2. Stark stetige Halbgruppen

2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Zur Lösung des abstrakten Cauchy-Problems

$$u_t = Au + f, \qquad u(t=0) = u_0 \in E,$$

wobei E ein Banachraum, A ein unbeschränkter Operator auf E und f eine E-wertige Funktion ist, suchen wir eine Schar $(T(t))_{t\in I}$ von Evolutionsoperatoren oder auch "Propagatoren", die (fast) dasselbe leisten wie $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ im Fall $A \in L(E)$.

Wir gehen dabei (zunächst) nicht konstruktiv vor, sondern eher axiomatisch, indem wir ein minimales System von Eigenschaften festlegen, die eine solche Operatorenschar haben sollte.

Def.: Eine Familie $(T(t))_{t\geq 0}$ beschränkter linearer Operatoren auf einem Banachraum E heißt eine stark stetige Halbgruppe (kurz: C^0-Halbgruppe), wenn folgendes gilt:

(1) $T(0) = I$ $\quad$ (= Identität)

(2) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall\, s,t \in [0,\infty)$

("Halbgruppeneigenschaft")

(3) T ist stark stetig, d.h. für jedes $x \in E$ ist die Abbildung $T(\cdot)x : [0,\infty) \to E$, $t \mapsto T(t)x$ stetig.

Falls $T(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, so dass die Eigenschaften (1) - (3) erfüllt sind, heißt $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine <u>stark stetige Gruppe</u>.

Gilt anstelle von (3), dass $T : [0,\infty) \to L(E)$, $t \mapsto T(t)$ stetig ist (bezüglich der Operatornorm auf $L(E)$), so heißt $(T(t))_{t\geq 0}$ eine <u>normstetige Halbgruppe</u>.

<u>Def.</u>: Der lineare Operator $A : E \supset D_A \to E$ mit Definitionsbereich

$$D_A := \{x \in E : \exists \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \in E\}$$

und Zuordnungsvorschrift

$$Ax := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$$

heißt der (<u>infinitesimale</u>) <u>Generator</u> oder Erzeuger der C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$.

③

Bem.: (1) Algebraisch hat man etwas mehr als eine Halbgruppe, nämlich eine kommutative Halbgruppe mit Einselement, die wegen (2) isomorph zu $(\mathbb{R}_0^+, +)$ ist. Wenn für $t \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind, folgt

$$I = T(0) = T(t-t) = T(t)T(-t) \Rightarrow T(t)^{-1} = T(-t).$$

In diesem Fall gibt es also zu jedem Operator $T(t)$ eine Inverse, und damit liegt eine Gruppenstruktur vor.

(2) Im Allgemeinen ist $D_A \subsetneqq E$. Wir werden aber sehen, dass D_A in der obigen Situation stets ein dichter linearer Teilraum ist.

(3) Sei $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe, die den Bedingungen (1), (2) genügt, und in einem $t_0 \in \mathbb{R}$ stark stetig ist. Dann gilt für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$\| T(t+h)x - T(t)x \| = \| T(t-t_0)(T(t_0+h)x - T(t_0)x) \|$$
$$\leq \| T(t-t_0) \| \; \| T(t_0+h)x - T(t_0)x \| \longrightarrow 0 \quad (h \to 0),$$

d.h. es handelt sich um eine C^0-Gruppe.

Im Fall einer Halbgruppe ergibt das Argument: Ist $(T(t))_{t\geq 0}$ in einem $t_0 > 0$ stark stetig, so auch in jedem $t > t_0$. (Entsprechendes gilt für Normstetigkeit.)

(4) "Normstetig" ist eine stärkere Eigenschaft als "stark stetig", denn es gilt

$$\| T(t+h)x - T(t)x \|_E \leq \| T(t+h) - T(t) \| \, \|x\|_E .$$

(5) Ist $A \in L(E)$, so ist $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ eine normstetige Gruppe von Operatoren in $L(E)$ mit Generator A. Damit sind aber auch bereits alle normstetigen Halbgruppen gefunden, denn es gilt:

Lemma 1: Ist $(T(t))_{t \geq 0}$ eine normstetige Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren auf einem Banachraum E mit infinitesimalem Operator A, so ist $A \in L(E)$ und $T(t) = e^{tA}$.

Bew.: Wir definieren $V : [0, \infty) \to L(E)$ durch das $L(E)$-wertige Integral

$$V(t) := \int_0^t T(s)\,ds .$$

Nach dem Hauptsatz ist V (stetig) differenzierbar und $\frac{dV}{dt}(0) = T(0) = I$. Für hinreichend kleine t ist dann

$$\left\| \frac{V(t)}{t} - I \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_0^t T(s) - I \, ds \right\| < 1$$

und daher $\frac{V(t)}{t}$ und damit auch $V(t)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertierbar. Wir fixieren ein solches $t_0 > 0$ und schreiben

$$T(t) = V(t_0)^{-1} V(t_0) T(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(s) ds \, T(t)$$

$$= V(t_0)^{-1} \cdot \int_t^{t+t_0} T(s) ds .$$

Hieraus folgt für den infinitesimalen Generator

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T(t) - I) = \frac{dT}{dt}(0) = \frac{d}{dt} V(t_0)^{-1} \int_t^{t+t_0} T(s) ds \Big|_{t=0}$$

$$= V(t_0)^{-1} (T(t_0) - I) \in L(E)$$

und allgemeiner haben wir mit diesem $A \in L(E)$

$$\frac{dT}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T(h) - I) \cdot T(t) = A \, T(t).$$

Für $\gamma(t) = T(t) \cdot e^{-tA}$ ergibt sich mit der Produktregel (→ Übungen)

$$\gamma'(t) = A T(t) e^{-tA} - T(t) \cdot A \cdot e^{-tA} = 0,$$

da $[A, T(t)] = 0$, und $\gamma(0) = I$, also $\gamma(t) = e^{tA}$. □

Damit wird klar, warum man sich in der Def. von C^0-Halbgruppen auf die Forderung "stark stetig" beschränken muss, wenn man eine Theorie für partielle Differentialgleichungen bzw. unbeschränkte Operatoren entwickeln will.

Lemma 2: Es sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem Banachraum E. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$, so dass

$$\| T(t) \| \leq M \exp(\omega t). \qquad (B)$$

Bew.: Wir wenden das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auf die Operatorenschar

$$\mathcal{A} := \{ T(t) : t \in [0,1] \} \subset L(E)$$

an. Da $(T(t))_{t\geq 0}$ stark stetig ist, sind für jedes $x \in E$ die Abbildungen

$$T(\cdot)x : [0,1] \to E, \quad t \mapsto T(t)x \qquad \text{und}$$

$$\| T(\cdot)x \| : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \| T(t)x \|$$

stetig, und letztere nimmt auf $[0,1]$ ihr Maximum an, d.h. für alle $x \in E$ gilt

$$\sup_{t\in[0,1]} \| T(t)x \| = \max_{t\in[0,1]} \| T(t)x \| < \infty .$$

Nach dem "Prinzip..." existiert ein $M \geq 0$, so dass $\sup_{t\in[0,1]} \| T(t) \| \leq M < \infty$. Wegen $T(0) = I$ gilt $M \geq 1$, und wir setzen $\omega := \ln(M) \geq 0$. Für $t \geq 0$ finden wir $n \in \mathbb{N}$, so dass $t \leq n \leq t+1$ und erhalten

$$\|T(t)\| = \|T(\tfrac{t}{m})^m\| \le \|T(\tfrac{t}{m})\|^m \le M^m \le M\cdot M^t.$$

wegen $M = \exp(\omega)$ ist $M^t = \exp(\omega t)$, also

$$\|T(t)\| \le M\exp(\omega t).$$ □

Def.: Es sei $T = (T(t))_{t\ge 0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem Banachraum E.

(a) Die Zahl $\omega(T) := \inf\{\omega\in\mathbb{R} : \exists\, M_\omega \ge 1$, so dass (B) mit $M = M_\omega$ gilt$\}$ heißt die *Wachstumsschranke von T*.

(b) Falls (B) mit $\omega = 0$ gilt, heißt T *beschränkt*.

(c) " (B) " $\omega = 0$ und $M = 1$ gilt, heißt T eine *Kontraktionshalbgruppe*.

(d) Falls (B) mit einem $\omega < 0$ gilt, heißt T *exponentiell stabil*.

Lemma 3: Es sei $(T(t))_{t\ge0}$ eine C^0-Halbgruppe auf einem Banachraum E mit Generator $A : E \supset D_A \to E$. Dann gilt:

(a) Für alle $x \in D_A$ ist $T(t)x \in D_A$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x\,;$$

(b) für alle $x\in E$ und $t>0$ ist $\int_0^t T(s)x\,ds \in D_A$

(8)

und $T(t)x - x = A \cdot \int_0^t T(s)x\,ds$,

was für $x \in D_A$ mit $\int_0^t T(s)Ax\,ds$ übereinstimmt.

Bew.: (a) Hier ist $x \in D_A$ und für $h>0$ haben wir

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)T(t)x = T(t)\frac{1}{h}(T(h)-I)x \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} T(t)Ax,$$

da $T(t)$ stetig ist.

Das zeigt bereits, dass $T(t)x \in D_A$, und daraus folgt

$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}(T(h)-I)T(t)x = AT(t)x$, also die zweite

Gleichung in (a). Nun ist noch der Fall $h<0$ zu untersuchen bzw. für $h>0$ der Ausdruck

$$\frac{1}{-h}(T(t-h)-T(t))\,x = T(t-h)\frac{1}{h}(T(h)-I)x.$$

(Rechenregeln für Grenzwerte stehen uns leider nicht ohne weiteres zur Verfügung!) Hierfür haben wir

$$\|T(t-h)\tfrac{1}{h}(T(h)-I)x - T(t)Ax\| \le \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|$$

$$+ \|T(t-h)(\tfrac{1}{h}(T(h)-I)x - Ax)\| =: I_h + II_h,$$

wobei $\lim_{h\to 0} I_h = 0$ allein aus der starken Stetigkeit von $(T(t))_{t\ge 0}$ folgt. Für II_h ergibt Lemma 2:

$$II_h \le \|T(t-h)\|\,\|\tfrac{1}{h}(T(h)-I)x - Ax\|$$

$$\le M\exp(|\omega| t)\,\|\tfrac{1}{h}(T(h)-I)x - Ax\| \longrightarrow 0 \quad (h\to 0, h>0)$$

und damit ist der Teil (a) gezeigt.

(b) Hier ist zunächst $x \in E$ und $t > 0$, und wir wollen zeigen, dass der Grenzwert

$$A \int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^t T(s)x\,ds$$

existiert. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h) - T(s))x\,ds$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\,ds - \int_0^t T(s)x\,ds \right) = \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \int_0^h T(s)x\,ds \right)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} T(t)x - x \quad \text{nach dem Hauptsatz.}$$

Damit ist $\int_0^t T(s)x\,ds \in D_A$, ferner ist die erste Gleichung in (b) gezeigt. Für $x \in D_A$ haben wir

$$\int_0^t T(s)Ax\,ds = \int_0^t A\,T(s)x\,ds = \int_0^t \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T(h) - I)T(s)x\,ds$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^t T(s)x\,ds = A \int_0^t T(s)x\,ds,$$

wobei die Vertauschung von Grenzwert und Integral durch den Lebesgueschen Konvergenzsatz gerechtfertigt ist, denn wir haben

$$\left\| \frac{1}{h}(T(h) - I)\,T(s)x \right\| \leq \exp(|\omega| t) \left\| \frac{1}{h}(T(h) - I)x \right\|,$$

und der zweite Faktor ist ebenfalls beschränkt, da konvergente Folgen beschränkt sind. $\square$

Satz 1: Es seien E ein Banachraum und $A: E \supset D_A \to E$ der Generator einer C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$. Dann ist A dicht definiert, abgeschlossen, und $(T(t))_{t\geq 0}$ wird durch A eindeutig festgelegt.

Bew.: (1) D_A ist dicht in E, denn für alle $x \in E$ gilt nach Lemma 3 (b)

$$D_A \ni \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds \longrightarrow x \quad (h \to 0).$$

(2) Abgeschlossenheit: Sei $(x_k)_k$ eine Folge in D_A mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in E$ und $\lim_{k\to\infty} Ax_k = y \in E$. Dann ist für $t > 0$, ebenfalls nach Lemma 3 (b)

$$T(t)x - x = \lim_{k\to\infty} T(t)x_k - x_k = \lim_{k\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_k\,ds$$

$$= \int_0^t T(s)y\,ds \quad \text{(Lebesguescher Konvergenzsatz)}$$

Hieraus folgt mit dem Hauptsatz

$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\,ds \longrightarrow y \quad (t \to 0),$$

und das heißt $x \in D_A$ und $Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t) - I)x = y$.

(3) Eindeutigkeit der erzeugten Halbgruppe:

Sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine weitere von A erzeugte C^0-Halbgruppe und, für $x \in D_A$, $s \in [0,t]$

$$u(s) = T(s)\,S(t-s)\,x.$$

Dann ist (Rechnung wie beim Beweis der Produktregel)

$$\frac{du}{ds}(s) = A\,T(s)\,S(t-s)\,x - \underbrace{T(s)\,A}_{\text{Lemma } 3(a)}\,S(t-s)\,x = 0$$

und daher u nach dem Hauptsatz konstant. Es gilt also $u(0) = u(t)$, und das bedeutet $S(t)x = T(t)x$ für alle $x \in D_A$. Da nach (1) A dicht definiert ist, folgt $S(t) = T(t)$, wobei $t \geq 0$ beliebig ist.

<u>Beispiele:</u> (1) Translations(halb)gruppen:

Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$T(t)f(x) := f(x+t).$$

Dann ist für $1 \leq p < \infty$

$$\|T(t)f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

bzw. für $p = \infty$

$$\|T(t)f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x+t)| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist also $T(t): L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ isometrisch und damit insbes. beschränkt mit $\|T(t)\| = 1$.

Eine besondere Rolle spielt der Hilbertraumfall $p=2$.

Der <u>Adjungierte Operator</u> A^* von $A \in L(H)$ (H Hilbertraum) wird definiert durch

$$\langle f, A^* g \rangle := \langle Af, g \rangle \quad \forall f, g \in H.$$

Es gilt $A \in L(H) \Rightarrow A^* \in L(H)$ und $\|A\| = \|A^*\|$. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt unitär, wenn $U^* = U^{-1}$. Das einfachste Beispiel sind orthogonale Matrizen auf dem $\mathbb{R}^n$. Für den Translationsoperator $T(t)$ auf $L^2(\mathbb{R})$ haben wir

$$\langle f, T(t)^* g \rangle = \langle T(t)f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\overline{g}(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x-t)\,dx = \langle f, T(-t)g \rangle$$

und es ist $T(-t) = T(t)^{-1}$, $T(t)$ ist also unitär.

Ferner gelten (jetzt wieder allgemein)

$$T(0)f(x) = f(x), \text{ also } T(0) = I, \quad \text{und}$$

$$T(t+s)f(x) = f(x+t+s) = T(s)f(x+t) = T(t)T(s)f(x),$$

also $T(t+s) = T(t)T(s)$,

und das sind die definierenden Eigenschaften (1) und (2) einer C^0-Halbgruppe. Lediglich die Eigenschaft "stark stetig" ist nicht offensichtlich. Betrachten wir zunächst den Fall

<u>$1 \leq p < \infty$:</u> Hier ist $C_0(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ ein dichter linearer Teilraum, und für $f \in C_0(\mathbb{R})$ gilt punktweise

$$\lim_{t\to 0} f(x+t) = f(x), \text{ also auch } \lim_{t\to 0} |f(x+t) - f(x)|^p = 0.$$

Für (sagen wir) $|t| \leq 1$, $K = \operatorname{supp} f + [-1,1]$ (immer noch kompakt!) haben wir

$$|f(x+t) - f(x)|^p \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \chi_K ,$$

was eine integrierbare Majorante ist. Der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_p^p = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^p dx = 0,$$

also $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_p = 0 \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$.

Ist $f \in L^p(\mathbb{R})$ beliebig, so wählen wir eine Folge $(f_n)_n$ in $C_0(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^p(\mathbb{R})$. Zu $\varepsilon > 0$ sei nun n so groß, dass $\|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist

$$\|T(t)f - f\|_p \leq \|T(t)(f-f_n)\|_p + \|T(t)f_n - f_n\|_p + \|f - f_n\|$$

$$\leq 2\|f - f_n\|_p + \|T(t)f_n - f_n\| < \varepsilon + \|T(t)f_n - f_n\|.$$

Jetzt $t \to 0$, dann $\varepsilon \searrow 0$, und die starke Stetigkeit von $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^p(\mathbb{R})$ ist für $1 \leq p < \infty$ gezeigt.

<u>$p = \infty$:</u> Wir wählen $f = \chi_{[0,1]}$. Dann ist für $t \neq 0$

$$|f(x+t) - f(x)| = 1 \quad \forall\, x \in \cancel{(0,t)} \cancel{\cup} \cancel{(1,1+t)}\ (-t,0) \cup (1-t,1),$$

und letzteres ist <u>keine</u> λ^1-Nullmenge. Also ist

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \|T(t)f - f\|_\infty = 1 \neq 0$$

und damit $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ <u>nicht</u> stark stetig.

<u>Zsf.</u>: Die Transportgruppe ist für $1 \leq p < \infty$ auf $L^p(\mathbb{R})$ eine stark stetige <u>Gruppe von Isometrien</u>, insbesondere eine <u>Kontraktionsgruppe</u>. Für $p = 2$ handelt es sich um eine <u>unitäre Gruppe</u>. Die Transportgruppe auf $L^\infty(\mathbb{R})$ ist hingegen nicht stark stetig.

Im Folgenden sei $1 \leq p < \infty$:

Zur Bestimmung des infinitesimalen Generators der Translationsgruppe sei zunächst $u_0 \in C_0^1(\mathbb{R})$. Hierfür gilt punktweise

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)-I}{t}\, u_0(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(u_0(x+t)-u_0(x)\big) = \frac{du}{dx}$$

mit einer „klassischen" Ableitung $\frac{d}{dx}$. In $L^p(\mathbb{R})$ hat man

$$\Big\| \frac{1}{t}(T(t)-I)u_0 - \frac{du_0}{dx}\Big\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{1}{t}\big(u_0(x+t)-u_0(x)\big) - u_0'(x)\Big|^p dx$$

$$\underset{\text{MWS}}{=} \int_{\mathbb{R}} |u_0'(x+\tau(x)) - u_0'(x)|^p\, dx \qquad \text{mit } |\tau(x)| \le t.$$

Da $u_0 \in C_0^1(\mathbb{R})$ ist, verschwindet der Integrand für $t \to 0$ und wird durch $(2\|u_0'\|_\infty)^p\, \chi_{\mathrm{supp}(u_0)+[-1,1]}$ (wenn $|t|\le 1$) majorisiert. Also gilt

$$Au_0 \underset{\text{def.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)-I)u_0 = \frac{du_0}{dx} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}),$$

und wir haben $C_0^1(\mathbb{R}) \subset D_A$. —

Jetzt zäumen wir das Pferd von der anderen Seite auf und nehmen $u_0 \in D_A$ an. Dann existiert ein $v_0 \in L^p(\mathbb{R})$, so dass

$$\lim_{t\to 0} \Big\| \frac{1}{t}(T(t)-I)u_0 - v_0 \Big\|_p = 0.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(=\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ impliziert das

$$\lim_{t\to 0} \Big(\frac{1}{t}(T(t)-I)u_0, \varphi\Big) = (v_0, \varphi),$$

wobei allgemein

$$(f,g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx$$

und insbesondere

$$\left(\tfrac{1}{t}(T(t)-I)u_0, \varphi\right) = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} (u_0(x+t)-u_0(x))\,\varphi(x)\,dx$$

Lebesgue, wie oben.

$$= \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, \underbrace{\frac{1}{t}(\varphi(x-t)-\varphi(x))}_{= -\frac{\varphi(x+(-t))-\varphi(x)}{(-t)} \to -\varphi'(x)}\,dx \xrightarrow[t\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi'(x)\,dx$$

D.h. wir haben $(v_0,\varphi) = -(u_0,\varphi') \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und damit ist $v_0 = u_0' = \frac{du_0}{dx}$ im Sinne der Distributionsableitung. –

An dieser Stelle definieren wir allgemein für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

Def. (Sobolev-Raum): Für $1 \le p < \infty$ sei

$W^{m,p}(\Omega) := \{ f \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m$ existiert die Distributionsableitung $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$,

wobei $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$. $W^{m,p}(\Omega)$ wird ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{m,p} := \sum_{|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha f\|_p .$$

Damit können wir unsere bisherigen Überlegungen zusammenfassen zu

Für den infinitesimalen Generator A der Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ gilt

$$C_0^1(\mathbb{R}) \subset D_A \subset W^{1,p}(\mathbb{R}). \qquad (*)$$

Hierbei stimmen die Graphennorm auf D_A und die Sobolev-Norm $\| \ \|_{1,p}$ überein.

Wir werden in Kürze zeigen, dass der inf. Generator einer C^0-Halbgruppe stets dicht definiert und abgeschlossen ist. Zusammen mit einem Ergebnis aus den Übungen folgt daraus: $(D_A, \| \ \|_{D_A})$ ist ein Banachraum. Andererseits gelten:

<u>Lemma Sob 1:</u> $(W^{m,p}(\Omega), \| \ \|_{m,p})$ ist vollständig.

<u>Bew.:</u> Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. Dann ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m$ $(\partial^\alpha f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Wegen der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ existieren $f^\alpha \in L^p(\Omega)$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \| \partial^\alpha f_n - f^\alpha \|_p = 0.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ergibt sich hieraus

$$(-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f - f_n, \partial^\alpha \varphi) + (-1)^{|\alpha|}(f_n, \partial^\alpha \varphi)$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\underbrace{(f - f_n, \partial^\alpha \varphi)}_{|\ \ | \le \|f - f_n\|_p \, \|\partial^\alpha \varphi\|_{p'} \to 0 \ (n\to\infty) \text{ Hölder}} + (\partial^\alpha f_n, \varphi) \longrightarrow (f^\alpha, \varphi),$$

d.h. $f^\alpha = \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)$. □

Lemma Sob 2: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Bew.: Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(x)=1$ für $|x|\leq 1$ und $\operatorname{supp}\chi \subset B_{2R}(0)$ sowie $\chi_R(x)=\chi(\frac{x}{R})$, so dass $\chi_R(x)=1$ für $|x|\leq R$ und $\chi_R(x)=0$ für $|x|>2R$.

Dann gilt punktweise für $f\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha|\leq m$

$$\lim_{R\to\infty}\partial^\alpha(\chi_R f - f)(x) = \lim_{R\to\infty}\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} c_{\alpha\beta}\,\partial^\beta(\chi_R-1)(x)\,\partial^{\alpha-\beta}f(x)=0$$

und

$$|\partial^\alpha(\chi_R f-f)(x)|^p \lesssim \sum_{|\beta|\leq|\alpha|}\|\partial^\beta(\chi_R-1)\|_\infty^p\,|\partial^{\alpha-\beta}f(x)|^p,$$

wobei $|\partial^\beta\chi_R(x)| = |\frac{1}{R^{|\beta|}}\partial^\beta\chi(x)| \underset{R\geq 1}{\leq} |\partial^\beta\chi(x)|$, so dass rechts eine integrierbare Majorante steht.

Der Lebesguesche Konvergenzsatz liefert

$$\lim_{R\to\infty}\|\chi_R f - f\|_{m,p}=0,$$

womit gezeigt ist, dass die $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ liegen.

Für einen zweiten Schritt sei $f\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f)$ kompakt, ferner $(J_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ein Friedrichs-Mollifier, d.h. eine approximative Eins auf $\mathbb{R}^n$ bestehend aus C_0^∞-Funktionen. Dann ist

$$\partial^\alpha(J_\varepsilon * f - f) = J_\varepsilon * \partial^\alpha f - \partial^\alpha f$$

und aufgrund der Eigenschaften einer approximativen Einheit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| J_\varepsilon * \partial^\alpha f - \partial^\alpha f \|_p = 0, \qquad (|\alpha| \leq m)$$

also auch $\lim_{\varepsilon \to 0} \| J_\varepsilon * f - f \|_{m,p} = 0$. Da $J_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Kommen wir zurück auf $(*)$, so können wir diese Inklusionskette ergänzen zu

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset C_0^1(\mathbb{R}) \subset D_A \subset W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Die Inklusionen bleiben erhalten, wenn wir die Abschlüsse bezüglich der $W^{1,p}$-Norm bilden, sodass

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \underset{\text{Lemma Sob 2}}{=} \overline{C_0^\infty(\mathbb{R})}^{\| \, \|_{1,p}} \subset \overline{C_0^1(\mathbb{R})}^{\| \, \|_{1,p}} \subset \overline{D_A}^{\| \, \|_{1,p}} \subset \overline{W^{1,p}(\mathbb{R})}^{\| \, \|_{1,p}} \underset{\text{Lemma Sob 1}}{=} W^{1,p}(\mathbb{R})$$

Beachten wir $\| \, \|_{D_A} = \| \, \|_{1,p}$, so ergibt sich als Ergebnis: $\boxed{D_A = W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ und } A = \frac{d}{dx}}$, wobei die distributionelle Ableitung gemeint ist.

Varianten und Verallgemeinerungen:

(i) Wir können auch $T(t)f(x) = f(x+t)$ auf $L^p((0,\infty))$ betrachten, was allerdings nur für $t \geq 0$ Sinn ergibt. Für $1 \leq p < \infty$ erhalten wir dann eine Kontraktions<u>halb</u>gruppe mit Generator

$A = \frac{d}{dx} : D_A = W^{1,p}((0,\infty)) \to L^p((0,\infty)),\ f \mapsto \frac{df}{dx}$,

wobei $\frac{d}{dx}$ eine Distributionsableitung ist.

(ii) Es ist durchaus sinnvoll und machbar, die Translations(halb)gruppe auf Räumen stetiger und beschränkter Funktionen (auf $\mathbb{R}$ bzw. $[0,\infty)$) zu betrachten. Damit beschäftigen wir uns in den Übungen.

(iii) Höhere Dimensionen: Wir fixieren einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (v für Geschwindigkeit = velocity) und setzen für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ oder $f \in C_{(0)}(\mathbb{R}^n)$ o.ä.

$$T_v(t)f(x) = f(x+tv).$$

Wie oben sieht man ein, dass $(T_v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf diesen Räumen eine Kontraktionsgruppe bildet. Der Generator ist in diesem Fall die (distributionelle) Richtungsableitung nach v, d.h.

$$A = \frac{\partial}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} =: v \cdot \nabla$$

(ggf. mit $C_0(\mathbb{R}^n)$ anstelle von $L^p(\mathbb{R}^n)$)

mit Def.-Bereich $D_A := \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \frac{\partial f}{\partial v} \in L^p(\mathbb{R}^n) \}$.

Die Dgl., die man auf diese Weise „löst", ist die sog. „Transportgleichung" $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v}$ $(= v \cdot \nabla u)$, deren Lösung eben darin besteht, ein „Anfangsprofil" u_0 mit konstanter Geschwindigkeit v durch den $\mathbb{R}^n$ zu schieben.

(2) Faltungshalbgruppen

Es sei $(k_\varepsilon)_{\varepsilon\in I}$ eine approximative Einheit auf dem $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner auf einer lokal-konvexen Abelschen (LCA-) Gruppe G, d.h.:

Für alle $\varepsilon \in I$ sei $k_\varepsilon \in L^1(G)$ mit

- $\int_G k_\varepsilon(x)\, dH(x) = 1$;
- Es gibt ein $M > 0$, sodass für alle $\varepsilon \in I$ $\int_G |k_\varepsilon(x)|\, dH(x) \leq M$;
- Für alle Neutral-/Nullumgebungen $U \subset G$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \in I} \int_{G\setminus U} |k_\varepsilon(x)|\, dH(x) = 0.$$

(Hierbei $\lim\limits_{\varepsilon\in I} \ldots = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \ldots$ oder $\lim\limits_{\varepsilon \nearrow 1} \ldots$ oder $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \ldots$.)

Dann hat man den folgenden Approximationssatz:

(1) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(G)$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\in I} \| k_\varepsilon * f - f \|_p = 0.$$

(2) Ist $f \in C_{(0)}(G)$, so ist $\lim\limits_{\varepsilon\in I} \| k_\varepsilon * f - f\|_\infty = 0$.

(Beweisen z.B. in der Vorlesung über harmonische Analysis im SoSe 22; hierbei bedeutet

$f*g(x) = \int_G f(x-y)\, g(y)\, dH(y)$ die Faltung von f und g

und $C_{(0)}(G) = \{ f \in \underset{\text{stetig}}{C(G)} : \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \}$. Falls G kompakt ist: $C_{(0)}(G) = C(G)$.)

Wir setzen ferner voraus: Es gibt eine Bijektion

$$\varepsilon : (0,\infty) \to I, \quad t \mapsto \varepsilon(t),$$

so dass $t \to 0$ genau dann, wenn $\varepsilon(t) \to i_0$ (Grenzpunkt der Indexmenge I), und

$$k_{\varepsilon(t+s)} = k_{\varepsilon(t)} * k_{\varepsilon(s)} . \qquad (*)$$

Dann definieren wir auf $L^p(G)$ $(1 \le p \le \infty)$ die Operatorenschar $(T(t))_{t \ge 0}$ durch

$$T(0)f = f \quad \text{und, für } t > 0, \quad T(t)f = k_{\varepsilon(t)} * f .$$

Aufgrund der Youngschen Ungleichung

$$\| g * f \|_p \le \| g \|_1 \, \| f \|_p$$

ist stets $T(t) \in L(L^p(G))$ und für die Operatornorm gilt $\| T(t) \| \le \| k_{\varepsilon(t)} \|_1 \le M$ (Eigenschaft (2) einer approx. Einheit).(*) $T(0) = I$ gilt per definitionem und aus (*) folgt die Funktionalgleichung $T(t+s) = T(t)T(s)$. Die starke Stetigkeit (in $t_0 = 0$) auf $L^p(G)$ mit $p < \infty$ und auf $C_{(0)}(G)$ folgt aus dem Approximationssatz. Für $t_0 > 0$ aus

$$\| T(t_0 + h) f - T(t_0) f \| \le \underbrace{\| T(t_0) \|}_{\le M} \, \| T(h) f - f \| \to 0 \quad (h \underset{>0}{\to} 0)$$

$$\| T(t_0 - h) f - T(t_0) f \| \le \underbrace{\| T(t_0 - h) \|}_{\le M} \, \| f - T(h) f \| \to 0 \quad (h \underset{>0}{\to} 0)$$

Der infinitesimale Generator A und sein Definitionsbereich D_A einer solchen Faltungshalbgruppe hängen

((*) Ist $k_{\varepsilon(t)}(x) \ge 0 \; \forall x, t$, so ist $M = 1$, und man erhält eine Kontraktions HG.)

von speziellen "Faltungskern" $(k_\varepsilon)_{\varepsilon\in I}$ ab, aber der Nachweis der Halbgruppeneigenschaften ist davon weitgehend unabhängig – lediglich die Voraussetzung (*) ist im Einzelfall zu überprüfen. Konkret:

(2.1) Die Wärmeleitungshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$

Wir starten mit einer normierten Gaussfunktion

$$G(x) = (2\pi)^{-n/2}\cdot e^{-|x|^2/2}, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ |x|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Der Vorfaktor ist so gewählt, dass $\|G\|_1 = 1$. Das Standardverfahren zur Herstellung einer approximativen Eins auf dem $\mathbb{R}^n$ (durch Skalierung) führt auf

$$G_{(\varepsilon)}(x) = \varepsilon^{-n}\, G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2}} \quad (\varepsilon>0)$$

und damit nicht ganz zum Ziel (die Wärmeleitungsgleichung zu lösen). Setzen wir jedoch

$$\varepsilon=\sqrt{2t}$$

(als eine besonders einfache Bijektion $\varepsilon:(0,\infty)\to I=(0,\infty)$), so erhalten wir mit

$$G_t(x) := (2t)^{-n/2}\, G\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

gerade den Wärmeleitungskern, von dem wir (aus Einführung PDE!) wissen, dass dieser mit

$$u(t,x) := G_t * u_0(x)$$

gerade das Cauchy-Problem $u(0,x)=u_0(x)$ für die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x)$$

löst. (Wir können $A=\Delta$ erwarten, aber wie sind die Ableitungen zu verstehen, und was ist D_A?)

Der direkte Nachweis der Identität (*), das ist hier

$$G_{t+s}(x) = G_t(x) * G_s(x), \qquad (**)$$

durch Berechnung der Faltung ist zwar möglich, aber mühsam. Geschickter ist die Verwendung des Faltungssatzes

$$\widehat{f*g}(\xi) = (2\pi)^{4/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

für die Fouriertransformation $\hat{\ }$ auf dem $\mathbb{R}^4$.
(Die Ausführung der Einzelheiten sei als zusätzliche Übungsaufgabe gestellt; beachten Sie dabei $\hat{G} = G$ und $\widehat{f(\lambda\cdot)} = \lambda^{-4}\hat{f}(\frac{\cdot}{\lambda})$ mit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2t}}$.)

Zur <u>Bestimmung des infinitesimalen Generators</u> A und insbesondere seines Definitionsbereichs D_A greifen wir darauf zurück, dass für $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^4)$ durch $u(t,x) := G_t * u_0(x)$ eine klassische Lösung

$u \in C^{1,2}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)) := \{u \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n : \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)\}$

der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ gegeben ist, wie wir in der Einführung PDG gelernt haben. Dann benutzen wir Testfunktionen

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ ist } \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty\},$$

den Raum der schnellfallenden Funktionen, der $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ umfasst und dem auch die Gaussfunktionen G_t, $t>0$, angehören.

(i) Für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ist

MWS $\tau = \tau(x), |\tau| \le |t|$

$$\frac{1}{t}(T(t)-I)\varphi(x) = \frac{1}{t}(G_t * \varphi - \varphi)(x) = \frac{\partial}{\partial t}(G_\tau * \varphi)(x)$$

$$\underset{\text{Theorie}}{\overset{\text{klassische}}{=}} \Delta(G_\tau * \varphi)(x) \underset{\text{ES der Faltung}}{=} G_\tau * \Delta\varphi(x) \xrightarrow[t,\tau\to 0]{} \Delta\varphi(x),$$

und das mit Konvergenz in jeder L^q-Norm, $1 \le q \le \infty$.

(ii) Nehmen wir nun $u_0 \in D_A$ an, so dass

$$L^p\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)-I)u_0 = L^p\text{-}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(G_t * u_0 - u_0) = Au_0$$

Dann folgt für $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ wegen

$$(G_t * u_0, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, u_0(y)\, dy\right)\varphi(x)\, dx = \ldots$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} G_t(y-x)\, \varphi(x)\, dx \Big)\, u_0(y)\, dy$$

(G_t ist gerade!)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} G_t * \varphi(y) \cdot u_0(y)\, dy = (u_0, G_t * \varphi), \text{ dass}$$

$$(Au_0, \varphi) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (G_t * u_0 - u_0, \varphi)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big((u_0, G_t * \varphi) - (u_0, \varphi) \big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \Big(u_0, \frac{1}{t}(G_t * \varphi - \varphi) \Big) \underset{(i)}{=} (u_0, \Delta \varphi).$$

D.h. für $u_0 \in D_A$ handelt es sich bei A um den Laplace-Operator, allerdings gebildet aus Distributionsableitungen. Setzen wir

Distributionsableitung

$$W := \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \exists\, \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n) \},$$

so haben wir ferner $D_A \subset W$ gezeigt.

(iii) Sei nun $u_0 \in W$. Dann zeigt die Rechnung in (i), dass
$$\frac{1}{t}(T(t) - I)\, u_0 = \Delta(G_\tau * u_0),$$
wobei $\tau = \tau(x)$ und der Laplace-Operator im klassischen Sinne zu verstehen ist. (Das klassische Ergebnis erfordert nicht wirklich die Beschränktheit von u_0. Es reicht moderates Wachstum oder $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$.) Jetzt möchten wir den Δ-

Operator auf u_0 ziehen, was der Rechtfertigung bedarf,

auch weil $\tau = \tau(x)$. Also testen wir mit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$(\Delta(G_\tau * u_0), \varphi) = (G_\tau * u_0, \Delta\varphi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\tau(x-y)}(x-y)\, u_0(y)\, dy\; \Delta\varphi(x)\, dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} G_{\tau(x-y)}(x-y)\, \Delta\varphi(x)\, dx\; u_0(y)\, dy$$

klar bei klassischen Ableitungen

$$= (u_0, G_{\tau(-\cdot)} * \Delta\varphi) = (u_0, \Delta(G_{\tau(-\cdot)} * \varphi))$$

wie oben, rückwärts

$$= (\Delta u_0, G_{\tau(-\cdot)} * \varphi) = (G_\tau * \Delta u_0, \varphi)$$

Also haben wir für $u_0 \in W$

$$\frac{1}{t}(T(t) - I)u_0 = G_\tau * \Delta u_0 \longrightarrow \Delta u_0 \quad (t, \tau \to 0) \text{ in } L^p,$$

und damit liegt $u_0 \in D_A$. Zusammen mit (ii) folgt:

<u>Ergebnis:</u> $D_A = W = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \exists\, \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$

und $Au_0 = \Delta u_0$, wobei der Laplace-Operator aus distributionellen Ableitungen gebildet ist.

<u>Bem.</u>: Für $1 < p < \infty$ kann man zeigen, dass $W = W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ mit dem in Bsp. 1 eingeführten Sobolevraum. Für $p = 1$ gilt nur $W^{2,1}(\mathbb{R}^n) \subsetneq W$. (Man kann die Ableitungen erster Ordnung und die gemischten Ableitungen 2. O. für $p = 1$ nicht durch den Laplace-Operator kontrollieren.)

(2.2) Die Wärmeleitungshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{T}^n)$, $1\le p<\infty$

Hier gewinnt man eine approximative Einheit durch Periodisierung der Gaussfunktionen G_t, d.h. man setzt

$$\gamma_t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} G_t(x-2\pi k).$$

Da G_t schnell fallend ist konvergiert die Reihe gleichmäßig samt allen Ableitungen gegen eine in jede Koordinatenrichtung 2π-periodische C^∞-Funktion γ_t. Es gelten:

- $$\|\gamma_t\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n \cong [-\pi,\pi]^n} \gamma_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x)\,dx = \|G_t\|_1 = 1$$
- Die Funktionalgleichung wird vererbt, d.h. man hat $\gamma_{t+s} = \gamma_t * \gamma_s$, wobei die Faltung auf dem Torus ($\hat{=}$ für periodische Funktionen) definiert ist durch
$$f*g(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$
- $(\gamma_t)_{t>0}$ ist eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}^n$.

Setzt man $T(0)=I$, $T(t)u_0(x) = \gamma_t * u_0(x)$, so entsteht eine Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$

auf $L^p(\mathbb{T}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Der infinitesimale Generator ist ebenfalls $A = \Delta$ (Distributionsableitungen). Für $1 < p < \infty$ ist der Definitionsbereich $D_A = W^{2,p}(\mathbb{T}^n)$, im Fall $p=1$ etwas zu modifizieren (entsprechend dem Raum W in (2,1), aber mit periodischen Funktionen.)

Mit Hilfe des Kerns $(\gamma_t)_{t>0}$ bzw. der daraus gebildeten C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ erhält man Lösungen des Anfangswertproblems $u(0,x) = u_0(x)$ für die WLG $u_t = \Delta u$ mit zusätzlicher periodischer Randbedingung.

Anwendung: Für $n=1$ beschreiben die Lösungen die Wärmeausbreitung in einem (metallischen) Kreisring.

(2.3) Im folgenden Bsp. des gleichen Typs ist die Halbgruppeneigenschaft ein wenig versteckt. Wir greifen wieder auf ein Ergebnis der Einführung PDE" zurück: Das Dirichlet-Problem

$$u\big|_{\partial B_1(0)} = g \in C(\partial B_1(0)), \quad B_1(0) \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$$

für die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ wird in $C(\overline{B_1(0)}) \cap C^\infty(B_1(0))$ eindeutig gelöst durch

$$u(y) = \begin{cases} g(y), & \text{falls } |y|=1, \\ \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial B_1(0)} g(x) \frac{1-|y|^2}{|x-y|^n} dS_x, & \text{falls } |y|<1. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet ω_n die Oberfläche der n-dim. Einheitskugel. (EPDE, Abschnitt 2.6 (I), Satz 2). Es handelt sich um ein Randwertproblem für eine elliptische Gleichung, also nicht um ein Evolutionsproblem. Allerdings weist die Lösungsformel eine Faltungsstruktur auf. Diese wird deutlicher in $n=2$ Dimensionen, wenn wir ebene Polarkoordinaten

$$y=(y_1,y_2) = r(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = re^{i\vartheta} \in B_1(0)$$

$$x=(x_1,x_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi) = e^{i\varphi} \in \partial B_1(0)$$

mit $0 \leq r < 1$ und $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$ verwenden. Dann nimmt die Lösung nämlich für $|y|<1$ die folgende Gestalt an:

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x|=1} g(x) \frac{1-|y|^2}{|x-y|^2} dS_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\vartheta)+r^2} d\varphi$$

bzw. mit $h(\varphi) = g(e^{i\varphi})$ und dem Poissonkern

$$P_r(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}$$

2 geometrische Reihen

$$u(re^{i\vartheta}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) P_r(\vartheta - \varphi)\, d\varphi = P_r * h(\vartheta).$$

Es ist eine einfache Aufgabe in Fourier-Analysis, zu zeigen, dass es sich bei $(P_r)_{r\in(0,1)}$ für $r \to 1$ (statt $\varepsilon \to 0$) um eine approximative Einheit handelt. Wie sieht es laut der Gleichung

$$P_{r(s+t)} = P_{r(s)} * P_{r(t)} \qquad (*, \text{S. } 21)$$

aus, die wir benötigen, um durch

$$T(0)f = f, \qquad T(t)f = P_{r(t)} * f \quad (t>0)$$

eine Halbgruppe zu definieren? Dazu betrachten wir für $r, s \in (0,1)$ die Faltung

$$P_r * P_s(\vartheta) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi) P_s(\vartheta - \varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\varphi}\Big)\Big(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} s^{|\ell|} e^{i\ell(\vartheta-\varphi)}\Big)\, d\varphi$$

glm. konv. der geom. Reihen

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k,\ell\in\mathbb{Z}} r^{|k|} s^{|\ell|} e^{i\ell\vartheta} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)\varphi}\, d\varphi}_{= 2\pi\,\delta_{k\ell}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (r\cdot s)^{|k|} \cdot e^{ik\vartheta} = P_{r\cdot s}(\vartheta),$$

also $\quad P_r * P_s(\vartheta) = P_{r\cdot s}(\vartheta).$

Das ist nicht direkt das, was wir brauchen, aber indem wir (31)

$$r : [0,\infty) \to (0,1], \quad t \mapsto r(t) := e^{-t}$$

setzen, erreichen wir $P_{r(t+s)} = P_{r(t)} * P_{r(s)}$ und damit die Funktionalgleichung $T(t+s) = T(t)T(s)$. Beachten wir noch, dass $P_r(\vartheta) \geq 0 \;\; \forall \vartheta \in [-\pi,\pi]$ und somit

$$\|P_r\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta)\,d\vartheta = 1 \quad \forall r \in (0,1), \text{ was } \|T(t)\| \leq 1$$

nach sich zieht, gelangen wir zu folgendem:

<u>Zwischenergebnis:</u> Es seien $1 \leq p < \infty$, $(P_r)_{r\in(0,1)}$ der Poissonkern, $r(t) = e^{-t}$ und, für $f \in L^p(\mathbb{T})$

$$T(0)f = f \quad ; \quad T(t)f = P_{r(t)} * f \quad (\text{für } t > 0),$$

so ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf $L^p(\mathbb{T})$

Bei der Bestimmung des infinitesimalen Generators A dieser Halbgruppe beschränke ich mich auf eine formale Rechnung. Zunächst ergibt die Kettenregel

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d}{dr} = \left(\frac{d}{dt}e^{-t}\right)\frac{d}{dr} = -r\frac{d}{dr}.$$

Daraus folgt für A

$$Af = \frac{d}{dt}T(t)f\Big|_{t=0} = -r\frac{d}{dr}P_r * f\Big|_{r=1}$$

$$= \frac{-1}{2\pi} r\frac{d}{dr}\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e_k * f\Big|_{r=1} \qquad (e_k(\vartheta) = e^{ik\vartheta})$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\, r^{|k|} e_k * f\Big|_{r=1} = \frac{-1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\, e_k * f.$$

Dabei ist

$$\frac{1}{2\pi} e_k * f(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(\vartheta-\varphi)} f(\varphi)\,d\varphi = e^{ik\vartheta}\hat{f}(k),$$

wobei $\hat{f}(k)$ der k-te Fourierkoeffizient von f ist. Also:

$$Af = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|\,\hat{f}(k)\,e_k = \mathcal{F}^{-1}(-|k|\,\mathcal{F}f), \text{ wobei}$$

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}),\ f \mapsto \mathcal{F}f = (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

die Fouriertransformation (hier: Abbildung einer integrierbaren 2π-periodischen Funktion auf die Folge ihrer Fourierkoeffizienten) und

$$\mathcal{F}^{-1}: \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow C(\mathbb{T}),\ (a_k) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k$$

ihre Inverse ist (sofern $\mathcal{F}f \in \ell^1(\mathbb{Z})$). A ist also der "Fourier-Multiplikator" mit der Funktion $k \mapsto -|k|$.

Nun hat man

$$\mathcal{F}\frac{df}{d\vartheta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\varphi} f'(\varphi)\,d\varphi \overset{\text{part. Int.}}{=} ik\,\mathcal{F}f(k),$$

und der Fourier-Multiplikator

$$H = \mathcal{F}^{-1}(-i\,\mathrm{sign}(k))\mathcal{F}$$

wird als Hilbert-Transformation bezeichnet. Für $1<p<\infty$ ist

$$H: L^p(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p(\mathbb{T}),\ f \longmapsto Hf$$

stetig, was nur für $p=2$ leicht zu zeigen ist (Plancherel!). Setzen wir beides zusammen, erhalten wir $A = -H\frac{d}{d\vartheta}$ mit Definitionsbereich $D_A = W^{1,p}(\mathbb{T})$, sofern $p>1$ ist. Um zum Abschluss noch einmal zum Ausgangspunkt der Überlegungen – dem Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung – zurückzukehren, nehmen wir $f \in D_{A^2}$ $(= W^{2,p}(\mathbb{T})$ für $1<p<\infty)$ an, so dass auch die zweite Zeitableitung von $T(t)f$ existiert. Dann haben wir einerseits

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t)f = A^2 T(t)f = \left(-H\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^2 T(t)f = -\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} P_r * f(\vartheta)$$

und andererseits

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t)f = \left(-r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 P_r * f(\vartheta) = \left(r^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right) P_r * f(\vartheta).$$

Gleichsetzung und Division durch r^2 ergeben

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right) P_r * f(\vartheta) = 0,$$

und der Differentialoperator auf der linken Seite ist nichts anderes als der 2-dim. Δ-Operator in ebenen Polarkoordinaten (vgl. Übungsblatt 1 zu EPDE, A 3).

* * *

Nach dieser ausführlichen Diskussion einiger Beispiele (weitere folgen in den Übungen) kommen wir zurück auf das abstrakte Cauchy-Problem

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u(0) = u_0 \in D_A \subset E \qquad \text{(CP)}$$

für die homogene lineare Gleichung. Zunächst eine

Def.: Es seien E ein Banachraum und $A: E \supset D_A \to E$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator. Dann heißt das Cauchy-Problem (CP) <u>klassisch wohlgestellt</u>, wenn

(1) zu jedem $u_0 \in D_A$ genau eine Lösung

$$u \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A)$$

von (CP) existiert, und

(2) für jedes $t > 0$ der Lösungsoperator

$$S_t : D_A \longrightarrow C^1([0,t], E) \cap C([0,t], D_A), \quad u_0 \longmapsto S_t u_0 := u|_{[0,t]}$$

(hierbei ist u die eindeutige Lösung von (CP)) im folgenden Sinne stetig ist: Es existieren Konstanten $C_{1,2}(t)$, so dass die Abschätzungen

(i) $\sup\limits_{0 \le s \le t} \|u(s)\|_E \le C_1(t) \|u_0\|_E$ und

(ii) $\sup\limits_{0 \le s \le t} \|Au(s)\|_E \le C_2(t) \|Au_0\|_E$

gelten.

(Da der Lösungsoperator linear ist, enthalten (i) und (ii) die Stetigkeit von S_t!)

Satz 2: Es sei E ein Banachraum und $A: E \supset D_A \to E$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann gilt: (CP) ist genau dann klassisch wohlgestellt, wenn der Operator A eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf E erzeugt. (35)

Bew.: (1) A erzeuge auf E eine C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$.

(i) <u>Existenz</u> einer Lösung: Für $u_0 \in D_A$ setzen wir

$$u: [0,\infty) \to E, \quad t \mapsto u(t) := T(t)u_0.$$

Dann gelten:

- u ist stetig (Def. von "stark stetig");
- $u(t) \in D_A$ für alle $t \geq 0$ (Lemma 3(a));
- die Abbildung $Au: [0,\infty) \to E$, $t \mapsto Au(t)$ $(= AT(t)u_0 = T(t)Au_0$, Lemma 3(a)) ist auch stetig

Damit ist $u \in C([0,\infty), D_A)$.

Ferner gilt – ebenfalls nach Lemma 3(a) – für $t \geq 0$

$\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$, d.h. u ist nach t diffbar, die Dgl. ist erfüllt, und es gilt $\frac{du}{dt} \in C([0,\infty), E)$.

Die ~~Re~~ Regularitätseigenschaften können wir zusammenfassen zu

$$u \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A).$$

Da $u(0) = u_0$ (Eigenschaft (1) einer C^0-Halbgruppe), ist u eine Lösung von (CP).

(ii) <u>Eindeutigkeit</u>: Sei $v \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), D_A)$ eine weitere Lösung von $\frac{dv}{dt} = Av$ mit $v(0) = u_0$. Dann definieren wir für $0 \leq s \leq t$

$$W(s) := T(s)\, v(t-s).$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{ds}(s) \overset{\text{wie Produktregel}}{=} \underset{\text{Lemma 3 (a)}}{A\, T(s)}\, v(t-s) + T(s) \overset{\text{Dgl.}}{(-A)\, v(t-s)} = 0.$$

Daher ist W konstant und

$$v(t) = W(0) = W(t) = T(t)\, v(0) = T(t)\, u_0 = u(t).$$

(iii) <u>Stetige Abhängigkeit</u>: Lemma 2 ergibt für $0 \leq s \leq t$

$$\| u(s) \|_E = \| T(s) u_0 \|_E \leq \| T(s) \| \, \| u_0 \|_E \leq M e^{|\omega| s} \| u_0 \|$$

$$\leq M \cdot e^{|\omega| t} \| u_0 \|, \text{ wir können } C(t) = M e^{|\omega| t}$$

wählen. Ebenso ergibt sich die Abschätzung für Au bzw. $\frac{du}{dt}$.

(2) Nun sei (CP) wohlgestellt. Wir bezeichnen mit $u(t, u_0)$ die Lösung von (CP) mit Anfangswert $u_0 \in D_A$ zur Zeit $t \geq 0$ und definieren

$$T_0(t)\, u_0 := u(t, u_0).$$

Dann haben wir aufgrund der Stetigkeitsabschätzung

(i) $\|T_0(t)u_0\|_E \le C_1(t)\|u_0\|_E$.

Damit können wir $T_0(t)$ von D_A auf E fortsetzen, indem wir für $u_0 \in E$

$$T(t)u_0 := \lim_{k\to\infty} T_0(t)u_{0,k}$$

definieren, wobei $(u_{0,k})_k$ eine Folge in D_A ist mit $\lim_{k\to\infty}\|u_0 - u_{0,k}\|_E = 0$. Damit genügt $T(t)$ der Abschätzung

$$\|T(t)u_0\|_E < C_1(t)\|u_0\|_E$$

(und zwar für alle $u_0 \in \underline{E}$!) und ~~[illegible]~~ folglich ist $T(t) \in L(E)$.

Weitere Eigenschaften einer C^0-Halbgruppe:

Eindeutigkeit!

(1) $T_0(0)u_0 = u(0,u_0) = u_0$

(2) $T_0(t+s)u_0 = u(t+s,u_0) = u(t,T_0(s)u_0) = T_0(t)T_0(s)u_0$

Durch Approximation erhalten wir (1) und (2) auch für T anstelle von T_0 bzw. $u_0 \in E$.

(3) starke Stetigkeit: Für $u_0 \in D_A$ ist

$$T_0(t+h)u_0 = u(t+h,u_0) \to u(t,u_0) = T_0(t)u_0 .$$

$u \in C([0,\infty),E)$

Für $u_0 \in E$ wählen wir eine Folge $(u_{0,k})_k$ in D_A mit $u_{0k} \xrightarrow{E} u_0$.

$$\leadsto \|(T(t+h)-T(t))u_0\|_E \leq \|T(t+h)(u_0-u_{0,k})\|_E$$

$$+\|(T(t+h)-T(t))u_{0,k}\|_E + \|T(t)(u_0-u_{0,k})\|_E$$

$$\underset{|h|\leq 1}{\leq} \big(C_1(t)+C_1(t+1)\big)\|u_0-u_{0,k}\|_E + \|(T(t+h)-T(t))u_{0k}\|_E.$$

Jetzt: $h\to 0$, dann $k\to\infty$.

Bleibt zu zeigen, dass der Generator B (mit Definitionsbereich D_B) der oben definierten C^0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ mit A übereinstimmt. Dazu sei zunächst

(i) $u_0 \in D_A$. Dann ist

$$A u_0 \underset{\substack{\text{Regularität}\\ \text{von } u}}{=} \lim_{t\to 0} A u(t) \underset{\text{Dgl.}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{du}{dt}(t) \underset{\substack{\text{Regularität}\\ \text{von } u}}{=} \frac{du}{dt}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)-I)u_0.$$

Die Existenz dieses Grenzwerts bedeutet $u_0\in D_B$ und per definitionem haben wir $Bu_0 = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T(t)-I)u_0$ $(=Au_0)$. Also gilt $D_A \subset D_B$ und $Au_0 = Bu_0$ für $u_0\in D_A$.

(ii) $u_0 \in D_B$. Da A dicht definiert ist, existiert eine Folge $(u_{0,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in D_A mit $u_{0,k} \xrightarrow{E} u_0$.

Lemma 3 (b) ergibt

$$A \underbrace{\int_0^t T(s)u_{0,k}\,ds}_{\in D_A} \underset{(i)}{=} B\int_0^t T(s)u_{0k}\,ds \overset{\text{Lemma}}{=} (T(t)-I)u_{0,k} \xrightarrow[E]{} (T(t)-I)u_0$$

Nun gilt also für $x_k = \int_0^t T(s) u_{0k}\, ds$ und $x = \int_0^t T(s) u_0\, ds$, (39)

dass $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ in E und $\lim_{k\to\infty} A x_k = (T(t) - I) u_0 =: y$.

Da A abgeschlossen ist, folgt $x = \int_0^t T(s) u_0\, ds \in D_A$

und $(Ax =) A \int_0^t T(s) u_0\, ds = (T(t) - I) u_0 \; (= y)$, also

für $t_n > 0$:

$$A \underbrace{\frac{1}{t_n} \cdot \int_0^{t_n} T(s) u_0\, ds}_{=: x_n \longrightarrow u_0} = \frac{T(t_n) - I}{t_n} \cdot u_0 \longrightarrow B u_0 ,$$

d.h. ~~Ax~~ $x_n \to u_0$, $A x_n \to B u_0$. Verwenden wir noch-

einmal die Abgeschlossenheit von A ergibt sich $u_0 \in D_A$

und $A u_0 = B u_0$. Damit ist auch die Inklusion

$D_B \subset D_A$ gezeigt. $\square$