2. Stark stetige Halbgruppen

2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Zur Lösung des abstrakten Cauchy-Problems

$$u_t = Au + f, \qquad u(t=0) = u_0 \in E,$$

wobei E ein B-Raum, A ein unbeschränkter Operator auf E und f eine E-wertige Funktion ist, suchen wir eine Schar $(T(t))_{t\in I}$ von Evolutionsoperatoren oder auch "Propagatoren", die (fast) dasselbe leisten wie $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ im Fall $A \in L(E)$.

Wir gehen dabei (zunächst jedenfalls) nicht konstruktiv vor, sondern sozusagen "axiomatisch", indem wir ein minimales System von Eigenschaften festlegen, die eine solche Operatorenschar haben sollte.

Def.: Eine Familie $(T(t))_{t\geq 0}$ von beschränkten linearen Operatoren auf einem Banachraum E heißt eine stark stetige Halbgruppe (kurz: C^0-Halbgruppe), wenn folgendes gilt:

(1) $\quad T(0) = I \quad$ (= Identität)

(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$ (Halbgruppeneigenschaft)

(3) T ist stark stetig, d.h. für jedes $x \in E$ ist die Abb. $T(\cdot)x : [0,\infty) \to E,\ t \mapsto T(t)x$ stetig.

Falls $T(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, so dass die Eigenschaften (1) - (3) erfüllt sind, heißt $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe.

Gilt anstelle von (3), dass $T : [0,\infty) \to L(E),\ t \mapsto T(t)$ stetig (bezüglich der Operatornorm auf $L(E)$) ist, so heißt $(T(t))_{t\geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe.

Def.: Der lineare Operator $A : E \supset D_A \to E$ mit Definitionsbereich

$$D_A := \{ x \in E : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existiert} \}$$

und Zuordnungsvorschrift

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

heißt der (infinitesimale) Generator oder Erzeuger der C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Diskussion:

(1) Algebraisch hat man etwas mehr als nur eine Halbgruppe, nämlich eine kommutative Halbgruppe mit Einselement, die wg. (2) isomorph ist zu $(\mathbb{R}_0^+, +)$. Wenn für $t \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt sind, folgt aus (2):

$$I = T(0) = T(t+(-t)) = T(t)T(-t) \Rightarrow T(t)^{-1} = T(-t).$$

Zu jedem Operator $T(t)$ gibt es also eine Inverse, und damit liegt eine Gruppenstruktur vor.

(2) Im allgemeinen ist $D_A \subsetneqq E$. Wir werden aber sehen, dass D_A in der obigen Situation stets ein dichter linearer Teilraum von E ist.

(3) Die Stetigkeitseigenschaften einer Halbgruppe sind aufgrund der Funktionalgleichung (2) bereits dann gegeben, wenn sie in einem Punkt $t_0 > 0$ gelten, denn es ist

$$\| T(t+h+t_0)x - T(t+t_0)x \|_E \leq \|T(t)\| \, \|T(h+t_0)x - T(t_0)x\|_E$$

bzw.

$$\| T(t+h+t_0) - T(t+t_0) \| \leq \|T(t)\| \, \| T(h+t_0) - T(t_0) \|.$$

Im Fall einer Gruppe reicht die Überprüfung für $t_0 = 0$.

(4) "Normstetig" ist eine stärkere Eigenschaft als "stark stetig", denn es gilt $\| T(t)x - x \|_E \leq \| T(t) - I \| \, \|x\|_E$, (ggf. mit $\tilde{x} = T(t_0)x$ anzuwenden).

(5) Ist $A \in L(E)$, so ist $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ eine normstetige Gruppe von Operatoren in $L(E)$ mit Generator A. Damit sind aber auch bereits alle normstetigen ~~...~~ Halbgruppen gefunden, denn es gilt:

<u>Lemma</u> 1: Ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren auf einem B-Raum E, mit infinitesimalem Generator A, so ist $A \in L(E)$ und $T(t) = e^{tA}$.

<u>Bew.</u>: Wir setzen $V(t) = \int_0^t T(s)ds$ $\quad (T : [0,\infty) \to L(E)$ ist stetig, also lokal integrierbar!). Dann V stetig diffbar mit $\frac{dV}{dt}(0) = T(0) = I$. Für hinreichend kleines $t > 0$ ist dann $\| \frac{V(t)}{t} - I \| < 1$ und damit

$\frac{V(t)}{t} = -(I - \frac{V(t)}{t}) - I$ invertierbar (Neumannsche Reihe) und damit auch $V(t)$ invertierbar. Wir fixieren ein solches $t_0 > 0$ und schreiben

$$T(t) = V(t_0)^{-1} V(t_0) T(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(s)ds \; T(t)$$

$$= V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(t+s)ds = V(t_0)^{-1} \cdot \int_t^{t_0+t} T(s)ds$$

Hieraus folgt für den infinitesimalen Erzeuger

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t) - I) = \frac{d}{dt} V(t_0)^{-1} \int_t^{t_0+t} T(s)ds \Big|_{t=0}$$

$$= V(t_0)^{-1} (T(t_0) - T(0)) \in L(E)$$

und allgemeiner haben wir

$$\frac{d}{dt}\, T(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)-I)\cdot T(t) = A\,T(t).$$

Für $\gamma(t) = T(t) - e^{tA}$ gilt also $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ und $\gamma(0) = 0$, und hieraus folgt $\gamma(t) = 0 \;\forall t \geq 0$. $\square$

Damit wird klar, warum man sich in der Def. von C^0-Halbgruppen auf die Forderung "stark stetig" zurückziehen muss, wenn man eine Theorie für partielle Dgln. und also unbeschränkte Operatoren A entwickeln will.

– kommen wir zur Diskussion einiger <u>Beispiele</u>:

(1) Translations(halb)gruppe

Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$T(t)f(x) := f(x+t).$$

Dann ist für $1 \leq p < \infty$

$$\| T(t) f \|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

bzw. für $p = \infty$

$$\| T(t) f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty .$$

Das heißt, für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $T(t): L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ isometrisch, also insbes. ein beschränkter und offenbar linearer Operator. Ferner gelten:

$$T(0)f(x) = f(x), \text{ also } T(0) = I, \text{ und}$$

$$T(t+s)f(x) = f(x+t+s) = T(s)f(x+t) = T(s)T(t)f(x),$$

$$\text{d.h. } T(t+s) = T(t)T(s),$$

und das sind die definierenden Eigenschaften (1) und (2) einer stark stetigen (in diesem Fall) Gruppe. Lediglich die Eigenschaft "stark stetig" ist nicht offensichtlich. Betrachten wir zunächst den Fall

<u>$1 \leq p < \infty$:</u> Hier ist $C_c(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ ein dichter linearer Teilraum, und für $f \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{t\to 0} f(x+t) = f(x), \text{ also auch } \lim_{t\to 0} |f(x+t) - f(x)|^p = 0,$$

und für, sagen wir, $|t| \leq 1$, $K := \bigcup_{|t|\leq 1} \operatorname{supp}(f) + t$ (immer noch kompakt!) haben wir

$$|f(x+t) - f(x)|^p \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \chi_K(x),$$

was eine integrierbare Majorante ist. Der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_p^p = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0.$$

Ist $f \in L^p(\mathbb{R})$ beliebig, so wählen wir eine Folge $(f_n)_n$ in $C_c(\mathbb{R})$ mit $f_n \longrightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R})$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist:

$$\|T(t)f - f\|_p \leq \|T(t)(f - f_n)\|_p + \|T(t)f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p$$

$$\leq 2\|f - f_n\|_p + \|T(t)f_n - f_n\|_p \leq \varepsilon + \|T(t)f_n - f_n\|_p,$$

sofern n hinreichend groß ist. Jetzt $t \to 0$, dann $\varepsilon \downarrow 0$, und die starke Stetigkeit von $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^p(\mathbb{R})$ mit $1\le p<\infty$ ist gezeigt.

$\underline{p=\infty}$: Wir wählen $f=\chi_{[0,1]}$, dann ist für $t\neq 0$

$$|f(x+t)-f(x)|=1 \qquad \forall\, x\in[0,t)\cup(1,1+t),$$

und letzteres ist keine Nullmenge. Also ist

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \|T(t)f-f\|_\infty = 1\neq 0, \qquad \text{und wir sehen,}$$

dass $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ <u>nicht</u> stark stetig ist.

Für $1\le p<\infty$ stellt sich die Frage nach dem infinitesimalen Generator von $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Aus der Diskussion um den Hauptsatz wissen wir, dass für $f\in W^{1,p}(\mathbb{R})$ gilt

$$L^p\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\underbrace{f(x+t)}_{T(t)f(x)}-f(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x),$$

wobei hier $\frac{d}{dx}$ die Distributionsableitung gemeint ist.
Sei A der Generator von $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$, so gehört $f\in L^p(\mathbb{R})$ zu D_A genau dann, wenn $\frac{d}{dx}f\in E \underset{\text{hier}}{=} L^p(\mathbb{R})$ liegt, d.h. wenn $f\in W^{1,p}(\mathbb{R})$. D.h. der Generator der Translationshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$A: D_A=W^{1,p}(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R}),\quad f\mapsto Af=\frac{df}{dx}.$$

Diskussion: Varianten und Verallgemeinerung:

- Wir können auch $T(t)f(x)=f(x+t)$ auf $L^p((0,\infty))$ betrachten, was allerdings nur für $t\ge 0$ Sinn macht. Für $1\le p<\infty$ erhalten wir dann eine C^0-<u>Halb</u>gruppe mit Generator

$$A = \frac{d}{dx}, \; D_A = W^{1,p}((0,\infty)) \longrightarrow L^p((0,\infty)), \; f \longmapsto \frac{df}{dx}$$

- Es ist durchaus sinnvoll, die Translations(halb-)gruppe auch auf Räumen stetiger und beschränkter Funktionen (auf $\mathbb{R}$ bzw. $[0,\infty)$) zu betrachten.
  → Übungen.

- Allgemeiner: Fixieren wir einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so können wir für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ festlegen

$$T_v(t) f(x) := f(x + tv).$$

Wie oben sieht man dann ein, dass $(T_v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ bildet. Der Generator ist in diesem Fall die (distributionelle) Richtungsableitung nach v, d.h.

$$A = \frac{\partial}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} =: v \cdot \nabla$$

mit Def.-Bereich $D_A := \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \frac{\partial f}{\partial v} \in L^p(\mathbb{R}^n) \}$.

- Die Dgl., die man auf diese Weise "löst", ist die sogenannte "Transportgleichung"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot \nabla u,$$

deren Lösung eben darin besteht, ein "Anfangsprofil" mit konstanter Geschwindigkeit v durch den $\mathbb{R}^n$ zu schieben.

(2) Die Wärmeleitungshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$,

(und Verallgemeinerung)

Wir starten mit einer Gaußfunktion

$$G(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot e^{-|x|^2/2}, \quad (x \in \mathbb{R}^n, \ |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2).$$

Der Vorfaktor ist so gewählt, dass $\|G\|_1 = 1$ ($\longrightarrow$ Ana III, sonst Übung / Lektüre). Durch Reskalierung erhalten wir eine Schar $(G_t)_{t>0}$ Gauß'scher Fktn.

$$G_t(x) := (2t)^{-n/2}\, G\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = (4\pi t)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

für die ebenfalls $\|G_t\|_1 = 1$ gilt. (In der Tat hat man für $y(x) = \frac{x}{\sqrt{2t}}$ die Funktionaldeterminante $\mathcal{J}y(x) = (2t)^{-n/2}$, die Jacobimatrix ist $Dy(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} \cdot E_n$.) Wenn $t \searrow 0$ strebt, wird der peak bei $x = 0$ immer höher und schärfer. Damit erfüllt die Funktionenschar $(G_t)_{t>0}$ die Forderungen an eine approximative Einheit:

Def.: Eine Familie $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt eine approximative Einheit, wenn

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$;

(2) $\exists\, M > 0$, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} |K_\varepsilon(x)|\,dx \le M \quad \forall \varepsilon > 0$

(3) $\forall \delta > 0: \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\,dx = 0.$

Bem.: (1) Die oben durchgeführte Konstruktion einer approx. Einheit funktioniert für jede Funktion $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)\,dx = 1$, nicht nur für Gaussfktn. Üblicherweise skaliert man $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$, oben haben wir $\varepsilon = \sqrt{2t}$ gewählt.

(2) Approximative Einheiten gibt es nicht nur auf dem $\mathbb{R}^n$, sondern auf jeder (LCA-) Gruppe, G, auf der ein translationsinvariantes reguläres Maß (das sog. Haar-Maß) existiert, so dass man die Faltung zweier Funktionen definieren kann. Ein weiteres wichtiges Bsp. ist $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$.

(3) Die Bez. "approximative Einheit" meint, dass man eine Annäherung an ein neutrales Element der Faltung

$$f*g := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

erhält, die als Multiplikation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $L^1(G)$ aufgefasst werden kann. Sie wird gerechtfertigt durch den folgenden

Satz 1: Sei $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes

- $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$: $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * f(x) = f(x)$ mit glm. Konvergenz,
- $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$: $\lim_{\varepsilon\to 0} \| K_\varepsilon * f - f \|_p = 0$.

Für den Beweis sei auf die Vorlesung "Harmonische Analysis" (dort Satz 17) oder auf das Buch von Grafakos verwiesen.

Jetzt definieren wir auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$ die Operatorenfamilie $(T(t))_{t\ge 0}$ durch

$$T(0)f:=f \qquad \text{und, für } t>0, \qquad T(t)f:=G_t*f.$$

Dann ist aufgrund der Young'schen Ungleichung

$\|f*g\|_p \le \|f\|_q\,\|g\|_r$ (sofern $\frac{1}{p'}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}$):

$$\|T(t)f\|_p \le \|G_t\|_1\,\|f\|_p = \|f\|_p,$$

d.h. $T(t)\in L(L^p(\mathbb{R}^n))$ mit $\|T(t)\|\le 1$.

Per Definition gilt $T(0)=I$, und die starke Stetigkeit bei $t=0$ folgt aus dem obigen Approximationssatz.

Um die Halbgruppeneigenschaft einzusehen, benutzen wir die Fouriertransformation:

<u>Def.</u>: Für $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt $\mathcal{F}f$, definiert durch

$$\mathcal{F}f(\xi):=\hat{f}(\xi):=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)\,dx \qquad \left(x\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i\right)$$

die Fouriertransformierte von f und $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformation.

Grundlegende Eigenschaften dieser Transformation werden zusammengefasst im folgenden

Satz 2: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ ist stetig, linear, injektiv, nicht surjektiv, und für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt die Umkehrformel

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Ferner haben wir die folgenden Rechenregeln:

(1) $\widehat{f*g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$;

(2) ist $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, so gilt $\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$; $(\lambda > 0)$

(3) falls die auftretenden (schwachen) Ableitungen existieren und integrierbar sind, hat man $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$, insbes. $\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$,

(4) $\hat{G}(\xi) = G(\xi)$.

(ebenfalls → Vorl. H.A. oder Grafakos, manches ist leicht nachzurechnen, sei zur Übung empfohlen.)

Damit folgt $\hat{G}_t(\xi) \underset{(2)}{=} \hat{G}(\sqrt{2t}\,\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-t|\xi|^2}$ (*)

und weiter

$$\widehat{G_t * G_s}(\xi) \underset{(1)}{=} (2\pi)^{n/2} \hat{G}_t(\xi)\hat{G}_s(\xi) \underset{(*)}{=} (2\pi)^{-n/2} e^{-t|\xi|^2} e^{-s|\xi|^2}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} e^{-(t+s)|\xi|^2} = \widehat{G_{t+s}}(\xi)$$

$\Longrightarrow$ $G_t * G_s = G_{t+s}$, und weil die Faltung assoziativ ist, ist damit die Halbgruppeneigenschaft gezeigt.

$\mathcal{F}$ injektiv

Um den infinitesimalen Generator A von $(T(t))_{t\geq 0}$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst schnell fallende Fkten.

$$f \in S(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

Dieser Funktionenraum wird auch Schwartz-Raum, seine Elemente Schwartz-Funktionen genannt.

<u>Kurze Erläuterung zu $S(\mathbb{R}^n)$:</u>

- Mit $s_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$, wird ein abzählbares Halbnormensystem auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert, mit dessen Hilfe man die Metrik
$$d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} \frac{s_k(f-g)}{1+s_k(f-g)}, \quad s_k = s_{\alpha_k,\beta_k}, \quad (\alpha_k,\beta_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ eine}$$
Abzählung von $\mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$, definieren kann, dadurch wir (S,d) zu einem vollständigen metrischen Vektorraum.
- Es ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ und daher $S(\mathbb{R}^n)$ ein dichter linearer Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$, und von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, sofern $1\leq p<\infty$, $k\in\mathbb{N}_0$.
- Es ist $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung; die L^p-Norm kann durch eine endliche Summe von $s_{\alpha\beta}$ kontrolliert werden. Ebenso für $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
- Gauss-Funktionen liegen in $S(\mathbb{R}^n)$.

- $S(\mathbb{R}^n)$ ist abgeschlossen unter

$$f \mapsto f\cdot g,\ f \mapsto f * g\ (g \in S(\mathbb{R}^n)),\ f \mapsto \nabla^\alpha f,\ f \mapsto x^\beta f.$$

- Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus (insbes. stetig mit stetiger Inverser).

Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $t \geq 0$ ist auch $T(t)f = G_t * f \in S(\mathbb{R}^n)$ (4. und 5. Eigenschaft oben) und wir haben

$$\mathcal{F}\left(\tfrac{1}{t}(T(t)f - f)\right)(\xi) = \tfrac{1}{t}\left(e^{-t|\xi|^2} - 1\right)\hat{f}(\xi) \longrightarrow -|\xi|^2 \hat{f}(\xi) = \widehat{\Delta f}(\xi)$$

und damit ist der Laplace-Operator unser Kandidat für, genauer: Wir vermuten $A|_{S(\mathbb{R}^n)} = \Delta|_{S(\mathbb{R}^n)}$.

Dazu brauchen wir aber Konvergenz in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und nicht nur die punktweise Konvergenz der Fouriertransformierten. Wir zeigen etwas mehr, nämlich:

<u>Beh.</u>: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f) = \Delta f$ mit Konvergenz in $S(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung: Da $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ mit einer stetigen Einbettung ist dann auch $\lim\limits_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}(T(t)f - f) - \Delta f \right\|_p = 0$.

Also $A|_{S(\mathbb{R}^n)} = \Delta|_{S(\mathbb{R}^n)}$ (wie vermutet) und $S(\mathbb{R}^n) \subset D_A$.

<u>Bew.</u> der Beh.: Wir setzen $g(t) = \frac{1}{t}(T(t)f - f) - \Delta f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dann $|g(t)(x)| = (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, \widehat{g(t)}(\xi)\, d\xi \right| \leq \ldots$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{ix\xi} \widehat{g(t)}(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{g(t)}(\xi)| d\xi$$

und die rechte Seite ist unabhängig von x. Also

$$\|g(t)\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{t}(e^{-t|\xi|^2} - 1) + |\xi|^2 \right| |\hat{f}(\xi)| \, d\xi$$

Der Integrand konvergiert (wie wir oben gesehen haben) für $t \to 0$ punktweise gegen Null. Um eine Majorante zu finden, schreiben wir $e^{-t|\xi|^2} = 1 - |\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \cdot t$ ($\eta \in (0,t)$) und erhalten

$$\left| \frac{1}{t}(e^{-t|\xi|^2} - 1) + |\xi|^2 \right| \leq |\xi|^2 (1 - e^{-t|\xi|^2}) \leq |\xi|^2,$$

so dass mit $|\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|$ eine integrable Majorante gefunden ist. Es folgt $\lim_{t \to 0} \|g(t)\|_\infty = 0$. Weil ∇^α und $T(t)$ vertauschen, zeigt dasselbe Argument, dass auch $\lim_{t \to 0} \|\nabla^\alpha g(t)\|_\infty = 0$ gilt.

Der Multiplikator mit x^β ($\beta \in \mathbb{N}_0^n$) vertauscht nicht mit $T(t)$, und daher ist das Argument in diesem Fall etwas komplizierter. Wie oben haben wir

$$\|x^\beta g(t)\|_\infty \leq \|\mathcal{F}(x^\beta g(t))\|_{L^1_\xi} = \|\nabla_\xi^\beta \hat{g}(t)\|_{L^1_\xi}$$

$$\leq \sum_{\gamma + \delta = \beta} \left\| \left(\nabla_\xi^\gamma \left(\frac{1}{t}(e^{-t|\xi|^2} - 1) + |\xi|^2 \right)\right) \{\nabla_\xi^\delta \hat{f}(\xi)\} \right\|_{L^1_\xi},$$

wobei der zweite Faktor für jedes $\delta \in \mathbb{N}_0^n$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt, also keine Probleme bereitet. Schauen wir uns also die partiellen Ableitungen von $\underbrace{\frac{1}{t}(e^{-t|\xi|^2} - 1) + |\xi|^2}_{=: h_t(\xi)}$ an!

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} h_t(\xi) = -2\xi_j e^{-t|\xi|^2} + 2\xi_j = 2\xi_j (1-e^{-t|\xi|^2}) \begin{cases} \to 0 \ (t\to 0) \\ |\ldots| \leq 2|\xi_j| \end{cases}$$ (90)

$$\frac{\partial^2 h_t(\xi)}{\partial \xi_k \partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} 2\xi_j (1-e^{-t|\xi|^2}) = 2(\delta_{jk}(1-e^{-t|\xi|^2}) + 2t\xi_k\xi_j e^{-t|\xi|^2}).$$

Auch das $\to 0 \ (t\to 0)$ und $|\ldots| \lesssim 1+|\xi|^2 \quad (0\leq t\leq 1)$

Für höhere Ableitungen können wir feststellen, dass sie (mindestens) einen Faktor t enthalten (also punktweise gegen Null streben) und für $0\leq t\leq 1$ durch ein Polynom $P(\xi)$ majorisiert werden, dessen Wachstum aber von $\nabla_\xi^\delta \hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ absorbiert wird, so dass auch $P\cdot\nabla_\xi^\delta \hat{f} \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Also ist auch hier der Lebesguesche Konvergenzsatz anwendbar (auf jeden Summanden) und liefert

$$\lim_{t\to 0} \| x^\beta g(t)\|_\infty = 0,$$

und damit ist die Beh. gezeigt.

Wir werden bald sehen, dass der Generator einer C^0-Halbgruppe stets abgeschlossen, also $(D_A, \| \ \|_{D_A})$ vollständig ist. Da $S(\mathbb{R}^n) \subset W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, folgt aus dem Gezeigten, dass der Erzeuger der Wärmeleitungshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq p<\infty)$ gegeben ist durch

$$D_A = W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \ (= H^{s,p}(\mathbb{R}^n)); \quad A = \Delta$$

(Fortsetzung von $A|_{S(\mathbb{R}^n)}$ bzw. Distributionsableitungen).

Verallgemeinerung:

Zumindest der erste Teil unserer Diskussion ist mühelos verallgemeinerbar. Wenn $(K_t)_{t>0}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$ (oder allgemeiner einer LCA-Gruppe G) ist, die der "Funktionalgleichung"

$$K_t * K_s = K_{t+s}$$

genügt, so wird durch

$$T(0) := I, \qquad T(t) := K_t * \qquad (t>0)$$

eine stark stetige Halbgruppe auf $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ und ebenso auf $C_0(G) = \{f \in C(G) : \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ (*) definiert. Zwei Beispiele dieses Typs seien zumindest skizziert:

(i) Die Wärmeleitungshalbgruppe auf $\mathbb{T}^n$:

Hier gewinnt man eine approximative Einheit durch Periodisierung der Gaussfunktionen G_t, d.h. man setzt

$$\gamma_t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} G_t(x-2\pi k).$$

Da G_t schnell fallend ist, konvergiert die Reihe, es ist $\|\gamma_t\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} = \|G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ und $(\gamma_t)_{t>0}$ bildet eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}^n$. Die Funktional-

---

(*) Wenn G kompakt ist, wie z.B. der Torus $G = \mathbb{T}$, so ist $C_0(G) = C(G)$.

gleichung wird vererbt, man hat $\gamma_{t+s} = \gamma_t * \gamma_s$, wobei (92)
die Faltung auf dem n-dim. Torus gegeben ist durch

$$f * g\,(x) = (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x-y)\,g(y)\,dy .$$

Setzt man wie oben $T(0) := I$ und $T(t) := \gamma_t *$,
so entsteht also eine C^0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{T}^n)$,
$1 \le p < \infty$, oder auf $C(\mathbb{T}^n)$. Der infinitesimale
Generator ist ebenfalls

$$A = \Delta \quad \text{mit} \quad D_A = W^{2,p}(\mathbb{T}^n) \;\; (= H^{2,p}(\mathbb{T}^n))$$

wobei die Norm auch als $\| \mathcal{F}^{-1}(1+|k|^2)\mathcal{F} f \|_{L^p(\mathbb{T})}$,
$\mathcal{F} : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ angeschrieben werden kann. Die
Fouriertransformation ist hier die Abbildung
von f auf die Folge der Fourierkoeffizienten.

Die Rolle von $S(\mathbb{R}^n)$ (in der Diskussion um den
infinitesimalen Generator) wird übernommen von
$C^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit Halbnormensystem $s_\alpha(f) = \| \nabla^\alpha f \|_\infty$,
$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. (Da $\mathbb{T}^n$ kompakt ist, braucht man die Bedingung "schnell fallend" nicht zu stellen.) Da
∇^α mit $T(t)$ vertauscht, kann man auf einen
Teil der Rechnungen sogar verzichten.

(ii) Beim zweiten wahren Bsp. dieses Faltungstyps geht es um den Poissonkern auf dem eindimensionalen Torus $\mathbb{T}$. Dieser ist für $r \in (0,1)$ gegeben durch

$$P_r(\vartheta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\vartheta} \overset{(*)}{=} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2}$$ (*) zwei geometrische Reihen! (93)

Es ist eine einfache Aufgabe in der Fourieranalysis, zu überprüfen, dass es sich um eine approximative Einheit handelt, wobei $\lim_{\varepsilon\to 0}$ durch $\lim_{r\to 1}$ zu ersetzen ist. Um hieraus eine C^0-Halbgruppe zu bauen, berechnen wir die Faltung (auf $\mathbb{T}$ definiert durch $f*g(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta-t)g(t)dt$)

$$P_r * P_s(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta-t)P_s(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell,k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(\vartheta-t)} s^{|\ell|} e^{i\ell t}\,dt$$

geom. Reihe konvergiert glm. auf $B_{1-\varepsilon}(0)$

$$= \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} r^{|k|} s^{|\ell|} e^{ik\vartheta}\cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)t}dt}_{=\delta_{k,\ell}}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (r\cdot s)^{|k|}\cdot e^{ik\vartheta} = P_{r\cdot s}(\vartheta)$$, also

$$P_r * P_s = P_{r\cdot s},$$

was nicht die Funktionalgleichung einer C^0-Halbgruppe ist, aber leicht geheilt werden kann. Dazu setzen wir $r = r(t) = e^{-t}$, $s = s(s) = e^{-s}$, beide für $s,t\geq 0 \in (0,1]$, und definieren

$$T(0)f := f \quad \text{und, für } t>0, \quad T(t)f := P_{r(t)} * f.$$

Dann sind auf $L^p(\mathbb{T})$ für $1 \le p < \infty$ die Halbgruppeneigenschaften erfüllt, die starke Stetigkeit folgt aus den Eigenschaften einer approximativen Einheit (nicht für $p=\infty$!). Was ist der infinitesimale Generator?

Hier nur formale Rechnung:

$$r(t) = e^{-t} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -e^{-t} = -r(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr} = -r\frac{d}{dr}$$

Für den Erzeuger A der Halbgruppe folgt daraus

$$Af = \frac{d}{dt} T(t) f \Big|_{t=0} = -r\frac{d}{dr} P_r * f \Big|_{r=1}$$

$$= -r \frac{d}{dr} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e_k * f \Big|_{r=1} \qquad (e_k(\vartheta) = e^{ik\vartheta})$$

glm. konv. der Ableitung für $r<1$

$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| r^{|k|} e_k * f \Big|_{r=1} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| e_k * f .$$

Nun ist $e_k * f(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(\vartheta - t)} f(t)\,dt$

$$= e_k(\vartheta) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt = \hat{f}(k)\cdot e_k(\vartheta),$$

wobei $\hat{f}(k)$ der k-te Fourierkoeffizient von f ist. Also:

$$Af = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -|k|\,\hat{f}(k)\, e_k = \mathcal{F}^{-1}(-|k|)\,\mathcal{F} f,$$

der "Fourier-Multiplikator" mit der Fkt. $k \mapsto -|k|$.

Hierbei ist $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z}),\ f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} =: \mathcal{F}f$

die Fouriertransformation mit Inverser (sofern $\mathcal{F}f$ in $\ell^1(\mathbb{Z})$ liegt)

$$\mathcal{F}^{-1}: \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{T}), \quad (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\cdot}.$$

Nun hat man $\mathcal{F}(\frac{d}{d\vartheta} f)(k) = ik\hat{f}(k)$, und der Fourier-Multiplikator $H := \mathcal{F}^{-1} - i\,\mathrm{sign}(k)\,\mathcal{F}$ wird als Hilbert-Transformation bezeichnet. Für $1<p<\infty$ ist

$$H: L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{T}), \quad f \longmapsto Hf$$

stetig, was nur im Fall $p=2$ leicht zu zeigen ist. Setzen wir beides zusammen, erhalten wir (für $p>1$!)

$$A = -H\frac{d}{d\vartheta} \quad \text{mit Def.-Bereich } \mathcal{D}_A = W^{1,p}(\mathbb{T}).$$

Inwiefern mit dieser Halbgruppe bzw. dem Poissonkern ein klassisches Randwertproblem für eine "richtige" PDG gelöst werden kann, mit dieser Frage beschäftigen wir uns in den Übungen.

Die in diesem (allgemeinen) Beispiel vorgestellte Methode – Lösung eines Cauchy-Problems mit Hilfe von (gleichungsspezifischen) approximativen Einheiten bzw. Faltungskernen – ist eigentlich eine typische Anwendung der Fourieranalysis. Sie setzt voraus, dass der Definitionsbereich der gesuchten Lösung u. die Gestalt $I \times G \ni (t,x)$ hat, wobei auf G eine Gruppenstruktur gegeben sein muß, damit man falten kann. Betrachtet man Probleme auf $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^n$ offen, muß man sich zusätzliche Argumente überlegen, ggf. das Problem ganz anders angehen.

Die Halbgruppentheorie erweist sich als eine allgemeinere bzw. abstraktere Theorie, die die Fouriermethoden als Spezialfälle umfasst.

Wir listen zunächst einige grundlegende einfache Eigenschaften (9)
stark stetiger Halbgruppen her.

Lemma 2: Es sei $T = (T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem B-Raum E. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so dass

$$\| T(t) \| \leq M \exp(\omega t) \qquad (B)$$

Zum Beweis benötigen wir ein etwas tiefer liegendes Ergebnis aus der (Einführung in die) Funktionalanalysis, nämlich das

Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit: Es seien E ein B-Raum und F ein normierter Vektorraum sowie $\mathcal{A} \subset L(E,F)$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren. Wenn gilt, dass

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \| Ax \|_F < \infty \qquad \forall x \in E,$$

dann ist $\mathcal{A}$ bereits gleichmäßig beschränkt, d.h. es ist

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \| A \|_{E \to F} < \infty .$$

(Wird auch als "uniform boundedness principle" oder "Satz von Banach-Steinhaus" bezeichnet. Vgl. Vorlesung "Einführung in die FA" (Braun), oder: Werner, "Funktionalanalysis", Thm. IV, 2.1)

Bew. des Lemmas: Wir wenden das Prinzip der glm. Beschränktheit an auf die Operatorenfamilie

$$\mathcal{A} := \{T(t) : t \in [0,1]\} \subset L(E)$$

Da T stark stetig sind, sind für jedes $x \in E$ die Abbildungen

$$T(\cdot)x : [0,1] \to E, \quad t \mapsto T(t)x \qquad \text{und}$$

$$\| T(\cdot)x \| : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \| T(t)x \|$$

stetig, und letztere nimmt auf $[0,1]$ an, d.h. $\forall x \in E$ gilt

$$\sup_{t\in[0,1]} \| T(t)x \| = \max_{t\in[0,1]} \| T(t)x \| < \infty.$$

Nach dem "Prinzip..." also $\sup_{t\in[0,1]} \| T(t) \| =: M < \infty$.

Wg. $T(0) = I$ gilt $M \geq 1$, und wir setzen $\omega := \log(M)$.

Für $t \geq 0$ finden wir $m \in \mathbb{N}$, so dass $t \leq m \leq t+1$, und erhalten

$$\| T(t) \| = \| T(\tfrac{t}{m})^m \| \leq \| T(\tfrac{t}{m}) \|^m \leq M^m \leq M \cdot M^t.$$

Wg. $M = \exp(\omega)$ ist $M^t = \exp(t\omega)$, das ist die Beh. $\square$

Df.: Es sei $T = (T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem B-Raum E.

(a) Die Zahl $\omega(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1$ so dass (8) gilt mit $M_\omega\}$

heißt die Wachstumsschranke von T. $\longrightarrow$

(b) Falls (B) mit $\omega = 0$ gilt, heißt T <u>beschränkt</u>.

(c) Falls (B) mit $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, heißt T eine <u>Kontraktionshalbgruppe</u>.

(d) Falls (B) mit einem $\omega < 0$ gilt, heißt T exponentiell stabil.

<u>Lemma</u> 3: Es sei $T = (T(t))_{t \geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem B-Raum E mit Generator $A : E \supset D_A \to E$. Dann gilt

(a) Für alle $x \in D_A$ ist $T(t)x \in D_A$ und

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x;$$

(b) für alle $x \in E$ und $t > 0$ ist $\int_0^t T(s)x\,ds \in D_A$

und
$$T(t)x - x = A \cdot \int_0^t T(s)x\,ds$$

sowie, falls $x \in D_A$,
$$\ldots = \int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

<u>Bew.</u>: (a) Hier ist $x \in D_A$ und für $h > 0$ haben wir

$$\frac{1}{h}(T(h) - I)T(t)x = T(t) \cdot \frac{1}{h}(T(h) - I)x \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h > 0}]{} T(t)Ax,$$

da $T(t)$ stetig ist.

Das zeigt bereits, dass $T(t)x \in D_A$, und daraus folgt

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h}(T(h) - I)T(t)x = AT(t)x,$$ also die zweite

Gleichung in (a). Nun ist noch der Fall $h < 0$ zu betrachten, bzw. für $h>0$ der Ausdruck

$$\frac{1}{-h}(T(t-h)-T(t))x = T(t-h)\cdot\frac{T(h)-I}{h}\cdot x$$

Hierfür haben wir

$$\|T(t-h)\cdot\frac{T(h)-I}{h}x - T(t)Ax\| \leq \|(T(t-h)-T(t))Ax\|$$

$$+ \|T(t-h)\left(\frac{T(h)-I}{h}x - Ax\right)\| = I_h + II_h,$$

wobei $\lim_{h\to 0} I_h = 0$ allein aus der starken Stetigkeit folgt.

Für II_h haben wir mit Lemma 2:

$$II_h \leq \|T(t-h)\| \cdot \|\frac{1}{h}(T(h)-I)x - Ax\|$$

$$\leq M\exp(|\omega|t)\,\|\frac{1}{h}(T(h)-I)x - Ax\| \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ h>0}]{} 0$$

und damit ist (a) gezeigt.

(b) Hier ist $x\in E$ und $t>0$, und wir wollen zeigen, dass der Grenzwert

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)x\,ds$$

existiert. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\cdot\int_0^t (T(s+h)-T(s))x\,ds$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds\right) = \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \int_0^h T(s)x\,ds\right)$$

$$\xrightarrow{h\to 0} T(t)x - x.$$

Hauptsatz

Damit ist $\int_0^t T(s)x\,ds \in D_A$ und die erste Gleichung in

(b) gezeigt. Für $x \in D_A$ haben wir

$$\int_0^t T(s)Ax\,ds = \int_0^t A\,T(s)x\,ds \qquad (\text{nach (a)})$$

$$= \int_0^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)-I)\,T(s)x\,ds$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)-I)\int_0^t T(s)x\,ds = A\int_0^t T(s)x\,dx$$

Lebesguescher Konvergenzsatz, denn

$$\left\|\frac{1}{h}(T(h)-I)\,T(s)x\right\| \le M\exp(|\omega|t)\left\|\frac{1}{h}(T(h)-I)x\right\|,$$

und der zweite Faktor ist ebenfalls beschränkt, da konvergente Folgen beschränkt sind. □

Satz 1: Es seien E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ der Generator einer C^0-Halbgruppe T. Dann ist A dicht definiert, abgeschlossen, und T wird durch A eindeutig festgelegt.

Bew.: (1) D_A ist dicht in E, denn nach Lemma 3 (b) ist

$$D_A \ni \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,dx \longrightarrow x \in E \quad (\text{beliebig}).$$

(2) Abgeschlossenheit: Sei $(x_k)_k$ eine Folge in D_A mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in E$ und $\lim_{k\to\infty} Ax_k = y \in E$ (Konvergenz in E).

Dann ist für $t > 0$, ebenfalls nach Lemma 3 (b)

$$T(t)x - x = \lim_{k\to\infty} T(t)x_k - x_k = \lim_{k\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_k\,ds = \int_0^t T(s)y\,ds,$$

denn $\left\| \int_0^t T(s)Ax_k - T(s)y\,ds \right\| \leq \int_0^t \|T(s)\|\,\|Ax_k - y\|\,ds$

$$\leq M \cdot \exp(|\omega| t) \cdot t \cdot \|Ax_k - y\| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

Lemma 2

Hieraus folgt mit dem Hauptsatz

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \longrightarrow y \quad (t \to 0,\ t > 0),$$

und das heißt $x \in D_A$ sowie $Ax = y$.

(3) Eindeutigkeit der erzeugten Halbgruppe.

Sei $(S(t))_{t \geq 0}$ eine weitere und, für $x \in D_A$, $s \in [0,t]$

$$u(s) = T(s)S(t-s)x.$$

Dann ist (Rechnung wie beim Beweis der Produktregel für Funktionen mit Werten in einer B-Algebra!)

$$\frac{du}{ds}(s) = AT(s)S(t-s)x \underbrace{+\,T(s)\cdot(-A)S(t-s)x}_{\text{Lemma 3 (a)}} = 0$$

Denn ist u nach dem Hauptsatz konstant und

$$S(t)x = u(0) = u(t) = T(t)x \quad \forall x \in D_A.$$

Da nach (1) A dicht definiert ist, folgt $S(t) = T(t)$.

Da ferner $t > 0$ in diesem Argument beliebig war, gilt $S = T$. □

kommen wir zurück auf das abstrakte Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u(0) = u_0 \in D_A \subset E \qquad (CP)$$

für die homogene lineare Gleichung. Zunächst eine

<u>Def.</u>: Es sei E ein B-Raum und $A: E \supset D_A \to E$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator. Dann heißt das Cauchy-Problem (CP) <u>klassisch ~~wohlgestellt~~</u>, falls

(i) zu jedem $u_0 \in D_A$ genau eine Lösung

$$u \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A)$$

von (CP) existiert, und

(ii) der Lösungsoperator $S_t : D_A \to C^1([0,t], E) \cap C([0,t], D_A)$

$$u_0 \mapsto S_t u_0 = u|_{[0,t]} \quad (u = \text{eindeutige Lös. von (CP)})$$

für jedes $t > 0$ stetig ist, genauer,

wenn für jedes $t > 0$ die Abschätzungen

$$\sup_{0 \le s \le t} \|u(s)\|_E \le C_t \|u_0\|_E \quad \text{und}$$

$$\sup_{0 \le s \le t} \|Au(s)\|_E + \|\frac{du}{dt}(s)\|_E \le 2C_t \|Au_0\|_E$$

gelten.

(Hierbei ist zu beachten, dass S_t stets linear ist. Also ist Stetigkeit von S_t im Nullpunkt bereits gleichbedeutend mit globaler Lipschitz-Stetigkeit, wie sie in den obigen Abschätzungen ausgedrückt ist.)

Satz 2: Es sei E ein B-Raum und $A : E \supset D_A \to E$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann gilt: Das Cauchy-Problem (CP) ist genau dann klassisch wohlgestellt, wenn der Operator A eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf E erzeugt.

Bew.: (1) A erzeugt eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$.

(i) Existenz: Wir setzen für $u_0 \in D_A$

$$u : [0,\infty) \longrightarrow E, \quad t \mapsto u(t) := T(t)u_0 .$$

Dann gelten:

- u ist stetig (Def. von "stark stetig");
- $u(t) \in D_A \quad \forall\, t \geq 0$ (Lemma 3 (a)) und
- die Abbildung: $Au : [0,\infty) \to E, \; t \mapsto Au(t)$ $(= AT(t)u_0 = T(t)Au_0)$ ist ebenfalls stetig.

Damit ist $u \in C([0,\infty), D_A)$.

Ferner gilt (nach Lemma 3 (a)) für $t \geq 0$

$\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$, d.h. die Dgl. ist erfüllt und

$\frac{du}{dt} \in C([0,\infty), E)$. Die Regularitätseigenschaften können wir zusammenfassen zu

$$u \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A) ;$$

Da $u(0) = u_0$ (Eigenschaft (1) einer C^0-Halbgruppe), (10)
ist u eine Lösung von (CP).

(ii) Eindeutigkeit: Sei $v \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A)$
eine weitere Lösung von (CP) mit $v(0) = u_0$. Dann
betrachten wir für $0 \le s \le t$ die Funktion

$$w(s) := T(s)\, v(t-s)$$

Dgl.

$$\Rightarrow \quad \frac{dw}{ds}(s) = A\,T(s)\,v(t-s) + T(s)(-A)\,v(t-s) = 0$$

Lemma 3 (a)

Daher ist w konstant und

$$v(t) = w(0) = w(t) = T(t)\,v(0) = T(t)\,u_0 = u(t).$$

(iii) Stetige Abhängigkeit: Wir benutzen Lemma 2.
Das ergibt für $0 \le s \le t$

$$\|u(s)\|_E = \|T(s)\,u_0\|_E \le \|T(s)\|\,\|u_0\|_E \le M e^{|\omega| s}\|u_0\|_E$$

$$\le M e^{|\omega| t}\|u_0\|_E, \quad \text{wähle } C_t = M e^{|\omega| t}.$$

Ebenso ergibt sich die zweite Abschätzung.

(2) Nun sei (CP) wohlgestellt. Wir bezeichnen mit
$u(t, u_0)$ die Lösung von (CP) mit Anfangswert
u_0 zur Zeit $t \ge 0$ und definieren

$$T_0(t)\,u_0 := u(t, u_0) \qquad (u_0 \in D_A!)$$

Dann haben wir aufgrund der stetigen Abhängigkeit

$$\| T_0(t) u_0 \|_E \le \| T_0(t) \| \, \| u_0 \|_E \le C_t \, \| u_0 \| \qquad (*)$$

Aufgrund dieser Stetigkeitsabschätzung können wir $T_0(t)$ von D_A auf E in eindeutiger Weise fortsetzen, indem wir für $u_0 \in E$ definieren

$$T(t) u_0 := \lim_{k \to \infty} T_0(t) u_{0,k} \, ,$$

wobei $(u_{0,k})_k$ eine Folge in D_A ist mit $\lim_{k\to\infty} \| u_{0,k} - u_0 \|_E = 0$

Dann genügt $T(t)$ ebenfalls der Abschätzung (*), ist also ein beschränkter linearer Operator auf E.

Weitere Eigenschaften einer C^0-Halbgruppe:

Für $u_0 \in D_A$ haben wir

(1) $T_0(0) u_0 = u(0, u_0) = u_0$

und

(2) $T_0(t+s) u_0 = u(t+s, u_0) = u(t, u(s, u_0)) = u(t, T_0(s) u_0)$

$$= T_0(t) T_0(s) u_0$$

und für $u_0 \in E$ erhalten wir (1) und (2) durch Approximation.

(3) starke Stetigkeit. Für $u_0 \in D_A$ ist

$$T_0(t+h) u_0 = u(t+h, u_0) \longrightarrow u(t, u_0) = T_0(t) u_0$$

da $u \in C([0,\infty), E)$

Für $u_0 \in E$ wählen wir eine Folge $(u_{0,k})_k$ in D_A, so dass

$\lim_{k\to\infty} \| u_{0,k} - u_0 \|_E = 0$. Dann ist

$$\| (T(t+h) - T(t)) u_0 \|_E \leq \| T(t+h) (u_0 - u_{0k}) \|_E$$

$$+ \| (T(t+h) - T(t)) u_{0,k} \|_E + \| T(t) (u_{0,k} - u_0) \|_E$$

$$\leq (C_t + C_{t+1}) \| u_0 - u_{0,k} \|_E + \| (T(t+h) - T(t)) u_{0,k} \|_E .$$

O.E. $|h| \leq 1$

Jetzt $h \to 0$, dann $k \to \infty$.

Bleibt zu zeigen, dass der Generator B (mit Def.-Bereich D_B) der oben definierten C^0-Halbgruppe mit A übereinstimmt. Dazu sei zunächst

(i) $u_0 \in D_A$. Dann ist

$$A u_0 = \lim_{t\to 0} A u(t) = \lim_{t \to 0} \frac{du}{dt}(t) = \frac{du}{dt}(0) = \ldots$$

Regularitätsaussagen für u

wie oben!

$$\ldots = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (u(t, u_0) - u_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (T(t) - I) u_0 .$$

Die Existenz dieses Grenzwerts bedeutet nun $u_0 \in D_B$ und per definition haben wir

$$A u_0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (T(t) - I) u_0 = B u_0 ,$$

also $D_A \subset D_B$ und $A u_0 = B u_0$ für $u_0 \in D_B$.

Für die umgekehrte Inklusion ($D_B \subset D_A$) sei $u_0 \in D_B$.

Da A dicht definiert ist, existiert eine Folge $(u_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in D_A mit $\lim_{k\to\infty} \| u_{0k} - u_0 \|_E = 0$. Aufgrund von Lemma 3 (b) erhalten wir

$$\underbrace{A \int_0^t T(s)\, u_{0,k}\, ds}_{\in D_A} \underset{(*)}{=} B \int_0^t T(s)\, u_{0,k}\, ds \overset{\text{Lemma 3(b)}}{=} (T(t)-I)\, u_{0,k} \longrightarrow (T(t)-I)\, u_0$$

Nun gilt also für $x_k := \int_0^t T(s)\, u_{0,k}\, ds$ und

$x = \int_0^t T(s)\, u_0\, ds$, dass

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ in } E \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} A x_k = (T(t)-I)\, u_0 = y.$$

Da A abgeschlossen ist, folgt $x = \int_0^t T(s)\, u_0\, ds \in D_A$

und $Ax = A \int_0^t T(s)\, u_0\, ds = (T(t)-I)\, u_0 \;(= y)$.

Also für $t_n > 0$:

$$A \cdot \underbrace{\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)\, u_0\, ds}_{x_n} = \frac{T(t_n)-I}{t_n}\, u_0 \quad \left(\xrightarrow[n\to\infty]{} y\right)$$

Nun benutzt man erneut die Abgeschlossenheit von A um zu schließen, dass

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = u_0 \in D_A \quad \text{und}$$

$$A u_0 = y = \lim_{n\to\infty} \frac{T(t_n)-I}{t_n}\, u_0 = B u_0,$$

und damit ist $D_B = D_A$ und $A = B$ gezeigt. $\square$