theorie zur Behandlung solcher Gleichungen zu entwickeln, die die speziellen Eigenschaften einer Gleichung ("parabolisch", "dispersiv" oder "hyperbolisch", wie die Wellengleichung) nicht berücksichtigt.

Dazu schreibt man als allgemeine Form (für die homogene lineare Gleichung)

partielle Ableitung — totale Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad \text{oder besser} \quad \frac{du}{dt} = Au \quad (+f)$$

inhomogene Gl.

an mit einem allgemeinen Operator A, worunter zunächst nur eine lineare Abbildung in einem Banachraum E verstanden sei. In unseren obigen Beispielen:

$A = \Delta$: Wärmeleitungsgleichung

$A = -iH$: Schrödinger-Gleichung, $H = -\Delta + V(x)$ der Hamilton-Operator

Auch die Wellen- bzw. Klein-Gordon-Gleichung lässt sich auf (11)
diese Form bringen, indem man sie in ein äquivalentes
System erster Ordnung umwandelt. z.B. setzt man

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t},$$ auch für andere partielle Ableitungen

Dann ist $u_{tt} = \Delta u - m^2 u + f$ genau dann, wenn gilt.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{pmatrix} \partial_t v_1 \\ \partial_t v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ (\Delta - m^2) v_1 + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\Delta - m^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Also haben wir zumindest formal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\Delta - m^2) & 0 \end{pmatrix}$$; Wellen-/Klein-Gordon-Gleichung.

Nun betrachtet man die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = Au + f$$

als gewöhnliche Differentialgleichung ; allerdings für

Funktionen $u : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow E$,

wobei E ein Banachraum von Funktionen der Orts-
variablen x (oder ggf. weiterer Variablen) ist.
Die Zeitableitung $\frac{d}{dt}$ ist hierbei fast genauso
aufzufassen wie in der Anfängervorlesung Analysis I:

Es ist

$$\frac{du}{dt}(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\,(u(t)-u(t_0)),$$

wobei der Grenzwert in der Norm auf E gebildet wird.
Die definierende Eigenschaft der Ableitung bedeutet also

$$\lim_{t\to t_0} \left\| \frac{1}{t-t_0}(u(t)-u(t_0)) - \frac{du}{dt}(t_0) \right\| = 0.$$

Vorteil dieser Betrachtungsweise: Einige Erkenntnisse aus der Theorie der gewöhnlichen Dgln. lassen sich auf partielle Dgln. obigen Typs übertragen.

1.2 Rekapitulation gewöhnliche Differenzialgleichungen (ODE)

Einfache Beispiele von Evolutionsgleichungen, nämlich aus dem Bereich der gewöhnlichen Differenzialgleichungen, haben Sie bereits in der Analysis II kennengelernt, etwa die gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), \qquad f\in C(A\times I, \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

wobei $A\subset\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall ist.
Für $n\geq 2$ handelt es sich um ein System von ODE's.

Hierüber ist bekannt:

- Man benötigt eine (bzw. n) Anfangsbedingung(en) $y(t_0) = y_0 \in\mathbb{R}^n$, um die Eindeutigkeit einer Lösung zu erzwingen (meist kann $t_0 = 0$ gewählt werden);

- Satz von Picard-Lindelöf: Wenn die rechte Seite der obigen ODE einer globalen Lipschitz-Bedingung

$$|f(x,t)-f(y,t)| \le L|x-y| \qquad \forall\, x,y\in A,\ t\in I \qquad (L)$$

genügt, so existiert genau eine Lösung

$$y\in C^1(I,A)$$

des Anfangswertproblems

$$y'(t)=f(y,t), \qquad y(t_0)=y_0$$

bzw. der (in diesem Fall tatsächlich äquivalenten) Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s),s)\,ds \quad .$$

(Gilt (L) nur lokal, also in einer Umgebung von y_0, so existiert die Lösung y i. allg. nur auf einem Teilintervall $I_0\subset I$ mit $t_0\in I$; ohne die Eigenschaft (L) geht die Eindeutigkeit verloren.)

- Gleichungen höherer Ordnung können auf Systeme von Gln. obigen Typs zurückgeführt werden: Ist die Gleichung nach der höchsten Ableitungsordnung aufgelöst, also

$$y^{(n)} = f(y,y',\dots,y^{(n-1)},t) \qquad (2),$$

so führt man die neuen (abhängigen!) Variablen

$$y_1(t)=y(t),\quad y_2(t)=y'(t),\ \dots,\ y_n(t)=y^{(n-1)}(t)$$

ein und erhält hierfür das System 1. Ordnung

$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_3(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(t) = y^{(n)}(t) = f(y_1, \dots, y_n, t),$$

vgl. unser Vorgehen oben bei der Wellengleichung!

und hierauf können wir den Satz von Picard-Lindelöf anwenden. Folgerung für Gleichungen höherer Ordnung: Das angemessene Anfangswertproblem für Gleichungen vom Typ (2) besteht in der Vorgabe von

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

(also n Daten für eine Gleichung n-ter Ordnung).

Entsprechend können wir für die gewöhnliche Dgl.

$$\frac{du}{dt} = Au + f$$

für Banachraumwertige Funktionen $u: I \to E$ erwarten, dass das Anfangswert- bzw. Cauchy-Problem

$$u(t_0) = u_0 \in E$$

angemessen ist, um Existenz und Eindeutigkeit zu erhalten. Möglicherweise sind zusätzlich Randbedingungen (zumeist: Dirichlet-Randbedingungen: $u|_{\partial\Omega} = 0$) zu stellen. Diese werden durch Auswahl des Funktionenraumes E berücksichtigt. Für unsere kanonischen

Bspe: WLG / SG: $u(t_0) = u_0$ (Gln. 1. Ordnung in t)

Wellengl. $u(t_0) = u_0$, $\frac{du}{dt}(t_0) = u_1$ (Gln. 2. O.)

Meist: $t_0 = 0$. Datenräume – meist Sobolevräume – bleiben an dieser Stelle noch unbestimmt.

1.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

An ein weiteres Ergebnis aus der Analysis II möchte ich an dieser Stelle erinnern, es betrifft die Systeme gewöhnlicher linearer Dglen. (1. Ordnung) mit konstanten Koeffizienten, also

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f \quad \text{mit Anfangsbed.} \quad y(t_0 = 0) = y_0 \in \mathbb{C}^n,$$

mit einer festen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{C}^n$, die beide gegeben sind. In diesem Fall können wir für die gesuchte Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ nämlich eine explizite Berechnungsvorschrift angeben. Sie lautet

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds. \tag{3}$$

Hierbei ist e^{tA} erklärt als Potenzreihe

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k ,$$

die in $\mathbb{C}^{n\times n}$ in der Operatornorm

$$\| B \| := \sup \{ \| Bx \| : x \in \mathbb{C}^n : |x| \le 1 \}$$

konvergiert, und zwar gleichmäßig auf Kugeln in $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Die Konvergenz sieht man folgendermaßen ein: Die o.a. Norm ist submultiplikativ, d.h. wir haben

$$\| BC \| \le \|B\| \, \|C\| .$$

(Begründung als Übungsaufgabe!)

Hieraus folgt

$$\Big\| \sum_{k=m}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \Big\| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{|t|^k}{k!} \| A^k \| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n} \frac{|t|^k}{k!} \| A \|^k \longrightarrow 0 \quad (m,n \to \infty),$$

da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = e^{|t| \|A\|}$ bekanntlich konvergiert. Damit ist die Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}^{n \times n}$ und somit konvergent, da $\mathbb{C}^{n \times n}$ vollständig ist. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf Kugeln $B_R(0) := \{ B \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|B\| \leq R \} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ und damit auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{C}^{n \times n}$ sieht man mit denselben einfachen Abschätzungen ein.

→ <u>Ziel der Vorlesung</u>: Erkläre e^{tA}, wenn A ein Differential- oder Multiplikationsoperator ist, etwa $A = \Delta$ oder $A = iH = \ldots = i(-\Delta + V)$!

Auch der Integralterm in der angegebenen Lösungsformel bedarf der Erläuterung: Es handelt sich dabei um die "Variation der Konstanten"-Formel, die Sie bereits für Systeme mit variablen Koeffizienten in der folgenden Form kennengelernt haben:

<u>Satz</u> (<u>"Variation der Konstanten"</u>, Analysis II): Es seien $A \in C(I, \mathbb{C}^{n\times n})$, $f \in C(I, \mathbb{C}^n)$ und $\Phi \in C^1(I, \mathbb{C}^{n\times n})$ ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen linearen Systems

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y .$$

Dann ist die Lösung $y_p \in C^1(I, \mathbb{C}^n)$ des entsprechenden inhomogenen Systems mit $y_p(t_0) = 0$ gegeben durch

$$y_p(t) = \Phi(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds .$$

Diese Formel und ihre Verallgemeinerungen werden auch als <u>"Duhamel-Formel"</u> oder "Duhamel-Term" bezeichnet.

Nun müssen wir nur noch beachten, dass im Fall konstanter Koeffizienten (also $A(t) = A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ fest) ein Lösungsfundamentalsystem

$$\Phi(t) = e^{At}$$

mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion bestimmt werden kann. Hierfür gilt

$$E = e^0 = e^{tA - tA} = e^{tA} \cdot e^{-tA} \quad (\text{da } e^{B+C} = e^B e^C,$$
wenn $[B,C] := BC - CB = 0$) und also $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

<u>Wichtig:</u> Formel (3) liefert auch dann eine Integraldarstellung der Lösung, wenn y stetig und f

eine stetige Funktion von y ist: Sei

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(u(s))\,ds \quad (y \text{ stetig})$$

Dann ist y stetig diffbar und es gelten $y(0) = y_0$ sowie

$$y'(t) = A \cdot e^{tA} y_0 + A \cdot \int_0^t e^{(t-s)A} f(u(s))\,ds + f(u(t))$$

$$= A y(t) + f(u(t)).$$

Hierbei haben wir den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und die Produktregel benutzt. Dies ist insofern unproblematisch, als das Integral für Matrixwertige ($\mathbb{C}^{n\times n}$-wertige) Funktionen komponentenweise erklärt wird (werden kann). Damit stoßen wir auf ein nichttriviales Problem, wenn wir die genannten ODE-Argumente auf PDE bzw. ODE für Banachraum-wertige Funktionen verallgemeinern wollen:

<u>Fragestellung</u>: Wie definiert man (sinnvollerweise) das Integral (hier: $\int_0^t \ldots ds$, möglichst allgemeiner) für Funktionen $f: I \to E$ (oder: $\Omega \to E$), wenn E ein ∞-dimensionaler Banachraum ist?