3. Anwendungen und Ergänzungen

3.1 Die Wärmeleitungsgleichung auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Hier betrachten wir das Cauchy-Problem mit Dirichlet-Randbedingungen für die WLG, d.h.

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \Omega \times [0,\infty) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{auf } [0,\infty) \\ u(t=0) &= u_0 \in \mathcal{D} \quad \text{in } \Omega \end{aligned}\right\} \quad (CP)$$

Dirichlet Randbed. $\to u|_{\partial\Omega} = 0$

wobei $\mathcal{D}$ allgemein für Datenraum steht. Im ersten Teil unter suchen wir (CP) für einen dichten Teilraum $\mathcal{D}$ von $L^2(\Omega)$. Um dieses konkrete Problem der allgemeinen Theorie zugänglich zu machen, definieren wir den Operator

$$A : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}_A \longrightarrow L^2(\Omega), \quad u \mapsto Au = \Delta u$$

(Δ = Laplace-Operator, als schwache bzw. Distributionsableitungen aufzufassen) mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_A := \{ u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \}$$

wobei $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\ \|_{H^1}}$ der Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2$$

ist. Auf diese Weise wird die Dirichlet-Randbedingung zumindest in schwacher Form durch Auswahl des Operators A berücksichtigt. (Wenn man ein Ergebnis erreicht hat, kann man anschließend fragen, in welchem Sinn die Randbedingung erfüllt ist. Das hängt zweifellos von der Raumdimension und der Regularität des Randes ab.)

Satz 1: Der oben definierte Operator A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$. Das Anfangs-Randwert-Problem (CP) ist klassisch wohlgestellt im folgenden Sinn: Zu jedem $u_0 \in D_A$ existiert genau eine Lösung

$$u \in C([0,\infty), D_A) \cap C^1([0,\infty), L^2(\Omega))$$

von $u_t = \Delta u$ mit $u(0) = u_0$.

Bew.: Nach Satz 2 in Abschnitt 2.1 reicht es, die Voraussetzungen (z. B.) des Satzes von Lumer-Phillips zu überprüfen:

- Da $C_c^\infty(\Omega) \subset D_A$ nach Definition und $C_c^\infty(\Omega)$ dicht ist in $L^2(\Omega)$, ist A dicht definiert.
- Um die Dissipativität von A zu überprüfen, wählen wir eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}^{(*)} u_k = u \in D_A$. ($u \in D_A$ beliebig vorgegeben). Dann erhalten wir

(*) mit Konvergenz bezüglich der H^1-Norm!

$$\langle Au, u\rangle_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \langle Au, u_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Delta u(x)\, \overline{u_k}(x)\, dx$$

partielle Integration $= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \underbrace{\nabla u(x)\, \overline{\nabla u_k(x)}}_{=\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x)}} dx = -\|\nabla u\|_2^2 \leq 0.$

(Die Betrachtung des Realteils erübrigt sich hier, da $\langle Au, u\rangle$ bereits reell ist. – Da $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, ist das Subdifferential eindeutig.)

- Bleibt zu zeigen, dass $\lambda_0 > 0$ existiert, so dass

$$\lambda_0 I - A : D_A \to L^2(\Omega)$$

surjektiv ist. Dazu wählen wir $\lambda_0 = 1$.

Ist nun $f \in L^2(\Omega)$ gegeben, so suchen wir $u \in D_A$, so dass

$$(I-A)u = (I-\Delta)u = f$$

$\Leftrightarrow \quad \langle (u-\Delta u), g\rangle_2 = \langle f, g\rangle_2 \quad \forall g \in L^2(\Omega)$

$\Leftrightarrow \quad \langle (u-\Delta u), g\rangle_2 = \langle f, g\rangle_2 \quad \forall g \in C_c^\infty(\Omega)$ oder $\in H_0^1(\Omega)$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\langle u, g\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla g\rangle_2}_{= \langle u, g\rangle_{H^1}} = \langle f, g\rangle_2 \quad \forall g \in H_0^1(\Omega)$

Wir definieren das lineare Funktional

$$y_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C},\quad g \mapsto \langle f, g\rangle_{L^2} =: y_f[g]$$

Dann ist $|y_f[g]| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_{H_2^1}$,

d.h. y_f ist stetig. Nach dem Satz von Riesz existiert ein $u_f \in H_0^1(\Omega)$ mit $y_f[g] = \langle u_f, g\rangle_{H^1}$ $\forall g \in H_0^1(\Omega)$

wie gefordert. Nun genügt u_f im Distributionssinn der Gl.

$$u - \Delta u = f,$$

und da $f, u_f \in L^2(\Omega)$ sind, folgt $\Delta u_f \in L^2(\Omega)$ und also $u_f \in D_A$. $\square$

Zur Überprüfung der Surjektivität von $I - A : D_A \to L^2(\Omega)$ konnten wir oben den Rieszschen Darstellungssatz (für stetige lineare Funktionale auf dem Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$) verwenden. Das hat funktioniert, weil $\langle u, (I-\Delta)u\rangle_2$ nach partieller Integration exakt $\|u\|_{H^1}^2$ ergibt. Will man allgemeinere Operatoren betrachten, etwa

$$A = \operatorname{div}(a\nabla) \quad \text{mit} \quad a \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ und}$$
$$a(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

benötigt man eine Verallgemeinerung. Dazu zunächst:

<u>Def.</u>: H und G seien Hilberträume. Eine Sesquilinearform ist eine Abbildung $B : H \times G \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(1) $B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x,z) + \mu B(y,z) \quad \forall x,y \in H, z \in G, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(2) $B(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda} B(x,y) + \overline{\mu} B(x,z) \quad \forall x \in H, y,z \in G, \lambda,\mu \in \mathbb{C}.$

<u>Bem.</u> (1) Sprechweise: B ist linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente.

(2) B ist stetig g.d.w. ein $C > 0$ existiert, so dass

$|B(x,y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \forall x \in H, y \in G.$

Def.: Eine Sesquilinearform $B : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt positiv (oder auch koerziv), wenn ein $\gamma > 0$ existiert, so dass

$$B(x,x) \geq \gamma \, \|x\|^2 \qquad \forall x \in H$$

Satz (v. Lax-Milgram) Es sei H ein Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{C}$ eine stetige und positive Sesquilinearform. Dann gibt es zu jedem $y \in H'$ genau ein $\xi \in H$, so dass $\quad y[x] = B(x, \xi) \quad \forall x \in H.$

Beweis: Wir fixieren $z \in H$ und setzen

$$L_z[x] := B(x, z).$$

Dann ist $L_z : H \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf H. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein $\eta = \eta(z) \in H$, so dass

$$B(x, z) = L_z[x] = \langle x, \eta(z) \rangle \qquad \forall x \in H.$$

Nun hängt η linear und stetig von z ab, denn sowohl B als auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind antilinear in der zweiten Komponente, und setzen wir $\eta(z) =: Tz$, so haben wir

$$\|Tz\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x, Tz \rangle| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\| \leq 1}} |B(x, z)|$$

$$\leq C \, \|z\|,$$ und das ist die Stetigkeit von T.

Ferner haben wir

$$\gamma \|z\|^2 \leq B(z,z) = \langle z, Tz \rangle \leq \|z\| \, \|Tz\| ,$$

also $\|Tz\| \geq \gamma \|z\|$ und damit ist T injektiv.

Nehmen wir an, T sei nicht surjektiv, so existiert ein $x \neq 0$, für das $\langle x, Tz \rangle = 0 \quad \forall z \in H$. Für $z = x$ folgt

$$0 = \langle x, Tx \rangle = B(x,x) \geq \gamma \|x\|^2 > 0 ,$$

und das ist ein Widerspruch.

Also ist $T \in L(H)$ bijektiv mit inverser $T^{-1} \in L(H)$ (setze oben $z = T^{-1}x$ ein!).

Nun sei y ein stetiges lineares Funktional auf H. Dann gibt es nach Riesz ein $\eta \in H$, so dass $\forall x \in H$

$$y[x] = \langle x, \eta \rangle = \langle x, T(T^{-1}\eta) \rangle = B(x, T^{-1}\eta) .$$

Mit der Wahl $\xi = T^{-1}\eta$ folgt die Beh.

Bem.: Von der Sesquilinearform B ist nicht vorausgesetzt, dass sie hermitesch ist, d.h. dass $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ gilt, was bedeuten würde, dass $B(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist, was eine zur gegebenen äquivalente Norm erzeugt. Insofern handelt es sich tatsächlich um eine Verallgemeinerung.

(Anwendung ggf. in der Übung.)

Im Beweis von Satz 1 haben wir für den Laplace-Operator

$$A : H := L^2(\Omega) \supset D_A \longrightarrow H, \quad f \mapsto Af := \Delta f$$

mit Definitionsbereich $D_A := \{ f \in H_0^1(\Omega) : \Delta f \in L^2(\Omega) \}$

gezeigt: (1) A ist dicht definiert;

(2) A ist nicht-positiv (kurz: $A \leq 0$), d.h. für alle $f \in D_A$ ist $\langle Af, f \rangle \leq 0$, und damit auch dissipativ;

(3) $I - A : D_A \to H$ ist surjektiv und damit A m-dissipativ.

Mit Lumer-Phillips konnten wir dann darauf schließen, dass A eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt und das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingung klassisch wohlgestellt ist. Ich möchte die oben dargestellte Situation verallgemeinern, dabei die Voraussetzungen lediglich mit den Begriffen "selbstadjungiert" und "≤ 0" formulieren, und die Aussage des Satzes deutlich verschärfen. Dazu überlegen wir zunächst:

<u>Beh.</u>: (1) – (3) sind genau dann erfüllt, wenn A selbstadjungiert und ≤ 0 ist.

<u>Bew.</u>: Zunächst zur Implikation (1) – (3) $\Longrightarrow A = A^* \leq 0$.

Aus (1) ergibt sich, dass A^* und damit die Begriffe "symmetrisch" ($A \subset A^*$) und "selbstadjungiert" ($A = A^*$) für A wohldefiniert sind. Aus (2) folgt nun insbesondere, dass für alle $f \in D_A$ gilt $\langle Af, f\rangle \in \mathbb{R}$ und damit $\forall f, g \in D_A$

$$\mathbb{R} \ni \langle A(f+g), f+g\rangle = \underbrace{\langle Af, f\rangle}_{\in \mathbb{R}} + \langle Af, g\rangle + \langle Ag, f\rangle + \underbrace{\langle Ag, g\rangle}_{\in \mathbb{R}}$$

Damit ist $\langle Af, g\rangle + \langle Ag, f\rangle$ reell und

$$\operatorname{Im} \langle Af, g\rangle = -\operatorname{Im} \langle Ag, f\rangle = \operatorname{Im} \langle f, Ag\rangle$$

Ersetzen wir hierin f durch $if \in D_A$, so folgt

$$\operatorname{Re} \langle Af, g\rangle = \operatorname{Im} i\langle Af, g\rangle = \operatorname{Im} \langle A(if), g\rangle$$

$$= \operatorname{Im} \langle if, Ag\rangle = \operatorname{Re} \langle f, Ag\rangle .$$

Damit ist gezeigt, dass A symmetrisch ist.

Um einzusehen, dass $A = A^*$ gilt, zeigen wir

<u>Lemma</u> 1: Ein symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H ist selbstadjungiert, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $\lambda I - A$ und $\bar{\lambda} I - A : D_A \to H$ surjektiv sind.

<u>Bem.</u>! (i) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist akzeptabel, in diesem Fall reduziert sich die Bedingung auf $\lambda I - A : D_A \to H$ ist surjektiv, was in (3) für $\lambda = 1$ vorausgesetzt ist.

(ii) Umgekehrt kann man zeigen: Ist A selbstadjungiert, so ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\lambda I - A : D_A \to H$ bijektiv mit stetiger Inverser, also $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Von dieser Aussage mache ich aber zumindest in diesem Abschnitt keinen Gebrauch (Lit.: Werner, D.: Funktionalanalysis, Satz VII.2.16)

Bew. des Lemmas: Es ist nur $D_{A^*} \subset D_A$ zu zeigen, und dazu sei $y \in D_{A^*}$. Dann gilt für alle $x \in D_A$

$$\langle (\lambda I - A)x, y \rangle = \langle x, (\bar{\lambda} I - A^*) y \rangle$$

Nun ist n. V. $(\bar{\lambda} I - A) : D_A \to H$ surjektiv, also existiert ein $z \in D_A$, so dass $(\bar{\lambda} I - A) z = (\bar{\lambda} I - A^*) y$. Einsetzen gibt

$$\langle (\lambda I - A)x, y \rangle = \langle x, (\bar{\lambda} I - A) z \rangle \underset{\substack{A \text{ symmetrisch,} \\ \text{d.h. } \langle Ax, z\rangle = \langle x, Az\rangle \ \forall x, z \in D_A}}{=} \langle (\lambda I - A)x, z \rangle .$$

Nach Vor. ist aber auch $\lambda I - A : D_A \to H$ surjektiv und damit $\langle u, y - z \rangle = 0 \ \forall u \in H$. Es folgt $y = z \in D_A$.

Mit dem Beweis des Lemmas ist die Richtung "$\Longrightarrow$" gezeigt.

Umgekehrt sei A selbstadjungiert und ≤ 0. Dann ist A dicht definiert und aus $\langle Af, f \rangle \le 0 \ \forall f \in D_A$ folgt $\langle (I - A) f, f \rangle \ge \|f\|^2$, also $I - A$ ist injektiv. Damit folgt $\{0\} = \ker(I - A) = R(I - A^*)^{\perp} = R(I - A)^{\perp}$. Also hat $I - A$ dichtes Bild. Nach der zweiten Version von Lumer-Phillips erzeugt $A = \bar{A}$ eine Kontraktions-

Halbgruppe, und nach der ersten Version ist A m-dissipativ, und damit ist auch (3) erfüllt.

Als Ergebnis dieser Überlegungen können wir festhalten:

Satz 1': Es sei $A \leq 0$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H. Dann erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe auf H und das Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt} = Au \quad , \quad u(0) = u_0 \in D_A$$

ist klassisch wohlgestellt.

Dieser Satz erlaubt die folgende Verschärfung, die dann auch auf das CP für die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen zutrifft:

Satz 2: Sei $A \leq 0$ ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H, $u_0 \in H$, $(T(t))_{t\geq 0}$ die von A erzeugte Kontraktionshalbgruppe und $u(t) = T(t)u_0$.

Dann ist

$$u \in C([0,\infty), H) \cap C((0,\infty), D_A) \cap C^1((0,\infty), H),$$

$$u'(t) := \frac{du}{dt}(t) = Au(t) \qquad \forall t > 0 \qquad \text{und}$$

$$u(0) = u_0 .$$

Ferner gelten die Abschätzungen

$$\| Au(t) \| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}} \|u_0\| , \quad -\langle Au(t), u(t)\rangle \leq \frac{1}{2t} \|u_0\|^2$$

und, falls $u_0 \in D_A$ ist: $\| Au(t) \|^2 \leq -\frac{1}{2t} \langle Au_0, u_0 \rangle$.

Bem.: Klar sind: $u \in C([0,\infty), H)$ und $u(0) = u_0$, das folgt aus Halbgruppeneigenschaften. Der entscheidende Punkt, neben den decay-Abschätzungen, ist derjenige, dass die Lösung für jedes positive ~~...~~ t Werte in D_A hat. Denken wir an A als einen Differenzialoperator, ist dies als eine Regularisierungseigenschaft der Evolutionsoperatoren zu interpretieren. (Es ist bemerkenswert, dass man diese Eigenschaft auf einem solchen abstrakten level zeigen kann.)

Vorbem.: Zwei Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis werden wir jeweils benötigt

(1) Satz von Alaoglu (Spezialfall): Jede beschränkte Folge in einem reflexiven B-Raum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge. (Werner, D.; Funktionalanalysis, Thm. III.3.7; gilt natürlich auch in Hilberträumen.)

(2) Jeder abgeschlossene lineare Teilraum F eines Hilbertraumes H ist schwach abgeschlossen.

Begründung zu (2): Sei $(x_n)_n$ eine Folge in F, die in H schwach gegen $x \in H$ konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$. Nehmen wir an, dass $x \notin F$ ist, so ist $\operatorname{dist}(x, F) > 0$

und es gibt ein $x_0 \in F$, so dass

(i) $\operatorname{dist}(x, F) = \|x - x_0\|$ u. (ii) $x - x_0 \perp F$

("Der kürzeste Abstand ist immer der Senkrechte."
Gilt auch im ∞-dim. Hilbertraum. $\to$ Einf. FA)

Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $x_k - x_0 \in F$ und also

$$0 = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ F}}{x_k - x_0}, \underset{\substack{\uparrow \\ F^\perp}}{x - x_0} \rangle \longrightarrow \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x - x_0\|^2 > 0.$$

Bew. von Satz 2: Wir benutzen die Yosida-Approximationen

$$A_k = kA(k-A)^{-1} = k^2(k-A)^{-1} - kI \in L(H)$$

und $T_k(t) = e^{tA_k}$. Hiervon ist bekannt, dass

$$\lim_{k \to \infty} A_k f = Af \quad \forall f \in D_A \quad \text{und} \quad T_k(t) f \to T(t) f \quad \forall f \in H,$$

wobei $(T(t))_{t \geq 0}$ die von A erzeugte Kontraktions(halb)gruppe ist.

Mit A sind auch alle A_k selbstadjungiert und ≤ 0

und daher die $(T_k(t))_{t \geq 0}$ Kontraktionsgruppen.

Begründung: Für $f \in H$ ist $(k-A)^{-1} f \in D_A$ und also

$$\langle (k-A)^{-1} f, g \rangle = \langle (k-A)^{-1} f, (k-A)(k-A)^{-1} g \rangle \overset{(A = A^*)}{=}$$

$$= \langle (k-A)(k-A)^{-1} f, (k-A)^{-1} g \rangle = \langle f, (k-A)^{-1} g \rangle,$$

d.h. $(k-A)^{-1}$ und damit (2. Darst.) A_k sind selbstadjungiert. Ferner

$$\langle A_k f, f\rangle = k\langle A\underbrace{(k-A)^{-1}f}_{=:g}, (k-A)\underbrace{(k-A)^{-1}f}_{=:g\in D_A}\rangle$$

$$= k\left(-\langle Ag, Ag\rangle + k\langle Ag, g\rangle\right) \leq 0 \,\lrcorner$$

Jetzt setzen wir $u_k(t) = T_k(t)u_0 = e^{tA_k}u_0$. Dann sind alle u_k beliebig oft diffbar, und aufgrund der Kontraktionshalbgruppeneigenschaften sind die Funktionen

$$t \mapsto \|u_k(t)\| \quad \text{und} \quad t \mapsto \|u_k'(t)\| = \|e^{tA_k}A_k u_0\|$$

auf $[0,\infty)$ monoton fallend. Ferner haben wir

$$(i)\quad \frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle u_k(t), u_k(t)\rangle = \langle u_k'(t), u_k(t)\rangle + \langle u_k(t), u_k'(t)\rangle$$

$$= \langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle + \langle u_k(t), A_k u_k(t)\rangle = 2\langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle$$

und

$$(ii)\quad \frac{d}{dt}\langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle = \langle A_k u_k'(t), u_k(t)\rangle + \langle A_k u_k(t), u_k'(t)\rangle$$

$$= 2\langle u_k'(t), A_k u_k(t)\rangle = 2\|u_k'(t)\|^2 \geq 0,$$

so dass also die Fkt. $t \mapsto \langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle$ auf $[0,\infty)$ monoton wachsend ist. Hieraus folgt

$$\int_0^t \langle A_k u_k(s), u_k(s)\rangle\, ds \leq t\,\langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle$$

und nach VZ-Umkehr

$$\left.\begin{aligned} -t\langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle &\leq -\int_0^t \langle A_k u_k(s), u_k(s)\rangle\, ds \\ &\underset{(i)}{=} -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u_k(s)\|^2\, ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 \end{aligned}\right\}\ (iii)$$

Integrieren wir (ii) unter Beachtung der Monotonie von $\| u_k'(t) \|$:

$$2t \, \| u_k'(t) \|^2 \le 2 \int_0^t \| u_k'(s) \|^2 \, ds \underset{(ii)}{=} \int_0^t \frac{d}{ds} \langle A_k u_k(s), u_k(s) \rangle \, ds \qquad (iv)$$

$$= \langle A_k u_k(t), u_k(t) \rangle - \langle A_k u_0, u_0 \rangle \le - \langle A_k u_0, u_0 \rangle$$

und gleich nochmal

$$t^2 \| u_k'(t) \|^2 \le 2 \int_0^t s \underbrace{\| u_k'(s) \|^2}_{\ge \| u_k'(t) \|^2} ds \underset{(ii)}{=} \int_0^t s \frac{d}{ds} \langle A_k u_k(s), u_k(s) \rangle \, ds$$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} s \langle A_k u_k(s), u_k(s) \rangle \Big|_0^t - \int_0^t \langle A_k u_k(s), u_k(s) \rangle \, ds$$

$$\le t \underbrace{\langle A_k u_k(t), u_k(t) \rangle}_{\le 0} + \frac{1}{2} \| u_0 \|^2 \le \frac{1}{2} \| u_0 \|^2$$

Also: $$\| u_k'(t) \|^2 \le \frac{1}{2t^2} \| u_0 \|^2 \qquad (v)$$

Nach der ersten Vorbemerkung hat die Folge $(u_k'(t))_k$ (bei festem $t > 0$), wobei

$$u_k'(t) = A_k u_k(t) = A \cdot k(k-A)^{-1} u_k(t) =: A v_k(t)$$

eine schwach konvergente Teilfolge, wir gehen davon aus, dass $u_k'(t) \rightharpoonup y \in H$. Ferner haben wir

$\lim_{k \to \infty} v_k(t) = u(t)$ und also auch $v_k(t) \rightharpoonup u(t)$.

Da $A = A^*$ abgeschlossen ist, ist $G(A)$ abgeschlossen in $H \times H$ und daher schwach abgeschlossen nach Vorbem. (2)

Also gilt $u(t) \in D_A$ und $Au(t) = y$, also

$$u_k'(t) = A_k u_k(t) \longrightarrow Au(t).$$

Dies gilt für jedes $t_0 > 0$, und damit ist

$$t \longmapsto u(t) = T(t-t_0)\underbrace{u(t_0)}_{\in D_A} \quad \text{stetig mit Werten in } D_A$$

und stetig differenzierbar nach t mit Werten der Ableitung in H.

D.h. $u \in C((0,\infty), D_A) \cap C^1((0,\infty), H)$,

und für $t > 0$ gilt $\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Ungleichungen sich bei dem z.T. schwachen Grenzübergang vererben!

Aus (iv) folgt für $u_0 \in D_A$ mit $\lim_{k\to\infty} \| \underbrace{A_k u_k(t)}_{=u_k'(t)} - Au(t) \| = 0$,

dass $\| Au(t) \|^2 \leq \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}t}\|u_0\|} \; -\frac{1}{2t}\langle Au_0, u_0\rangle$

Denn! $-\langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle + \langle A_k u_k(t), u(t)\rangle$

$$\leq \underbrace{\| A_k u_k(t) \|}_{\frac{1}{\sqrt{2}t}\|u_0\|} \, \| u_k(t) - u(t) \| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

und $\lim_{k\to\infty} \langle A_k u_k(t), u(t)\rangle = \langle Au(t), u(t)\rangle$ aufgrund der schwachen Konvergenz. Also

$$-\langle Au(t), u(t)\rangle = -\lim_{k\to\infty} \langle A_k u_k(t), u_k(t)\rangle \underset{(iii)}{\leq} \frac{1}{2t}\|u_0\|^2,$$

und schließlich $\| Au(t) \| = \sup_{\substack{x\in H \\ \|x\|\leq 1}} |\langle Au(t), x\rangle|$

und für jedes solche x aufgrund der schwachen Konvergenz

$$|\langle Au(t), x\rangle| = \lim_{k\to\infty} \langle A_k u_k(t), x\rangle \leq \limsup_{k\to\infty} \|\underbrace{A_k u_k(t)}_{=u_k'(t)}\|$$

$$\underset{(V)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2}\,t}\|u_0\|,$$ also auch

$$\|Au(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\,t}\|u_0\|,$$ und damit ist alles gezeigt. $\square$