2.2 Der Satz von Hille-Yosida

Dieser Satz in seiner allgemeinen Form liefert ein notwendiges und hinreichendes (allerdings oft nur umständlich zu handhabendes) Kriterium dafür, dass ein linearer Operator $A : E \supset D_A \to E$ eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ erzeugt und somit das Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad u(0) = u_0 \in D_A$$

klassisch wohlgestellt ist. In einem ersten Schritt wird ein entsprechendes Kriterium für Kontraktionshalbgruppen formuliert und gezeigt.

Satz 1 (Hille-Yosida für Kontraktionshalbgruppen): Für einen linearen Operator $A : E \supset D_A \to E$ auf einem B-Raum E sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) A ist der Generator einer Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ auf E.

(2) A ist dicht definiert, es gilt $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ und für alle $\lambda > 0$ ~~gilt~~ ist $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1$.

In diesem Fall gilt für $\lambda > 0$ und $x \in E$

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, T(s)\, x \, ds .$$

Bevor wir zu dem etwas längeren Beweis kommen, eine

Vorbemerkung: Es sei E ein B-Raum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $(T(t))_{t \geq 0}$ ist eine C^0-Halbgruppe mit Generator A und Wachstumsschranke $\omega(T) = \omega_0$.

(b) $(e^{-\lambda t} T(t))_{t \geq 0}$ ist eine C^0-Halbgruppe mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega(e^{-\lambda \cdot} T) = \omega_0 - \lambda$.

Bew.: ÜA.

Bew. der Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) des Satzes von H.-Y. und der Integraldarstellung der Resolvente:

$\overline{D_A} = E$ wurde bereits in Satz 1 in A 2.1 gezeigt.

Nach der Vorbem. erzeugt $A - \lambda I$ die C^0-Halbgruppe $(e^{-\lambda t} T(t))_{t \geq 0}$. Hierauf angewendet ergibt Lemma 3 (b) aus A 2.1 die Gleichungen

$$e^{-\lambda t} T(t) x - x = (A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \quad (\text{falls } x \in E)$$

und, falls $x \in D_A$:

$$e^{-\lambda t} T(t) x - x = \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) (A - \lambda) x \, ds.$$

Umstellen ergibt für $x \in E$

$$x = e^{-\lambda t} T(t) x + (\lambda - A) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \qquad (*)$$

und, für $x \in D_A$:

$$x = e^{-\lambda t} T(t)x + \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(\lambda - A)x\,ds \qquad (**)$$

Den jeweils ersten Summanden rechts schätzen wir ab:

$$\varphi(t) := \| e^{-\lambda t} T(t)x \| = e^{-\lambda t} \| T(t)x \| \leq e^{-\lambda t} \|x\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \qquad (***)$$

letzteres, da $(T(t))_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe ist.

$(***)$ zeigt sogar: $\varphi \in L^1([0,\infty), \mathbb{R})$. Da die Abbildung $\vec{\varphi}: t \mapsto e^{-\lambda t} T(t)x$ stetig und damit insbes. messbar ist, liefert der Satz von Bochner: $\vec{\varphi} \in L^1([0,\infty), E)$, und der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt schließlich, dass

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\,ds}_{=: x_t} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x\,ds =: x_\infty$$

Jetzt lassen wir in $(*)$ und $(**)$ $t\to\infty$ streben und erhalten für $x \in E$

$$x = \lim_{t\to\infty} (\lambda - A) \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x\,ds = \lim_{t\to\infty} (\lambda - A) x_t$$

sowie für $x \in D_A$

$$x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)(\lambda - A)x\,ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)(\lambda - A)x\,ds$$

Also: $\lim_{t\to\infty} x_t = x_\infty$, $x_t \in D_A = D_{(\lambda - A)}$

und $\lim_{t\to\infty} (\lambda - A)x_t = x$.

Da A und damit auch $\lambda - A$ abgeschlossen sind. (vgl. Satz 1 im vorigen Absatz) erhalten wir

$$x_\infty = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \in D_A \quad \text{. und}$$

$$(\lambda - A) x_\infty = (\lambda - A) \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x \, ds = x .$$

Nun setzen wir $R(\lambda) x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \quad (x \in E)$

Dann haben wir

für $x \in E$: $(\lambda - A) R(\lambda) x = x$. und

für $x \in D_A$: $R(\lambda)(\lambda - A) x = x$.

D.h. : $\lambda - A : D_A \to E$ ist bijektiv, und aus (***)

erhalten wir

$$\| R(\lambda) x \| = \| \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x \, ds \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|x\| \, ds = \frac{\|x\|}{\lambda} ,$$

d.h. die Stetigkeit von $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$, und das bedeutet $\lambda \in \mathcal{S}(A)$. Ferner haben wir

$$\| \lambda (\lambda - A)^{-1} x \| \leq \|x\| , \text{ also } \| \lambda (\lambda - A)^{-1} \| \leq 1 .$$

Damit ist dieser Teil des Satzes ((1) ⇒ (2) u. Integraldarstellung) gezeigt. Für die andere (konstruktive) Richtung ((2) ⇒ (1)) soll zuerst die Beweisidee von Yosida benannt und dann ein vorbereitendes Lemma formuliert werden.

Yosidas Idee ist,

- den unbeschränkten Operator A durch eine Folge $(A_k)_k$ in $L(E)$ punktweise (oder: "stark") zu approximieren. Damit ist gemeint: Für alle $x \in D_A$ soll gelten

$$\lim_{k\to\infty} \| A_k x - Ax \| = 0.$$

- Als Approximationen wählt er

$$A_k := kA(k-A)^{-1} = k^2(k-A)^{-1} - kI \in L(E)$$

(schreibe $I = (k-A)(k-A)^{-1}$ um das 2. "=" einzusehen!)

- und definiert $T_k(t) = \exp(tA_k)$

sowie $T(t)x := \lim_{k\to\infty} T_k(t)x$

Zu zeigen sind dann:

(i) Existenz des Grenzwerts $\forall x \in E$.

(ii) $(T(t))_{t\geq 0}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe,

(iii) deren Generator A ist.

Dazu benötigen wir das folgende ↓

Lemma 1: Sei $A : E \supset D_A \to E$ dicht def., $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$, so dass $[\omega, \infty) \subset \varrho(A)$ und $\| \lambda(\lambda - A)^{-1} \| \leq M$ für $\lambda \geq \omega$. Dann:

(1) $\lambda(\lambda-A)^{-1}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} x \quad \forall x \in E$, (2) $\lambda A(\lambda-A)^{-1}x = \lambda(\lambda-A)^{-1}Ax \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} Ax$

$\forall x \in D_A$

Beweis des Lemmas (ggf. als Übungsaufgabe):

- Zunächst bilden wir für $x \in D_A$ die Differenz

$$\lambda(\lambda-A)^{-1}x - x = (\lambda-(\lambda-A))(\lambda-A)^{-1}x = A(\lambda-A)^{-1}x$$

und erhalten für die Norm dieses Terms

$$\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x - x\| = \frac{1}{\lambda}\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\cdot Ax\| \underset{\text{Vor.}}{\le} \frac{M}{\lambda}\|Ax\|,$$

sofern $\lambda \ge \omega$, o.E. positiv. $\lambda \to \infty$ liefert (1), wenn $x \in D_A$.

- Da A dicht definiert ist, finden wir zu $x \in E$ und $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in D_A$ mit $\|x - x_\varepsilon\| \le (M+1)^{-1}\cdot\varepsilon$. Dann ist

$$\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x - x\| \le \|\lambda(\lambda-A)^{-1}(x-x_k)\| + \|x_k - x\|$$

$$+ \|\lambda(\lambda-A)^{-1}x_k - x_k\| \le \varepsilon + \|\lambda(\lambda-A)^{-1}x_k - x_k\|$$

Jetzt: $\lambda \to \infty$. Dann $\varepsilon \searrow 0$.

- (2) folgt durch Anwendung von (1) auf Ax.

Vertauschbarkeit folgt aus $(\lambda-A)A = A(\lambda-A)$. □

Beweis der Implikation (2) → (1) von Satz 1 (H.-Y., Kontraktions HG-Fall)

Wir setzen also voraus, dass $\overline{D_A} = E$, $(0,\infty) \subset \mathcal{S}(A)$ und $\|\lambda(\lambda-A)^{-1}\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$ und zeigen, dass A eine Kontraktionshalbgruppe erzeugt. Der Beweis geschieht in 8 Schritten:

Schritt 1: Definition der Evolutionsoperatoren.

Wie angekündigt, definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Operatoren

$$A_k := kA(k-A)^{-1} = k^2(k-A)^{-1} - kI$$

so dass nach Lemma 1 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k x = Ax$ für alle $x \in D_A$,

und weiter

$$T_k(t) = \exp(tA_k) \overset{\text{2. Darstellung oben}}{=} e^{-kt}\exp(kt(k(k-A)^{-1})),$$

so dass

$$\|T_k(t)\| \leq e^{-kt} \cdot \exp(kt \underbrace{\|k(k-A)^{-1}\|}_{\leq 1 \text{ n.V.}}) \leq e^{-kt}e^{kt} = 1.$$

Also sind die $(T_k(t))_{t\geq 0}$ Kontraktionshalbgruppen.

Weiter haben wir für $x \in D_A$

$$T_k(t)x - T_e(t)x = T_k(t)T_e(0)x - T_k(0)T_e(t)x$$

$$= T_k(s)T_e(t-s)x\Big|_0^t = \int_0^t \frac{d}{ds} T_k(s)T_e(t-s)x\, ds$$

$$= \int_0^t A_k T_k(s)T_e(t-s)x - T_k(s)A_e \cdot T_e(t-s)x\, ds$$

$[A_k, A_e] = 0$
$[A_k, T_e(t)] = 0$
$$= \int_0^t T_k(s)T_e(t-s)(A_k x - A_e x)\, ds$$

...

Nun ergeben die Dreiecksungleichung und die Kontraktions-halbgruppen-Eigenschaft der T_k, dass

$$\|T_k(t)x - T_\ell(t)x\| \leq \int_0^t \|T_k(s)T_\ell(t-s)(A_k - A_\ell)x\|\,ds$$

$$\leq t\,\|(A_k - A_\ell)x\| \longrightarrow 0 \quad (k,\ell \to \infty)$$

da nach Lemma 1 für $x \in D_A$ $\lim_{k\to\infty} A_k x = \lim_{\ell\to\infty} A_\ell x = Ax$.

Damit ist für $x \in D_A$ $(T_k(t)x)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im B-Raum E und somit konvergent. Wir definieren also für $x \in D_A$

$$T(t)x := \lim_{k\to\infty} T_k(t)x$$

und haben die Stetigkeitsabschätzung

$$\|T(t)x\| = \lim_{k\to\infty} \|T_k(t)x\| \leq \|x\|, \curvearrowright \|T(t)\| \leq 1.$$

Diese erlaubt die Fortsetzung von $T(t)$ zu einem auf ganz E definierten Operator: Zu $x \in E$ ~~setzen~~ wählen wir eine Folge $(x_n)_n$ in D_A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und setzen

$$T(t)x := \lim_{n\to\infty} T(t)x_n.$$

Der fortgesetzte Operator wird also ebenfalls mit $T(t)$ bezeichnet und "erbt" die Eigenschaft

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad (\text{"kontrahierend"}).$$

Schritt 2: $(T(t))_{t\geq 0}$ ist eine (Kontraktions-)Halbgruppe

Für die Eigenschaften (1) und (2) einer C^0-Halbgruppe reicht es, diese für $x \in D_A$ nachzurechnen, der allgemeine Fall folgt leicht durch Approximation:

$$T(0)x = \lim_{k\to\infty} \underbrace{T_k(0)}_{=I} x = x$$

$$T(t+s)x = \lim_{k\to\infty} T_k(t+s)x = \lim_{k\to\infty} T_k(t)T_k(s)x = T(t)T(s)x,$$

denn $\| T_k(t)T_k(s)x - T(t)T(s)x \| \leq \| T_k(t)(T_k(s)-T(s))x \|$

$+ \| (T_k(t)-T(t))T(s)x \| \leq \| (T_k(s)-T(s))x \| + \| (T_k(t)-T(t))T(s)x \|,$

und beides strebt nach Definition von T gegen Null.

Kommen wir zu Eigenschaft (3), d. i. die starke Stetigkeit, auch dies zuerst für $x \in D_A$. Dazu wenden wir erneut Lemma 3 aus A.2.1 an und schreiben

$$T(t)x - x = \lim_{k\to\infty} T_k(t)x - x = \lim_{k\to\infty} \int_0^t T_k(s)A_k x \, ds$$

$$= \int_0^t T(s)Ax \, ds, \qquad (*)$$

denn $\| T_k(s)A_k x - T(s)Ax \| \leq \| (T_k(s)-T(s))Ax \|$

$+ \| T_k(s)(A_k - A)x \| \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty),$ wobei

für den zweiten Term $\| T_k(s) \| \leq 1$ zu beachten ist.

(*) ergibt $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für $x \in D_A$ oder auch allgemeiner

$\lim_{h\to 0} T(t+h)x = T(t)x$ für $x \in D_A$

Nun sei $x \in E$ und $(x_n)_n$ eine Folge in D_A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Dann ist

$\| T(t+h)x - T(t)x \| \leq \| T(t+h)(x-x_n)\| + \|(T(t+h)-T(t))x_n\| + \|T(t)(x-x_n)\|$

$\leq 2\|x-x_n\| + \|(T(t+h)-T(t))x_n\|$

Jetzt $h \to 0$, dann $n \to \infty$.

Schritt 3: A erzeugt $(T(t))_{t\geq 0}$.

Sei $B : E \supset D_B \to E$ der Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$ und $x \in D_A$. Dann haben wir nach (*) für $t > 0$

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds \longrightarrow Ax \quad (t \to 0)$$

Die Existenz des Grenzwerts zeigt $x \in D_B$ und $Bx = Ax$.

Damit ist $D_A \subset D_B$ und $B|_{D_A} = A$. (**)

Nun ist nach dem Bew. der Implikation (1) ⇒ (2) $\lambda = 1 \in \varrho(B)$ und nach Vor. auch $\lambda = 1 \in \varrho(A)$. Dann ist für $x \in E$ $(I-A)^{-1}x \in D_A$ und wg. (**)

$x = (I-B)(I-A)^{-1}x$, also $(I-B)^{-1}x = (I-A)^{-1}x$ $\forall x \in E$.

D.h. $D_B = R((I-B)^{-1}) = R((I-A)^{-1}) = D_A$ und also $A = B$.

□

Folgerung (Satz von Hille-Yosida für Kontraktionsgruppen):

Es sei E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i) A erzeugt eine Kontraktionsgruppe.

(ii) A und $-A$ erzeugen eine Kontraktionshalbgruppe.

(iii) $\overline{D_A} = E$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathcal{S}(A)$, $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Bem.: Kontraktionsgruppe = C^0-Gruppe mit $\|T(t)\| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Hierzu zählen insbesondere die unitären Gruppen auf einem Hilbertraum H. Das sind wiederum diejenigen C^0-Gruppen $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ auf einem Hilbertraum H, für die $U(t)^* = U(t)^{-1}$ $(= U(-t))$ gilt. Der adjungierte Operator A^* von $A \in L(H)$ ist definiert durch $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ $\forall x, y \in H$.

Bew. der Folgerung:

- Die Äquivalenz (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) ergibt sich aus dem Satz von Hille-Yosida, angewendet auf A und $-A$. Hierbei ist lediglich zu beachten, dass $\mathcal{S}(-A) = -\mathcal{S}(A)$. (Denn: $-\lambda - A$ ist invertierbar mit stetiger Inverser, wenn dies auf $\lambda + A = \lambda - (-A)$ zutrifft.)
- (i) $\Rightarrow$ (ii) ist ebenfalls leicht einzusehen: Sei $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von A erzeugt, so können wir für $t \geq 0$ definieren $T_-(t) := T(-t)$. Dann ist $(T_-(t))_{t \geq 0}$ eine Kontraktions-

halbgruppe, die von $-A$ erzeugt wird.

- Bleibt der Bew. der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i). Dazu seien $(T_\pm(t))_{t\geq}$ die von $\pm A$ erzeugten Kontraktionshalbgruppen. Wir definieren für $t\in\mathbb{R}$

$$T(t) := \begin{cases} T_+(t), \text{ falls } t\geq 0 \\ T_-(t), \text{ falls } t\leq 0 . \end{cases}$$

Dann ist $T(0)=I$ und $\|T(t)\|\leq 1 \quad \forall t\in\mathbb{R}$. Die Halbgruppeneigenschaft $T(t+s)=T(t)\,T(s)$ ist klar, sofern $s,t\in\mathbb{R}$ dasselbe Vorzeichen haben, andernfalls nicht. Um dies einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass $T_+(t)$ und $T_-(s)$ kommutieren.

Begründung: Da $[A,-A]=0$, gilt auch $[A_k,(-A)_\ell]=0$ für die Yosida-Approximationen $(\pm A)_k = k(\pm A)(k\mp A)^{-1}$. Hieraus folgt $[(T_+)_k(t),(T_-)_\ell(s)]=0$, und diese Vertauschungseigenschaft bleibt auch im punktweisen Grenzwert $T_\pm(t)x = \lim_{k\to\infty}(T_\pm)_k(t)x$ erhalten. Also:

$$\forall s,t\geq 0 \qquad T_+(t)\,T_-(s) = T_-(s)\,T_+(t)$$

Nun definieren wir für $t\geq 0$: $S(t):=T_+(t)\,T_-(t)$. Dann ist $S(0)=I$, $S(t)\in L(E)\ \forall t\geq 0$ und für $x\in D_A$ gilt

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \frac{d}{dt}T_+(t)T_-(t)x = A\,T_+(t)T_-(t)x + T_+(t)(-A)T_-(t)x$$

$$=(T_+(t)T_-(t)-T_+(t)T_-(t))\,Ax = 0$$

Hieraus folgt $S(t)x = x \quad \forall t \geq 0$ und $x \in D_A$, und weil $\overline{D_A} = E$ (113)
gilt, haben wir $S(t) = I \quad \forall t \geq 0$, d.h. $(T_+(t))^{-1} = T_-(t) \quad \forall t \geq 0$.

Jetzt seien $s < 0 < t$ mit o.B.d.A. $s + t > 0$.

$$T(t+s)\,T(t)^{-1}\,T(s)^{-1} = T_+(t+s)\,T_+(t)^{-1}\,T_-(-s)^{-1} \quad (\text{Def. } T\,!)$$

$$= T_+(t+s)\,T_+(-s)\,T_+(t)^{-1} = T_+(t)(T_+(t))^{-1} = I$$

gerade hergeleitete Bez. zwischen T_+ und T_- und Vertauschungseigenschaft!

$$\Longrightarrow \quad T(t+s) = T(s)\,T(t) = T(t)\,T(s)$$

(Falls $t+s<0$, geht die Rechnung oben folgendermaßen:

$$T(t+s)\,T(t)^{-1}\,T(s)^{-1} = T_-(-t-s)\,T_+(t)^{-1}\,T_-(-s)^{-1}$$

$$= T_-(-t-s)\cdot T_-(t)\,T_-(-s)^{-1} = T_-(-s)(T_-(-s))^{-1} = I \quad)$$

Damit ist die Halbgruppeneigenschaft für $s, t \in \mathbb{R}$ gezeigt. Die starke Stetigkeit ist aufgrund der Def. gegeben in jedem $t_0 > 0$, mit der gerade gezeigten Funktionalgleichung hat man diese auch in jedem $t_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Der nächste Schritt ist die Verallgemeinerung des Satzes von Hille-Yosida von den Kontraktionshalbgruppen auf beliebige C^0-Halbgruppen. Die allgemeine Form des Satzes ist die folgende:

<u>Satz</u> 2 (Hille-Yosida, allgemeine Version) Es seien E ein B-Raum, $A : E \supset D_A \to E$ ein linearer Operator, $\omega \in \mathbb{R}$ und $M \geq 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) A erzeugt eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ mit

$$\| T(t) \| \leq M \exp(\omega t) \quad \forall t \geq 0 .$$

(2) $\overline{D_A} = E$, $(\omega, \infty) \subset \varrho(A)$ und $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \sup\limits_{\lambda > \omega} \| (\lambda - \omega)^k (\lambda - A)^{-k} \| \leq M$.

<u>Bew.</u>: Wir können uns auf den Fall $\omega = 0$ beschränken. Ist dieser nämlich gezeigt und A beliebig vorgegeben, so betrachten wir stattdessen $A - \omega I$, der die jeweiligen Voraussetzungen mit $\omega = 0$ erfüllt. Vgl. die Vorbemerkung zum Bew. von Satz 1.

(1) $\Rightarrow$ (2) Wir definieren eine weitere Norm $||| \; |||$ auf E durch $\quad ||| x ||| := \sup\limits_{s \geq 0} \| T(s) x \|$. Hierfür gilt

$$\| x \| \leq ||| x ||| \leq \sup_{s \geq 0} \| T(s) \| \, \| x \| \leq M \| x \| ,$$

es handelt sich also um eine äquivalente Norm, und

$$||| T(t) x ||| = \sup_{s \geq 0} \| T(s+t) x \| \leq ||| x ||| ,$$

d.h. $(T(t))_{t \geq 0}$ ist eine Kontraktionshalbgruppe auf $(E, ||| \; |||)$. Satz 1 ergibt $(0,\infty) \subset \varrho(A)$ und, für alle $\lambda > 0$, $x \in E$:

$$|||\lambda(\lambda-A)^{-1}x||| \le |||x|||.$$

$$\Longrightarrow \quad |||\lambda^k(\lambda-A)^{-k}x||| \le |||x||| \le M\,\|x\| \quad \forall k\in\mathbb{N}_0,$$

wobei beim letzten "$\le$" die Normäquivalenz verwendet wurde.

(2) $\Rightarrow$ (1) Auch diese Richtung soll mit Hilfe einer geeigneten äquivalenten Norm auf den Kontraktionshalbgruppenfall zurückgeführt werden. Dazu definieren wir zunächst für $\mu>0$ die Norm

$$\|x\|_\mu := \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|\mu^k(\mu-A)^{-k}x\| \qquad (x\in E).$$

Denn ist $\|x\| \underset{k=0}{\le} \|x\|_\mu \le M\,\|x\|$, ← 3. Teilaussage in (2)

es handelt sich also ebenfalls um eine äquivalente Norm.

Wir zeigen: Für $0<\lambda\le\mu$ und $x\in E$ gilt $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu$ (!)

Dazu stellen wir zunächst fest, dass

$$\|\mu(\mu-A)^{-1}x\|_\mu = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mu^k(\mu-A)^{-k}x\| \le \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sim \; = \|x\|_\mu$$

und benutzen sodann die Resolventengleichung:

$$(\lambda-A)^{-1} - (\mu-A)^{-1} = (\mu-\lambda)(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \|(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu \le \|(\mu-A)^{-1}x\|_\mu + (\mu-\lambda)\,\|(\mu-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu$$

$$= \frac{1}{\mu}\|\mu(\mu-A)^{-1}x\|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\|\mu(\mu-A)^{-1}(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu$$

obige Feststellung $\leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\|(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda^k(\lambda-A)^{-k}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad \forall k\in\mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda^k(\lambda-A)^{-k}x\| \leq \|x\|_\mu \quad \text{— " —}$$

$\Rightarrow \quad \|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, und das ist die Monotonieaussage(!).

Wg. $\|x\|_\mu \leq M\|x\|$ existiert also der Grenzwert

$$\lim_{\mu\to\infty}\|x\|_\mu =: |||x|||,$$

der eine äquivalente Norm darstellt, da die Ungleichung
$\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$ im Grenzwert $\mu\to\infty$ folgt.

Mit dem Zwischenergebnis (*) erhält man

$$|||\lambda(\lambda-A)^{-1}x||| = \lim_{\mu\to\infty}\|\lambda(\lambda-A)^{-1}x\|_\mu \overset{(*)}{\leq} \lim_{\mu\to\infty}\|x\|_\mu = |||x|||.$$

o.E. $\lambda\leq\mu$

Satz 1 (die anderen Vor.: $\overline{D_A}=E$, $(0,\infty)\subset \varrho(A)$ sind ebenfalls erfüllt) ergibt: A erzeugt eine Kontraktionshalbgruppe auf $(E, |||\;|||)$, damit auch eine C^0-Halbgruppe auf $(E, \|\;\|)$, die mit $(T_A(t))_{t\geq 0}$ bezeichnet sei.

Die Normabschätzung hierfür folgt aus

$$\|T_A(t)x\| \leq |||T_A(t)x||| \leq |||x||| \leq M\|x\|,$$

und damit ist auch (2) $\Rightarrow$ (1) vollständig gezeigt.