4.2 Semilineare Probleme

Es seien $E, A, (T(t))_{t\geq 0}$ wie allgemein vorausgesetzt und $F: E \to E$ eine nichtlineare Funktion. Gefragt ist, ob und in welchem Sinne das Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t)), \qquad u(0) = u_0 \in E \qquad \text{(CP)}$$

wohlgestellt ist. Man unterscheidet zwischen

(i) (zeitlich) lokaler Wohlgestelltheit: Es gibt ein $T>0$, so dass genau eine (klassische, starke, ..., milde) Lösung $u \in C([0,T], E)$ (ggf. $\cap$ ..., um Eindeutigkeit zu erzwingen) von (CP) existiert; und

(ii) (zeitlich) globaler Wohlgestelltheit: Die Lösung u aus (i) existiert für alle Zeiten $T>0$.

Von der Funktion F nehmen wir stets an, sie sei Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen von E, d.h.:

$$\forall R>0 \ \exists L = L(F,R): \|F(u) - F(v)\|_E \leq L \|u-v\|_E \ \forall u,v \in B_R(0) \subset E.$$

Wir setzen

$$L_F(R) := \sup\left\{ \frac{\|F(u)-F(v)\|_E}{\|u-v\|_E} : u,v \in B_R(0), u \neq v \right\},$$

dann ist $L_F: (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ monoton steigend.

In erster Linie suchen wir für Zeiten $T>0$ nach Lösungen $u \in C([0,T], E)$ der Integral- bzw. Fixpunktgleichung $\Lambda_{u_0}(u) = u$, wobei

$$\Lambda_{u_0}(u)(t) := T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))\,ds \qquad (D)$$

ist. Aufgrund der Lipschitz-Bedingung an F gilt

$$u \in C([0,T],E) \Rightarrow F\circ u \in C([0,T],E) \subset C([0,T],\bar{E}) \cap L^1((0,T),E).$$

Laut der Folgerung aus Satz 2 in Abschnitt 4.1 erhalten wir: Ist $u \in C([0,T],E)$ eine Lösung von (D), so ist u eine klassische Lösung von

$$\frac{du}{dt}(t) = \bar{A}u(t) + F(u(t)),\ u(0) = u_0 \in E = D_{\bar{A}} \qquad (\overline{CP}).$$

In diesem Sinne zumindest ist dann jedenfalls auch die Dgl. erfüllt. Ob ein solches u auch eine „starke" oder gar „klassische" Lösung ist, erfordert weitere Regularitätsuntersuchungen, die sinnvollerweise im Einzelfall durchgeführt werden: Hier gilt es, Glättungseffekte von $(T(t))_{t\geq 0}$ oder auch von F zu berücksichtigen. (z.B. könnte

$$F(u) = \chi * (|u|^{p-1})u$$

mit einer glatten Funktion χ sein. Auch $\chi_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ mit $0<\alpha<n$ ist relevant. Dann ist

$$\chi_\alpha * v = (-\Delta)^{\frac{\alpha-n}{2}} v, \qquad \text{(vgl. Vorl. "Harmonic Analysis")}$$

wie etwa bei der <u>Hartree-Gleichung</u>

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = (|x|^{-\alpha} * |u|^2)\cdot u,$$

einer speziellen nichtlinearen Schrödinger-Gleichung.)

Zuerst zeigen wir eine Eindeutigkeitsaussage. Dazu verwenden wir das folgende

Lemma 1 (Gronwallsche Ungleichung): Es seien $T>0$ und $\varphi, g : [0,T] \to [0,\infty)$ stetig. Es gebe ein $C \geq 0$, sodass für alle $t \in [0,T]$

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds$$

Dann gilt $\varphi(t) \leq C \cdot \exp(\int_0^t g(s)\,ds)$.

Bew.: Sei $\psi(t) := C + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds$.

$$\Rightarrow \psi'(t) = g(t)\varphi(t) \leq g(t)\varphi(t) \leq g(t)\psi(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\psi(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right)\right) = \left(\psi'(t) - \psi(t)g(t)\right)\exp(\ldots) \leq 0.$$

$$\Rightarrow \psi(t) \cdot \exp\left(-\int_0^t g(s)\,ds\right) \leq \psi(0) = C$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \psi(t) \leq C \cdot \exp\left(\int_0^t g(s)\,ds\right). \qquad \square$$

Bem.: Insbesondere ist für $C=0$ stets $\varphi(t) = 0$!

Lemma 2: Es seien $T>0$, $u_0 \in E$ und $u, v \in C([0,T],E)$ zwei Lösungen der Fixpunktgleichung $\Lambda_{u_0}(u) = u$. Dann gilt $u = v$.

Bew.: $R := \max\left(\|u\|_{L^\infty((0,T),E)}, \|v\|_{L^\infty((0,T),E)}\right)$. Dann

$$\|u(t) - v(t)\|_E = \|\Lambda_{u_0}(u)(t) - \Lambda_{u_0}(v)(t)\|_E = \left\|\int_0^t T(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))\,ds\right\|_E$$

$$\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\|_E\,ds \leq L_F(R)\int_0^t \|u(s) - v(s)\|_E\,ds.$$

Jetzt Gronwall-Lemma mit $C = 0$, $g(s) = L_F(R)$ (konst.) und $\varphi(s) = \|u(s) - v(s)\|_E$. $\square$

Satz 1: Sei $u_0 \in E$ und $F : E \to E$ Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen mit Lipschitz-Konstanten $L = L_F(R)$. Dann (4.25
gibt es ein $T = T(\|u_0\|_E, F) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T],E)$ von $\Lambda_{u_0}(u) = u$.

Bew.: Eindeutigkeit in $C([0,T],E)$ gilt nach Lemma 2.

Existenz: Sei $\|u\|_\infty := \sup\limits_{0 \le t \le T} \|u(t)\|_E$ und

$$B_{R,T} := \{ u \in C([0,T],E) : \|u\|_\infty \le R \}.$$

Wir werden zeigen, dass für eine geeignete Wahl von R und T die Abb. $\Lambda_{u_0} : B_{R,T} \to B_{R,T}$ eine Kontraktion ist. (Dann folgt die Beh. aus dem Banachschen Fixpunktsatz, denn $B_{R,T}$ ist ein abgeschlossener metrischer Teilraum von $(C([0,T],E), \|\ \|_\infty)$ und daher vollständig.)

Dazu schätzen wir ab:

$$\|\Lambda_{u_0}(u)\|_\infty \le \|T u_0\|_\infty + \Big\| \int_0^{\cdot} T(\cdot - s) F(u(s))\, ds \Big\|_\infty$$

$$\le \|u_0\|_E + \int_0^T \|F(u(s))\|_E \, ds,$$

wobei wir die Δ-Ungleichung benutzt haben und die Voraussetzung, dass $(T(t))_{t \ge 0}$ eine Kontraktions-Halbgruppe ist. Für den zweiten Beitrag verwenden wir die Lipschitz-Eigenschaft von F und schreiben:

$$\|F(u(s))\|_E \le \|F(u(s)) - F(0)\|_E + \|F(0)\|_E$$

$$\le L_F(\|u(s)\|_E)\,\|u(s)\|_E + \|F(0)\|_E$$

$$\le L_F(R)R + \|F(0)\|_E \text{ , letzteres für } u \in B_{R,T}.$$

Insgesamt:

$$\|\Lambda_{u_0}(u)\|_\infty \le \|u_0\|_E + T(RL_F(R) + \|F(0)\|_E).$$

Nehmen wir $v \in B_{R,T}$ und $\Lambda_{u_0}v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(v(s))\,ds$ hinzu, so erhalten wir für die Differenz

$$\|\Lambda_{u_0}(u) - \Lambda_{u_0}(v)\|_\infty \le TL(R)\,\|u-v\|_\infty .$$

Die Voraussetzungen des FPS sind erfüllt, wenn

(i) $\|u_0\|_E + TR\left(L_F(R) + \frac{\|F(0)\|_E}{R}\right) \le R$ und

(ii) $TL_F(R) \le \frac{1}{2}$.

Wir wählen $R := 2\|u_0\|_E + \|F(0)\|_E$. Dann ist $\|u_0\|_E \le \frac{R}{2}$ und $TR\left(L_F(R) + \frac{\|F(0)\|_E}{R}\right) \le TR(L_F(R)+1)$ $\left(\overset{!}{\le} \frac{R}{2}\right)$, so dass die Wahl $T := \frac{1}{2(L_F(R)+1)}$ für (i) und (ii) ausreicht. □

Bem.: Untere Schranke für die Lebensdauer durch einmalige Anwendung des Fixpunktsatzes:

$$T = T(\|u_0\|_E, F) \ge \left(2\left(L_F(2\|u_0\|_E + \|F(0)\|_E) + 1\right)\right)^{-1}$$

Im Fall lediglich lokaler Existenz lässt sich hieraus eine untere Schranke für die „blow-up-rate" gewinnen:

Satz 2 ("Blow-up-Alternative"): Es sei $F: E \to E$ Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen mit Lipschitzkonstanten $L_F(R)$. Dann gibt es eine Funktion $T^*: E \to (0,\infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Zu jedem $u_0 \in E$ existiert ein $u \in C([0,T^*(u_0)), E)$, so dass u für alle $T \in (0,T^*(u_0))$ die eindeutige Lösung von $\Lambda_{u_0}(u) = u$ in $C([0,T], E)$ ist.

(b) Für alle $t \in (0,T^*(u_0))$ gilt die Abschätzung

$$2 L_F(\|F(0)\|_E + 2\|u(t)\|_E) + 2 \geq \frac{1}{T^*(u_0) - t}, \quad (LB)$$

(c) Insbesondere besteht die Alternative

(i) $T^*(u_0) = \infty$ oder (ii) $T^*(u_0) < \infty$ und $\lim\limits_{t \to T^*(u_0)} \|u(t)\|_E = \infty$.

Bem. zu (c): Da $L_F : (0,\infty) \to [0,\infty)$ monoton steigend ist, folgt (c) aus (b). Im Fall (i) liegt globale Existenz vor, im Fall (ii) spricht man von "blow-up" in endlicher Zeit; andere Möglichkeiten gibt es nicht!

Will man von lokaler Existenz auf globale schließen, so reicht dazu der Beweis einer a-priori-Abschätzung der Form $\|u(t)\|_E \leq \varphi(t)$ mit einer Funktion $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ aus. (Solche Schranken kann man oft aus Erhaltungsgrößen (Energie, Masse, Ladung, ...) des beschriebenen Phänomens gewinnen.)

Bew.: (a) Für $u_0 \in E$ setzen wir

$$\mathcal{T}(u_0) := \{T > 0 : \exists\, u \in C([0,T],E) : \Lambda_{u_0}(u) = u \text{ auf } [0,T]\}$$

und $T^*(u_0) := \sup \mathcal{T}(u_0)$. Nach Satz 1 gibt es zu jedem $u_0 \in E$ eine lokale Lösung, so dass stets $T^*(u_0) > 0$ ist. Also gilt $T^*(E) \subset (0,\infty]$.

Zu jedem $T \in \mathcal{T}(u_0)$ gibt es eine eindeutige Lösung

$$u_T \in C([0,T],E) \text{ von } \Lambda_{u_0}(u_T) = u_T.$$

Sind $0 < T_1 < T_2 < T^*(u_0)$, so gilt wegen der Eindeutigkeit $u_{T_2}\big|_{[0,T_1]} = u_{T_1}$. Daher ist

$$u(t) := u_T(t), \quad \text{falls } 0 \le t \le T < T^*(u_0)$$

wohldefiniert und $u \in C([0,T^*(u_0)),E)$ eine Lösung von $\Lambda_{u_0}(u)(t) = u(t) \;\; \forall\, t \in [0,T^*(u_0))$.

(b) Im Fall $T^*(u_0) = \infty$ dürfen wir (LB) interpretieren als $L_F(\|F(0)\|_E + 2\|u(t)\|_E) + 1 \ge 0$, was natürlich erfüllt ist.

Im Fall $T^*(u_0) < \infty$ nehmen wir an, dass (LB) für ein $t \in (0,T^*(u_0))$ nicht gilt, dass also für dieses t

$$T^*(u_0) - t < \left(2\left(L_F(\|F(0)\|_E + 2\|u(t)\|_E) + 1\right)\right)^{-1} =: T_1.$$

Hierbei ist $T_1 = T(\|u(t)\|_E, F)$ die (durch einmalige Anwendung des Fixpunktsatzes garantierte) Lebensdauer einer Lösung von $\Lambda_{u(t)}(v) = v$, vgl. die Bem.

nach Satz 1. Sei also $v \in C([0,T_1],E)$ die Lösung von

$$v(s) = T(s)u(t) + \int_0^s T(s-\sigma)F(v(\sigma))d\sigma.$$

Dann definieren wir

$$w(s) := \begin{cases} u(s) & \text{für } 0 \leq s \leq t \\ v(s-t) & \text{"} \quad t \leq s \leq t+T_1, \end{cases}$$

und erhalten so eine Lösung $w \in C([0,t+T_1],E)$ von $\Lambda_{u_0}(w) = w$ auf $[0,t+T_1]$, was wegen unserer Annahme $t+T_1 > T^*(u_0)$ im Widerspruch zur Definition von $T^*(u_0)$ steht. □

Abschließend sei das folgende Ergebnis zur stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Daten ohne Beweis angegeben:

<u>Satz</u> 3: Es seien F, L_F, T^* wie in Satz 2, $u_0 \in E$ und $(u_0^{(n)})_n$ eine Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} \|u_0^{(n)} - u_0\|_E = 0$.
$u \in C([0,T^*(u_0)),E)$ und $u_n \in C([0,T^*(u_0^{(n)})),E)$ $(n \in \mathbb{N})$ seien Lösungen von $\Lambda_{u_0}(u) = u$ bzw. $\Lambda_{u_0^{(n)}}(u_n) = u_n$.
Dann gelten:

(a) $\liminf_{n\to\infty} T^*(u_0^{(n)}) \geq T^*(u_0)$ ("T^* ist unterhalb stetig")

(b) $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in $C([0,T^*(u_0)),E)$, d.h. für jedes $T \in (0,T^*(u_0))$ ist $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \|u_n(t)-u(t)\|_E = 0$.

<u>Bew.</u>: Cazenave/Haraux, Prop. 4.3.7 (ziemlich knapp)