4. Inhomogene Gleichungen und semilineare Probleme

Generalvoraussetzungen in diesem Kapitel:

(1) E ist ein Banachraum;

(2) $A: E \supset D_A \to E$ ist ein linearer Operator, der eine Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf E erzeugt.

Laut (2) ist verbunden:

(3) A ist dicht definiert und abgeschlossen,

(4) A ist maximal dissipativ, was wiederum bedeutet:

(4.1) A ist dissipativ, d.h.

$\forall x \in D_A \ \exists y \in J(x) = \{y \in E' : \|y\|^2 = \|x\|^2 = y[x]\}$ mit $\operatorname{Re} y[Ax] \leq 0$.

Äquivalent dazu ist

$\forall x \in D_A, \forall \lambda > 0$ gilt $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$

($\Rightarrow \lambda - A : D_A \to E$ ist injektiv und offen)

(4.2) $\exists \lambda_0 > 0 : \lambda_0 - A : D_A \to E$ ist surjektiv. ($\Rightarrow (0,\infty) \subset \varrho(A)$)

(5) Das Cauchy-Problem $\frac{du}{dt} = Au$, $u(0) = u_0 \in D_A$ für die homogene Gleichung ist im klassischen Sinne wohlgestellt, die Lösung ist gegeben durch $u(t) = T(t)u_0$.

4.1 Inhomogene Gleichungen

Hier untersuchen wir das Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), \qquad u(0) = u_0. \qquad \text{(CP)}$$

Hierbei ist $u_0 \in E$, für klassische Wohlgestelltheit müssen wir $u_0 \in D_A$ voraussetzen. Neu hinzu kommt die Inhomogenität $f: (0,T) \to E$, $T > 0$, von der wir mindestens voraussetzen, dass

$$f \in L^1((0,T),E) \qquad \text{oft stärker: } f \in C([0,T],E),$$

ggf. verlangen wir, dass f eine D_A-wertige Funktion ist.

Zunächst suchen wir klassische Lösungen

$$u \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T],E)$$

von (CP), für die die Dgl. mit klassischen Ableitungen in jedem $t \in [0,T]$ erfüllt ist. Hierfür benötigen wir $u_0 \in D_A$. Ganz ähnlich wie bei gewöhnlichen Dglen. gilt eine "Variation der Konstanten"-Formel:

Lemma 1 ("Duhamelsches Prinzip"): Es seien $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T],E)$ und u eine klassische Lösung von (CP). Dann gilt $\forall t \in [0,T]$:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \qquad (D)$$

Bew.: Klar für $t=0$. Für $t \in (0,T]$ und $s \in [0,t]$ setzen wir

$$w(s) := T(t-s)u(s).$$

Da $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ ist, können wir w nach der Produktregel differenzieren und erhalten

$$\frac{dw}{ds}(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)\frac{du}{ds}(s)$$

$$\underset{\text{Dgl.}}{=} -T(t-s)Au(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) = T(t-s)f(s).$$

Integration von 0 bis t ergibt nach dem Hauptsatz:

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = w(t)-w(0) = u(t)-T(t)u(0) = u(t)-T(t)u_0,$$

letzteres wegen der vorausgesetzten Anfangsbed.. $\square$

Folgerung: Eine Lösung $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ von (CP) ist eindeutig bestimmt.

Unter welchen Voraussetzungen gilt die Äquivalenz von Cauchy-Problem (CP) und Integralgleichung (D), sagen wir im Rahmen einer Theorie klassischer Lösungen? (Dazu fehlt: (D) $\Rightarrow$ (CP), $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$.) Hierfür können wir natürlich voraussetzen, dass

(i) $u_0 \in D_A$ $\quad (\Rightarrow t \mapsto T(t)u_0 \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E))$ und

(ii) $f \in C([0,T],D_A)$ $\quad (\Rightarrow t \mapsto \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \in C([0,t],D_A) \cap C^1([0,T],E))$

und die Dgl. folgt durch Ableiten. Das ist allerdings etwas grob, denn für $f \in C([0,T],D_A)$ ist

$$\frac{d}{dt}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds = f(t) + \int_0^t T(t-s)Af(s)\,ds,$$

und das liegt in $C([0,T],D_A)$. Andrerseits ist die Voraussetzung

$$u_0 \in D_A \qquad \text{und} \qquad f \in C([0,T],E)$$

nicht ausreichend, um $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ zu folgern, wie das folgende Bsp. zeigt:

Bsp.: Sei $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von Isometrien, $u_0=0$, $y\in E\setminus D_A$ und $f(t)=T(t)y$. Dann ist

- $f\in C([0,T],E)$, aber
- $\forall t\geq 0 \;\; f(t)\notin D_A$, denn sonst erhalten wir mit $D_A \not\ni y = T(-t)T(t)y\in D_A$ sofort einen Widerspruch.

Weiter ist für u, definiert durch (D):

$$u(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds=\int_0^t T(t-s)T(s)y\,ds = t\underbrace{T(t)y}_{f(t)}\notin D_A$$

und also $u\notin C([0,T],D_A)$.

Um hier etwas genaueres aussagen zu können, sollten wir den "Duhamel-Term" $\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$ etwas genauer untersuchen.

Lemma 2: Sei $u_0\in E$ und $f\in L^1((0,T),E)$. Dann wird durch die Duhamel-Formel (D) eine Funktion $u\in C([0,T],E)$ definiert, und es gilt die Abschätzung

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_E \leq \|u_0\|_E + \|f\|_{L^1((0,T),E)}.$$

Da $(D_A,\|\;\|_{D_A})$ ein Banachraum ist und $(T(t))_{t\geq 0}$ auf D_A ebenfalls eine KHG ist, ergibt sich die

Folgerung: Ist $u_0\in D_A$ und $f\in L^1((0,T),D_A)$. Dann ist $u\in C([0,T],D_A)$, und die Abschätzung gilt mit $\|\;\|_{D_A}$ anstelle von $\|\;\|_E$.

Bew.: Sei $u_h(t) = T(t)u_0$. Da $(T(t))_{t\geq 0}$ stark stetig ist, gilt $u_h \in C([0,T], E)$, und weil wir "Kontraktionshalbgruppe" grundsätzlich vorausgesetzt haben, ist auch

$$\|u_h(t)\|_E \leq \|T(t)\|_{E\to E} \|u_0\|_E \leq \|u_0\|_E.$$

Die ΔS-Ungleichung für Integrale ergibt für $u_p(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds$

$$\|u_p(t)\|_E \leq \int_0^t \|T(t-s)f(s)\|_E ds \leq \int_0^T \|f(s)\|_E ds = \|f\|_{L^1((0,T),E)},$$

was den zweiten Teil der behaupteten Abschätzung liefert.

Bleibt die Stetigkeit von u_p zu zeigen:

$$\|u_p(t+h) - u_p(t)\|_E \leq \Big\| \int_0^t (T(t+h-s) - T(t-s))f(s)ds \Big\|_E + \Big\| \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \Big\|_E = I_h + II_h \quad \text{mit}$$

$$II_h \leq \int_t^{t+h} \|f(s)\|_E ds \longrightarrow 0 \ (h\to 0), \text{ da } f \in L^1((0,T),E).$$

Für I_h beachten wir $\lim_{h\to 0} (T(t+h-s) - T(t-s))f(s) = 0$ (weil $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0-HG ist) und $\|(T(t+h-s) - T(t-s))f(s)\|_E \leq 2\|f(s)\|_E$, was eine integrierbare Majorante ist.

Der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt $\lim_{h\to 0} I_h = 0$. □

~~Satz 1: Es seien $u_0 \in D_A$ und $f \in C([0,T], E) \cap L^1((0,T), D_A)$. Dann ist u, definiert durch (D), in $C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], E)$ und löst das Cauchy-Problem (CP) im klassischen Sinne.~~

Satz 1: Es seien $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T],E)$ und

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

gemäß (D). Ferner sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

$$\text{(i) } u \in C([0,T],D_A) \quad \underline{\text{oder}} \quad \text{(ii) } u \in C^1([0,T],E).$$

Dann ist $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ und löst (CP) im klassischen Sinne.

Bew.: Sei $u_h(t) := T(t)u_0$. Dann wissen wir bereits, dass wegen $u_0 \in D_A$ gilt: $u_h \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ und

$$\frac{du_h}{dt}(t) = Au_h(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

Daher können wir o. E. $u_0 = 0$ annehmen und somit

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Für $t=0$ und $h>0$ haben wir

$$\frac{1}{h}(u(h) - \underbrace{u(0)}_{=0}) = \frac{1}{h}\int_0^h T(h-s)f(s)\,ds = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(h-s)\,ds$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(s)\,ds + \frac{1}{h}\int_0^h T(s)(f(h-s)-f(s))\,ds =: I_h + II_h,$$

wobei nach dem Hauptsatz $\lim_{h\to 0} I_h = T(0)f(0) = Au(0) + f(0)$.

Da f glm. stetig ist, gilt $\lim_{h\to 0} \sup_{0\le s\le h} \|T(s)(f(h-s)-f(s))\|$
$\le \lim_{h\to 0} \sup_{0\le s\le h} \|f(h-s)-f(s)\| = 0$ und daher auch $\lim_{h\to 0} II_h = 0$.

Für $t>0$ schreiben wir

$$\int_0^t u(s)\,ds = \int_0^t \int_0^s T(s-r)f(r)\,dr\,ds$$

(Fubini) $$= \int_0^t \int_r^t T(s-r)f(r)\,ds\,dr$$

$\sigma = s-r$ $$= \int_0^t \int_0^{t-r} T(\sigma)f(r)\,d\sigma\,dr$$

Nach Lemma 3(b) aus Abschnitt 2.1 gilt (sogar für alle $x \in E$), dass $\int_0^t T(s)x\,ds \in D_A$ und $T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,ds$.

Damit erhalten wir für das innere Integral

$$A\int_0^{t-r} T(\sigma)f(r)\,d\sigma = T(t-r)f(r) - f(r).$$

An der rechten Seite lesen wir die Integrierbarkeit (bzgl. r) auf $[0,t]$ ab, sodass

$$\int_0^t A\int_0^{t-r} T(\sigma)f(r)\,d\sigma\,dr = \int_0^t T(t-r)f(r) - f(r)\,dr.$$

Da A abgeschlossen ist, können wir (nach Satz 4 (4) in Abschnitt 1.3) die Reihenfolge von $\int_0^t \ldots dr$ und A vertauschen und erhalten

$$A\int_0^t u(s)\,ds = A\int_0^t \int_0^{t-r} T(\sigma)f(r)\,d\sigma\,dr$$

$$= \int_0^t T(t-r)f(r)\,dr - \int_0^t f(r)\,dr = u(t) - \int_0^t f(r)\,dr$$

bzw.

$$u(t) = A\int_0^t u(s)\,ds + \int_0^t f(s)\,ds$$

und damit

$$\frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = A\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds. \qquad (*)$$

<u>Fall (i), $u \in C([0,T], D_A)$</u>: In diesem Fall ist (nochmal Satz 4 (4) aus A 1.3) $A \cdot \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} Au(s)ds$ und daher nach dem Hauptsatz

$$\frac{du}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} Au(s)+f(s)ds$$

$$= Au(t)+f(t)$$

Wegen $u \in C([0,T], D_A)$ und $f \in C([0,T], E)$ steht rechts eine stetige Funktion mit Werten in E. Also ist $u \in C^1([0,T], E)$.

<u>Fall (ii), $u \in C^1([0,T], E)$</u>: Unter dieser Voraussetzung können wir (*) entnehmen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} A\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds$$

existiert. Nach Lemma 2 (oder Voraussetzung) ist $u \in C([0,T], E)$ also ergibt der Hauptsatz, dass $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds = u(t)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $u(t) \in D_A$ und $Au(t) = \lim_{h\to 0} A\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds = Au(t)$. Also haben wir

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t),$$

und da sowohl $\frac{du}{dt}$ als auch $f \in C([0,T], E)$ sind, gilt $Au \in C([0,T], E)$, d.h. $u \in C([0,T], D_A)$. $\square$

Folgerung: Es seien $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T],E) \cap L^1((0,T),D_A)$ und u gemäß (D). Dann ist $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ eine klassische Lösung von (CP).

Bew.: Nach der Folgerung aus Lemma 2 ist $u \in C([0,T],D_A)$, womit die Voraussetzung (i) in Satz 1 erfüllt ist.

Bem.: (1) Die Voraussetzung $f \in L^1((0,T),D_A)$ in der Folgerung aus Satz 1 kann ersetzt werden durch $f \in W^{1,1}((0,T),E)$, das ist der B-Raum aller $f \in L^1((0,T),E)$, für die auch die Distributionsableitung $\frac{df}{dt} \in L^1((0,T),E)$ ist. Um dies zu zeigen, benötigt man allerdings eine stärkere Version des Hauptsatzes, vgl. Cazenave + Haraux, Prop. 4.1.6.

(2) Ist H ein Hilbertraum und $A: H \supset D_A \to H$ selbstadjungiert und nicht positiv, so kann die Voraussetzung "$u_0 \in D_A$" in der Folgerung abgeschwächt werden zu "$u_0 \in H$". In diesem Fall ist nämlich $\forall t > 0$: $T(t)u_0 \in D_A$; die Lösung der inhomogenen Gleichung liegt dann in $C([0,T],H) \cap C((0,T],D_A) \cap C^1((0,T],H)$.

Die Äquivalenz von Integralgleichung (D) und der klassischen Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems (CP) gilt also nur unter recht starken Voraussetzungen insbesondere auf f, z. B.:

$$u_0 \in D_A \quad \text{und} \quad f \in C([0,T],E) \cap L^1((0,T),D_A),$$

während die Duhamel-Formel (D) bereits für

$$u_0 \in E, \qquad f \in L^1((0,T),E)$$

eine stetige Funktion liefert. ⇝ Frage: Kann man den Lösungs- und Wohlgestelltheitsbegriff in sinnvoller Weise abschwächen, um diese Lücke zumindest zu verkleinern? Eine Möglichkeit dazu ist das Konzept der Extrapolation:

Satz 2: Es sei $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und m-dissipativ. Dann existieren ein B-Raum $\bar{E}$ und ein ebenfalls m-dissipativer Operator $\bar{A}$ auf $\bar{E}$ mit den folgenden Eigenschaften: (i) $E \subset \bar{E}$, E ist dicht in $\bar{E}$;

(ii) $\forall x \in E$ ist die Norm von x in $\bar{E}$ gegeben durch $|||x||| := \|(I-A)^{-1}x\|_E$;

(iii) $D_{\bar{A}} = E$ mit äquivalenten Normen;

(iv) $\bar{A}$ ist eine Fortsetzung von A, d.h. $\forall x \in D_A$ ist $\bar{A}x = Ax$.

Schließlich sind $\bar{E}$ und $\bar{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Um den B-Raum $\bar{E}$ zu gewinnen, benutzt man die Methode der Vervollständigung. Cantor hat mit diesem Verfahren die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen konstruiert. Dies möchte ich vorab erläutern:

Vervollständigung eines normierten Vektorraums $(F, \|\ \|_F)$, sinnvollerweise nicht vollständig:

Die Gesamtheit aller Cauchy-Folgen $x = (x_n)_n$ in F

bilden einen Vektorraum, sagen wir CF, wenn man

$$x+y := (x_n+y_n)_n \quad \text{und} \quad \lambda x = (\lambda x_n)_n$$

festlegt. Auf CF definiert man die Halbnorm

$$p(x) := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F .$$

Es ist $p(x-y)=0$ g.d.w. $\lim_{n\to\infty} x_n-y_n=0$, auch wenn $x\neq y$, insofern handelt es sich um eine Halbnorm.

Jetzt setzt man $N := \{x\in CF : p(x)=0\}$, bildet den Quotienten $CF/_N =: \bar F$. Seine Elemente sind Äquivalenzklassen $[x]$ von Cauchy-Folgen in F, die sich nur um eine Nullfolge unterscheiden. $\bar F$ wird mit der Quotientennorm ausgestattet, das ist

$$\|[x]\|_{\bar F} := \inf_{x\in[x]} p(x) \overset{\text{hier}}{=} p(x) \quad \forall x\in[x].$$

Auf diese Weise entsteht ein normierter Vektorraum, der sich tatsächlich als vollständig erweist. (!)

Identifiziert man $x_0\in F$ mit der konstanten Folge $x=(x_0,x_0,\dots)\in CF$ bzw. mit der Äquivalenzklasse $[x]=x+N$, so ist $F\subset\bar F$, es gilt $\|x_0\|_F = \lim_{n\to\infty}\|x_0\|_F = p(x) = \|[x]\|_{\bar F}$, die Abb. $x_0\mapsto(x_0,x_0,\dots)+N$ also isometrisch.

Ist $[x]\in\bar F$ und $\varepsilon>0$ vorgegeben, so existiert zu einer Cauchy-Folge $x=(x_m)_m\in[x]$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\|x_m-x_N\|_F<\varepsilon \ \forall m\geq N$. Für $\tilde{x}_N := (x_N,x_N,\dots)+N$ ist dann $\|[x]-\tilde{x}_n\|_{\bar F} \leq p(x-(x_n,x_n,\dots)) < \varepsilon$, also ist

mit der obigen Identifizierung – F dicht in $\bar{F}$.
Ist E ein weiterer B-Raum, in dem F dicht und isometrisch eingebettet ist, so kann die Einbettungsabbildung zu einer Isometrie $\bar{F} \to E$ fortgesetzt werden.

(Bew. der Vollständigkeitsaussage z.B. in: K. Yosida, Functional Analysis, Sec. I.10 "The completion".)

Bew. von Satz 2: Für $x \in E$ setzen wir $|||x||| = \|(I-A)^{-1}x\|_E$.
Da $(I-A)^{-1}: E \to D_A \subset E$ linear und injektiv ist, wird hierdurch eine Norm auf E definiert. Bed. (ii) des Satzes ist dann per def. erfüllt. Nun definiert man $\bar{E}$ als Vervollständigung von $(E, |||\ \ |||)$. Dann ist $\bar{E}$ ein B-Raum und $E \subset \bar{E}$ ein dichter linearer Teilraum, das ist Bed. (i) des Satzes. Aus

$$A(I-A)^{-1} = (A-I+I)(I-A)^{-1} = -I + (I-A)^{-1}$$

folgt für $x \in D_A$

$$|||Ax||| = \|A(I-A)^{-1}x\|_E \le \|x\|_E + \underbrace{\|(I-A)^{-1}x\|_E}_{\le \|x\|_E,\ \text{da } A \text{ dissipativ ist}} \le 2\|x\|_E .$$

D.h.: $A: (E, \|\ \ \|_E) \supset D_A \longrightarrow (\bar{E}, |||\ \ |||)$ ist stetig (und auf einem dichten Teilraum definiert), kann daher fortgesetzt werden zu einem stetigen linearen Operator

$$\tilde{A}: (E, \|\ \ \|_E) \longrightarrow (\bar{E}, |||\ \ |||).$$

Nun definieren wir

$$\bar{A} : E \supset D_{\bar{A}} := E \longrightarrow \bar{E}, \quad \bar{A}x := \tilde{A}x \quad (= Ax \text{ für } x \in D_A).$$

Damit sind auch (iii) und (iv) geklärt, für die Äquivalenz der Normen beachte man

$$\|x\|_E = |||(I-\bar{A})x||| \leq |||x||| + |||\bar{A}x||| \quad (= \|x\|_{D_{\bar{A}}})$$

$$\underset{\text{Rechnung oben}}{\leq} \|x\|_E + 2\|x\|_E \leq 3\|x\|_E .$$

Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie folgt aus der Dichtheit von $D_A \subset E$ und $E \subset \bar{E}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\bar{A}$ m-dissipativ ist.

(a) <u>Dissipativität</u>: Sei $\lambda > 0$, $u \in D_A$ und $v = (I-A)^{-1}u$. Dann ist

$$|||(\lambda I - A)u||| = \|(\lambda I - A)v\|_E \overset{A \text{ dissipativ}}{\geq} \lambda \|v\|_E = \lambda |||u||| .$$

Weil $\tilde{A} : E \to \bar{E}$ die stetige Fortsetzung von A ist, folgt für $u \in E$ ebenfalls

$$\lambda |||u||| \leq |||(\lambda I - \tilde{A})u||| = |||(\lambda I - \bar{A})u|||_{\bar{E}},$$

und damit ist $\bar{A} : \bar{E} \supset D_{\bar{A}} = E \longrightarrow \bar{E}$ dissipativ.

(b) Für die <u>m-Dissipativität</u> reicht es zu zeigen, dass $I - \bar{A} : E \to \bar{E}$ surjektiv ist. Dazu sei $y \in \bar{E}$ gegeben und $(y_n)_n$ eine Folge in $D_{\bar{A}} = E$ mit $\lim_{n\to\infty} |||y - y_n||| = 0$. Wir setzen $u_n = (I-A)^{-1}y_n \in D_A$.

Dann ist

$$\|u_n - u_m\|_E = \|(I-A)^{-1}(y_n - y_m)\|_E = |||y_n - y_m||| \longrightarrow 0 \ (n, m \to \infty),$$

also $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in E und somit konvergent. Sei $u := E\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$. Dann ist $u \in D_{\bar{A}}$ und

$$(I-\bar{A})u = \bar{E}\text{-}\lim_{n\to\infty}(I-\bar{A})u_n = \bar{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Zsf.: $I-\bar{A} : E \to \bar{E}$ ist surjektiv und somit $\bar{A}$ m-dissipativ. □

Da $\bar{A} : \bar{E} \supset D_{\bar{A}} = E \to \bar{E}$ dicht definiert und m-dissipativ ist, erzeugt $\bar{A}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $\bar{E}$, die mit $(\bar{T}(t))_{t\geq 0}$ bezeichnet sei. Für $u_0 \in E$ ist dann $\bar{T}(t)u_0 = T(t)u_0$, denn auf D_A gilt $\bar{A}|_{D_A} = A$, und eine C^0-Halbgruppe ist durch ihren Generator eindeutig festgelegt. Für die Lösung des Cauchy-Problems

$$\frac{du}{dt}(t) = \bar{A}u(t) + f(t), \quad u(0) = u_0 \qquad (\overline{CP})$$

erhalten wir mit (der Folgerung aus) Satz 1:

Folgerung: Es seien $u_0 \in E$, $f \in C([0,T], \bar{E}) \cap L^1((0,T), E)$ und u gemäß (D). Dann ist $u \in C([0,T], E) \cap C^1([0,T], \bar{E})$ die eindeutige (klassische) Lösung von $(\overline{CP})$.

Wenn wir dies weiterentwickeln wollen zu genaueren Aussagen über das ursprüngliche Cauchy-Problem (CP) (mit E und $A: E \supset D_A \to E$ anstelle von $\bar{E}$ und $\bar{A}$, jedoch mit $u_0 \in E$!), so benötigen wir nicht triviale Verschärfungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und eine etwas genauere Charakterisierung des Sobolev-Raumes

Distributionsableitung von F

$$W^{1,1}((0,T),E) := \{ F \in L^1((0,T),E) : \frac{dF}{dt} \in L^1((0,T),E) \}.$$

<u>Hauptsatz, 1. Version:</u> Sei $f \in L^1((0,T),E)$, $t_0 \in [0,T]$ und, für $t \in [0,T]$,

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

Dann ist $F \in W^{1,1}((0,T),E)$ mit $\frac{dF}{dt} = f$ im Distributionssinn. F ist (stetig und) fast überall punktweise diffbar, und es ~~also~~ gilt $\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} f(s)\,ds = f(t)$ für fast alle $t \in (0,T)$

<u>Hauptsatz, 2. Version:</u> ~~[illegible]~~ Ist $F \in W^{1,1}((0,T),E)$, so ist ~~[illegible]~~ F punktweise fast überall differenzierbar mit $\frac{dF}{dt} \in L^1((0,T),E)$, und es gilt für alle $t_0, t \in [0,T]$

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dF}{ds}(s)\,ds.$$

(Auch ~~(In diesem~~ Fall stimmen punktweise und distributionelle Ableitung überein.)

<u>Bem.</u>: (1) Die Funktionen $F \in W^{1,1}((0,T),E)$ können auch als <u>absolut</u> <u>stetige</u> Funktionen charakterisiert

werden. Das bedeutet:

Def.: $F:[a,b]\to E$ heißt absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, so dass für jede Folge $((a_k,b_k))_k$ disjunkter offener Intervalle in $[a,b]$ gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k-a_k<\delta \implies \sum_{k\in\mathbb{N}} \|F(b_k)-F(a_k)\|_E<\varepsilon.$$

Lipschitz-stetige Funktionen sind absolut stetig. Hölder-stetige Funktionen zum Exponenten $\alpha\in(0,1)$ im Allgemeinen nicht.

(2) Bereits im Fall $E=\mathbb{R}$ sind diese Aussagen nicht einfach zu beweisen und gehen über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus. Einen elementaren Beweis finden Sie im Band III der "Einführung..." von Kaballo. Einen Bew. der "1. Version" mit Methoden der "Harmonischen Analysis" bietet Grafakos (Classical Fourier Analysis, Abschnitt 2.1.3). Für die vektorwertige Formulierung: Cazenave, Haraux; Prop. 1.4.29, Thm. 1.4.35.

Damit ausgestattet, behandeln wir wieder zuerst die einfache Aufgabe, die Implikation (CP) $\Rightarrow$ (D), unter schwächeren Voraussetzungen.

Lemma 3: Es seien $u_0\in E$, $f\in L^1((0,T),E)$ und $u\in L^1((0,T),D_A)\cap W^{1,1}((0,T),E)$ eine (sog. starke) Lösung von

$$u(0)=u_0,\qquad \frac{du}{dt}(t)=Au(t)+f(t)\ \text{für fast alle } t\in[0,T].$$

Dann ist $u(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$ (D)

Bem.: Da $u \in W^{1,1}((0,T),E)$ vorausgesetzt ist, ist u stetig, und die Aussage $u(0)=u_0$ macht Sinn. (I) ist für alle $t \in [0,T]$ erfüllt.

Bew. Wie im Bew. von Lemma 1 setzen wir für $0 \le s \le t$

$$w(s) = T(t-s)u(s).$$

Dann ist $w \in W^{1,1}((0,t),E)$, denn für $s_0 \in [0,t]$ mit $u(s_0) \in D_A$ haben wir nach HS, V2, angewandt auf $u \in W^{1,1}((0,T),E)$

$$w(s) = T(t-s)u(s) = T(t-s)\int_{s_0}^{s} \frac{du}{dr}(r)\,dr + T(t-s)u(s_0)$$

$$= \underbrace{\int_{s_0}^{s} T(t-s)\frac{du}{dr}(r)\,dr}_{\in W^{1,1}((0,t),E),\ HS,\ V1} + \underbrace{T(t-s)u(s_0)}_{\in C^1([0,t],E) \subset W^{1,1}((0,t),E)} \Rightarrow w \in W^{1,1}((0,t),E)$$

Ferner folgt aus der ersten Darstellung, dass

$$w(s+h) - w(s) = T(t-s-h)\int_{s_0}^{s+h} \frac{du}{dr}(r)\,dr - T(t-s)\int_{s_0}^{s}\frac{du}{dr}(r)\,dr$$

$$+ (T(t-s-h) - T(t-s))u(s_0)$$

$$= T(t-s)\int_{s}^{s+h} \frac{du}{dr}(r)\,dr + (T(t-s-h)-T(t-s))\underbrace{\left(\int_{s_0}^{s+h}\frac{du}{dr}(r)\,dr + u(s_0)\right)}_{=u(s+h)}$$

Also gilt für diejenigen s, für die u diffbar und $u(s) \in D_A$ ist (und das sind fast alle)

$$\frac{dw}{ds}(s) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(w(s+h) - w(s))$$

$$= T(t-s)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{s}^{s+h}\frac{du}{dr}(r)\,dr + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(t-s-h)-T(t-s))u(s)$$

$$\underset{\text{Hauptsatz V1}}{=} T(t-s)\left(\frac{du}{ds}(s) - Au(s)\right) \underset{\text{Dgl.}}{=} T(t-s)f(s)$$

Da wir $w \in W^{1,1}((0,t),E)$ geklärt haben, ist die 2. Version des Hauptsatzes anwendbar und ergibt

$$w(t) - w(0) = \int_0^t \frac{dw}{ds}(s)\,ds = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

bzw.

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\,, \quad \text{also } (D). \qquad \square$$

Folgerung: $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T),E) \Rightarrow$ Es gibt höchstens eine starke Lösung $u \in L^1(D_A) \cap W^{1,1}(E)$ von (CP).

Für die Implikation $(D) \Rightarrow (CP)$ können wir im Kontext „starker Lösungen" folgendes zeigen:

Satz 3: Es seien $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T),E)$ und u gemäß (D). Darüber hinaus gelte

$$(i)\ u \in L^1((0,T),D_A) \quad \text{oder} \quad (ii)\ u \in W^{1,1}((0,T),E).$$

Dann ist $u \in L^1((0,T),D_A) \cap W^{1,1}((0,T),E)$ und löst

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \text{ für fast alle } t \in [0,T].$$

Bem.: Nach Lemma 2 gelten $u(0) = u_0$ und $u \in C([0,T],E)$ bereits ohne die Voraussetzungen (i) bzw. (ii).

Bew.: Zu $f \in L^1((0,T),E)$ wählen wir eine Folge $(f_n)_n$ in $C([0,T],E)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1((0,T),E)} = 0$ und definieren

$$u_n(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\,ds.$$

Dann gilt nach der Folgerung aus Satz 2 (betreffend das Cauchy-Problem $(\overline{CP})$, S. 4.14 unten):

$u_n \in C([0,T],E)\cap C^1([0,T],\bar{E})$ und

$$u_n(0) = u_0, \quad \frac{du_n}{dt}(t) = \bar{A}u_n(t) + f(t) \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Integration der Dgl. unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung ergibt

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t \underbrace{\bar{A}u_n(s)}_{\in \bar{E}} + f(s)\,ds, \qquad (*_n)$$

das ist ein $\bar{E}$-wertiges Integral. Nach Lemma 2 gilt

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_n(t)-u(t)\|_E \le \|f_n - f\|_{L^1((0,T),E)} \to 0 \ (n\to\infty)$$

und daher auch $\qquad \|\ \|_{\bar{E}} = |||\ |||$

$$\sup_{0\le t\le T} \|\bar{A}u_n(t) - \bar{A}u(t)\|_{\bar{E}} \le \sup_{0\le t\le T} \|u_n(t)-u(t)\|_E \to 0 \ (n\to\infty),$$

also $\lim_{n\to\infty} \bar{A}u_n = \bar{A}u$ bzgl. glm. Konvergenz in $\bar{E}$.

Grenzübergang $n\to\infty$ in $(*_n)$ bezüglich $|||\ ||| = \|\ \|_{\bar{E}}$ ergibt

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \bar{A}u(s) + f(s)\,ds,$$

wobei $\bar{A}u \in C([0,T],\bar{E}) \subset L^1((0,T),\bar{E})$ und $f\in L^1((0,T),E) \subset L^1((0,T),\bar{E})$, so dass der Integrand in $L^1((0,T),\bar{E})$ liegt. Nach der ersten Version des Hauptsatzes ist $u \in W^{1,1}((0,T),\bar{E})$ und es gilt

$$\frac{du}{dt}(t) = \bar{A}u(t) + f(t) \quad \text{für fast alle } t\in[0,T].$$

Erst jetzt machen wir Gebrauch von den Voraussetzungen (i)/(ii) an u:

<u>Fall (i)</u>, <u>$u \in L^1((0,T), D_A)$</u>: In diesem Fall ist $\bar{A}u(t) = Au(t)$ für fast alle $t \in [0,T]$ und die Integralgleichung geht über in

$$u(t) = u_0 + \int_0^t Au(s) + f(s)\,ds$$

mit einem Integranden in $L^1((0,T), E)$. Nach dem Hauptsatz V1 also $u \in W^{1,1}((0,T), E)$ und

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{fast überall.}$$

<u>Fall (ii)</u>, <u>$u \in W^{1,1}((0,T), E)$</u>: $u, u_0, t \mapsto \int_0^t f(s)\,ds \in W^{1,1}((0,T), E)$
$\Rightarrow t \mapsto \int_0^t \bar{A}u(s)\,ds \in W^{1,1}((0,T), E)$. Die 2. Version des Hauptsatzes liefert $\bar{A}u \in L^1((0,T), E)$, insbesondere $\bar{A}u(t) \in E$ für fast alle $t \in [0,T]$. Hieraus folgt, dass $u(t) \in D_A$ ist (für diese t), denn:

$$y := (I-A)^{-1}\bar{A}u(t) \in D_A$$

$$\Rightarrow D_A \ni y - (I-A)^{-1}u(t) = (I-A)^{-1}(\bar{A}u(t) - u(t)) = -u(t).$$

Damit lautet die Dgl. wie behauptet

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{f.ü.,}$$

wobei $Au \in L^1((0,T), E)$ ist, d.h. $u \in L^1((0,T), D_A)$.

$\square$

<u>Fazit:</u> Bei schwachen Regularitäten von u_0 und f wird die Äquivalenz von (CP) und (D) recht schwierig. Dies führt zu sukzessiven Abschwächungen des Lösungs- und Wohlgestelltheitsbegriffs: Von "klassischen" über "starke" Lösungen (Sätze 1 und 3) zu "schwachen Lösungen", bei denen die Ableitung nur als Distributionsableitung aufgefasst wird. Am Ende stehen meist "milde" Lösungen, das sind Lösungen $u \in C([0,T], E)$ der Integralgleichung (D).

Verschaffen wir uns nochmal einen Überblick über das Gezeigte:

Lösungstyp / Implikation	klassisch	stark
(CP) $\Rightarrow$ (D)	Lemma 1: $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T],E)$; $u \in C([0,T],D_A) \cap C^1([0,T],E)$ mit $u(0)=u_0$, $\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t)$ $\forall t \in [0,T]$.	Lemma 3: $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T),E)$; $u \in L^1((0,T),D_A) \cap W^{1,1}((0,T),E)$ mit $u(0)=u_0$, $\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t)$ f.ü.
	Dann gilt $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$ (D)	
(D) $\Rightarrow$ (CP)	Satz 1: $u_0 \in D_A$, $f \in C([0,T],E)$ und u gemäß (D). Ferner (i) $u \in C([0,T],D_A)$ $\vee$ (ii) $u \in C^1([0,T],E)$.	Satz 3: $u_0 \in E$, $f \in L^1((0,T),E)$ und u gemäß (D). Ferner (i) $u \in L^1((0,T),D_A)$ $\vee$ (ii) $u \in W^{1,1}((0,T),E)$.
	Dann ist u in $\cap$ der jeweiligen Räume und löst (CP)	
	für alle $t \in [0,T]$	für fast alle $t \in [0,T]$
	Folgerung: (i) und damit die Aussage des Satzes gelten, wenn $f \in C([0,T],E) \cap L^1((0,T),D_A)$	(Es sei denn, man setzt wieder $u_0 \in D_A$, $f \in L^1_T(D_A)$ voraus.)

4.21 Laske