3.2 Die Stokes-Gleichung auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Nah verwandt mit der Wärmeleitungsgleichung aber etwas komplizierter ist die Stokes-Gleichung

$$\underbrace{\frac{du}{dt} - \Delta u + \nabla p = 0}_{n \text{ Gleichungen}} \quad ; \quad \underbrace{\operatorname{div} u = 0}_{\text{eine Gleichung}} \quad ;$$

bei der es sich eigentlich um ein System aus $n+1$ PDgln. für $n+1$ unbekannte Funktionen von $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ handelt. Gesucht sind

$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supset \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ein zeitabhängiges Geschwindigkeit- oder "Strömungs"-feld (n Unbekannte) und

$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supset \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$, die Druckverteilung (ein Skalarfeld, eine Unbekannte)

Ausgeschrieben lauten die ersten n Gleichungen

$$\frac{du_1}{dt} - \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{du_n}{dt} - \Delta u_n + \frac{\partial p}{\partial x_n} = 0 \ ,$$

insofern sollte man den Laplace-Operator ggf. als Matrix-Differentialoperator $\Delta = \Delta \cdot E_n$ mit der $n \times n$-~~Einheits~~ Einheitsmatrix E_n auffassen.

Die Stokes-Gleichung ist der lineare Teil der berühmten Navier-Stokes-Gleichung, bei der auf der linken

Seite der ersten n Gleichungen noch der quadratische Term

$$(u\cdot\nabla)u = \left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)u$$

bzw. in Komponenten $((u\cdot\nabla)u)_k = (u\cdot\nabla)u_k$ hinzukommt.

Bei der Modellbildung wird die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen, daher kommt die Gleichung $\operatorname{div} u = 0$. (Positive Divergenz eines Vektorfeldes bedeutet eine Quelle, negative D. eine Senke.)

Nimmt man ferner an, dass die Flüssigkeit am Rand $\partial\Omega$ des Gebietes haftet, wird man auf die Dirichlet Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ geführt.

Um Eindeutigkeit zu erzielen benötigt man schließlich noch eine Cauchy-Bedingung: $u(t=0) = u_0 \in D$ (=Datenraum). Damit ist ein Cauchy-Problem vollständig formuliert, (wie wir z.T. erst noch sehen werden).

Um die Halbgruppentheorie anwenden zu können, müssen wir dem gerade formulierten Problem einen Operator A und insbes. einen Definitionsbereich D_A geeignet zuordnen, wobei D_A zugleich als Datenraum dienen sollte. D_A sollte zum einen die Dirichlet Randbedingung respektieren und zum anderen die $n+1$-ste Gleichung $\operatorname{div} u = 0$, denn wenn wir eine Lösung $u \in C^0([0,T], C^1(\mathbb{R}^n))$ haben, gilt

$$0 = \operatorname{div} u(t) \xrightarrow[t>0]{} \operatorname{div} u_0,$$

so dass unser Datenraum bzw. D_A nur divergenzfreie Felder enthalten sollte.

Def.: Man setzt

$$C^\infty_{c,\sigma}(\Omega) := \{ u \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} u = 0 \}$$

und $$L^2_\sigma(\Omega) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\| \ \|_{L^2}}$$ sowie

$$H^1_{0,\sigma}(\Omega) := \overline{C^\infty_{c,\sigma}(\Omega)}^{\| \ \|_{H^1}}.$$

Bem.: (1) Für ein Vektorfeld $u = (u_1, \dots, u_n)$ ist die L^2-Norm gegeben durch $\|u\|^2_{L^2} = \sum_{j=1}^n \|u_j\|^2_{L^2} = \sum_{j=1}^n \int_\Omega |u_j(x)|^2 dx$

und entsprechend die H^1-Norm.

(2) $L^2_\sigma(\Omega)$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und somit ein Hilbertraum.

(3) $G_2 := \{ \nabla q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) : q \in L^1_{loc}(\Omega) \} \subset (L^2_\sigma(\Omega))^\perp$,

denn ist $u \in L^2_\sigma(\Omega)$ und $(u_k)_k$ eine Folge in $C^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ mit $L^2\text{-}\lim u_k = u$, so gilt

$$\langle u, \nabla p \rangle_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, \nabla p \rangle_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_\Omega (u_k)_j(x) \frac{\partial p}{\partial x_j}(x) \, dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} - \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (u_k)_j(x) \, p(x) \, dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} - \int_\Omega \operatorname{div} u_k(x) \cdot p(x) \, dx = 0$$

(4) Man kann sogar zeigen, dass $G_2 = (L^2_\sigma(\Omega))^\perp$ ist.
Die Zerlegung $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) = L^2_\sigma(\Omega) \oplus_\perp G_2$ von $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ in die genannten orthogonalen Unterräume heißt Helmholtz-Zerlegung von $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

<u>Def.</u>: Die orthogonale Projektion $P_\Omega : L^2(\Omega,\mathbb{R}^n) \to L^2_\sigma(\Omega)$ mit $\ker(P_\Omega) = G_2$ heißt <u>Helmholtz-Projektion</u>.

Erläuterung: (1) Eine Projektion in einem Vektorraum V ist eine lineare Abbildung $P: V \to V$ mit $P^2 = P$.
(2) Eine orthogonale Projektion $P: H \to H$ in einem Hilbertraum H ist eine Projektion mit $\ker(P) \perp R(P)$.
Es gelten:
(i) Eine Projektion in einem H-Raum ist orthogonal genau dann, wenn sie selbstadjungiert ist.
(ii) Zu jedem abgeschlossenen Untervektorraum F eines Hilbertraums existiert eine orthogonale Projektion $P: H \to H$ mit $R(P) = F$ und $\ker(P) = F^\perp$.
(Satz von der o. Projektion, beruht auf der Vollständigkeit von H.)

(iii) Darstellung als Matrix-wertiger Fourier-Multiplikator im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ oder $\Omega = (-\pi,\pi)^n$: Für $k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$

$$\hat{u}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\Omega e^{-ik\cdot x} u(x)\,dx$$

(Vektor mit n Komponenten)

• $\mathbb{R}^n$-Skalarprodukt

$$\widehat{\operatorname{div} u}(k) = i\,k \cdot \hat{u}(k)$$

$$\widehat{P_\Omega u}(k) = \hat{u}(k) - \frac{(k \cdot \hat{u}(k))}{|k|^2} \cdot k$$

Bei festem k: Man subtrahiert gerade die Projektion auf $\mathbb{C} \cdot \frac{k}{|k|}$, die dem Divergenzanteil von u entspricht.

Ausgeschrieben als matrixwertiger Fouriermultiplikator:

$$\begin{pmatrix} | \\ \widehat{P_u}(k) \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{k_1^2}{|k|^2} & -\frac{k_1k_2}{|k|^2} & \cdots & -\frac{k_1k_n}{|k|^2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{k_nk_1}{|k|^2} & \cdots & \cdots & 1-\frac{k_n^2}{|k|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \hat{u}(k) \\ | \end{pmatrix}$$

Zurück zur Stokes-Gleichung $\frac{du}{dt} = \Delta u - \nabla p$. Hier können wir ∇p (vorübergehend) aus der Gleichung entfernen und die einfachere Gleichung $\frac{du}{dt} = P_\Omega \Delta u$ lösen und anschließend (für dann bekanntes u) ∇p so bestimmen, dass

$P_\Omega \Delta u = \Delta u - \nabla p$, d.h. so dass $\nabla p = (I - P_\Omega)\Delta u$.

Letzteres gelingt tatsächlich unter der Voraussetzung, dass $\partial\Omega$ gleichmäßig C^2 ist.

Für die Halbgruppentheorie zugänglich ist jetzt das reduzierte Problem

$$\frac{du}{dt} = A_{0,\sigma} u, \qquad u(t=0) = u_0 \in D_{A_{0,\sigma}} \quad (\text{oder } \in L^2_\sigma(\Omega))$$

wobei der Operator $A_{0,\sigma}$ gegeben ist durch

$$A_{0,\sigma} : L^2_\sigma(\Omega) \supset D_{A_{0,\sigma}} \longrightarrow L^2_\sigma(\Omega), \qquad u \mapsto A_{0,\sigma} u := P_\Omega \Delta u$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_{A_{0,\sigma}} := \{ f \in H^1_{0,\sigma}(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \}$$

ohne σ !

Satz 1: Der Operator $A_{0,\sigma}$ ist abschließbar, es gibt eine abgeschlossene Erweiterung A_σ von $A_{0,\sigma}$, die eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^2_\sigma(\Omega)$ erzeugt.

Bem.: (1) Der Operator A_σ wird als Stokesoperator bezeichnet. Er ist (wie der Beweis zeigen wird) selbstadjungiert und ≤ 0.

(2) Das Cauchy-Problem $\frac{du}{dt} = A_\sigma u$, $u(t=0) = u_0 \in D_{A_\sigma}$ ist klassisch wohlgestellt. Satz 2 aus Abschnitt 3.1 ist auf dieses Problem ebenfalls anwendbar.

Bew.: $A_{0,\sigma}$ ist dicht definiert (es ist nämlich $C^\infty_{c,\sigma}(\Omega) \subset D_{A_{0,\sigma}}$ und $C^\infty_{c,\sigma}(\Omega)$ ist dicht in $L^2_\sigma(\Omega)$).

Für $u \in D_{A_{0,\sigma}}$ gilt wg. der Selbstadjungiertheit ($\hat{=}$ Orthogonalität) von P_Ω

$$\langle A_{0,\sigma} u, u\rangle_{L^2} = \langle P_\Omega \Delta u, u\rangle_{L^2} = \langle \Delta u, P_\Omega u\rangle$$

$$= \langle \Delta u, u\rangle_{L^2} = -\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq 0$$

(Hierbei ist $\|\nabla u\|^2_{L^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right|^2 dx$. Die "partielle Integration" wurde bereits oben durch Approx. gerechtfertigt.)

Also ist $A_{0,\sigma} \leq 0$ und insbes. dissipativ und daher abschließbar.

Die obige Rechnung mit $v \in H^1_{0,\sigma}$ anstelle von u in der zweiten Komponente des Skalarprodukts ergibt

$$\langle (I - A_{0,\sigma}) u, v\rangle_{L^2} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} = \langle u, v\rangle_{H^1}.$$

Nun ist $(H^1_{0,\sigma}(\Omega), \langle\,,\,\rangle_{H^1})$ ein Hilbertraum, und für jedes $f \in L^2_\sigma(\Omega)$ die Abbildung

$$y_f : H^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C},\ v \mapsto y_f[v] := \langle v, f\rangle_{L^2}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $H^1_{0,\sigma}(\Omega)$, so dass nach Riesz ein $u_f \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ existiert, so dass

$$\langle v, u_f\rangle_{H^1} = \langle v, f\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1_{0,\sigma}(\Omega).$$

Da wir aber nur mit divergenzfreien Feldern v testen, können wir nicht auf die Dgl. $(I-\Delta)u = f$ für u_f schließen und darum muss u_f nicht in $D_{A_{0,\sigma}}$ liegen. Daher müssen wir unseren Operator $A_{0,\sigma}$ etwas anpassen:

Man definiert

$$D_{A_\sigma} := \{u \in H^1_{0,\sigma}(\Omega) : \exists f \in L^2_\sigma(\Omega)\ \forall v \in H^1_{0,\sigma}(\Omega) : \langle \nabla v, \nabla u\rangle_{L^2} = -\langle v, f\rangle_{L^2}\}$$

und $A_\sigma u := f$.

Da $H^1_{0,\sigma}(\Omega) \subset L^2_\sigma(\Omega)$ dicht ist, gibt es zu $u \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ höchstens ein solches f, daher ist A_σ wohldef.

Nun ist $y_f : H^1_{0,\sigma}(\Omega) \to \mathbb{C},\ v \mapsto y_f[v] := \langle v, f\rangle_{L^2}$ für jedes $f \in L^2_\sigma(\Omega)$ ein stetiges lineares Funktional, nach Riesz $\exists_1\ u_f \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ mit

$$\langle v, f\rangle_{L^2} = \langle v, u_f\rangle_{H^1} = \langle v, u_f\rangle_{L^2} + \langle \nabla v, \nabla u_f\rangle_{L^2} \quad \forall v \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$$

2. Gleichung zeigt: $\qquad = \langle v, u_f\rangle_{L^2} - \langle v, A_\sigma u_f\rangle$

$u_f \in D_{A_\sigma}$

Damit gilt in $L^2_\sigma(\Omega)$ die Gleichung $f = (I - A_\sigma)u_f$.

Da $f \in L^2_\sigma(\Omega)$ beliebig vorgegeben war, ist also

$$(I - A_\sigma) : D_{A_\sigma} \to L^2_\sigma(\Omega) \quad \text{surjektiv}$$

Ferner ist für $u \in D_{A_\sigma}$:

$$\langle A_\sigma u, u \rangle_{L^2} \overset{\text{Def.}}{=} - \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2} \leq 0,$$

also A_σ dissipativ.

Für $u \in D_{A_{\sigma,0}}$ haben wir $A_{0,\sigma} u = P_\Omega \Delta u$ und daher

$$\langle A_{0,\sigma} u, v \rangle = \langle \Delta u, v \rangle = - \langle \nabla u, \nabla v \rangle \quad \forall v \in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$$

Das bedeutet aber nach Definition von D_{A_σ} und A_σ, dass $A_{0,\sigma} \subset A_\sigma$ ist.

Fazit: A_σ ist eine m-dissipative Fortsetzung von $A_{0,\sigma}$ und erzeugt nach Lumer-Phillips eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^2_\sigma(\Omega)$, wie behauptet. □