2.4 Anwendungen des Satzes von Marcinkiewicz

2.4.1 Die schwache Young'sche Ungleichung

Satz 1: Es sei G eine LCA-Gruppe mit (σ-endlichem*) Haar-Maß H. $p, q, r \in (1, \infty)$ seien Hölderexponenten mit $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}$; wobei $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, ... Ferner seien $f \in L^{q,\infty}(G)$ und $g \in L^r(G)$. Dann ist $f * g \in L^p(G)$, und es gibt eine Konstante $C = C(p, q, r)$, so dass

$$\| f * g \|_p \leq C \, \| f \|_{q,\infty} \, \| g \|_r .$$

Der Bew. besteht aus 2 Interpolationsschritten:

(1) Wir fixieren $g \in L^r(G)$ und wählen

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p} + \varepsilon, \; \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \varepsilon, \qquad \frac{1}{q_0} = \frac{1}{q} + \varepsilon, \; \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \varepsilon,$$

dabei $\varepsilon > 0$ so klein, dass für $i \in \{0, 1\}$ gilt $\frac{1}{p_i} \in (0,1)$ und $\frac{1}{q_i} \in (0,1)$. Für $\theta = \frac{1}{2}$ ist dann

$$\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}\right) = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{1}{q}.$$

Ferner haben wir

$$\frac{1}{p_i'} = 1 - \frac{1}{p_i} = 1 - \frac{1}{p} \mp \varepsilon \qquad \left(\begin{array}{lll} - & \text{im Fall} & i=0 \\ + & \text{"} & \text{"}\ i=1 \end{array} \right)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r} \mp \varepsilon = 1 - \frac{1}{q} \mp \varepsilon + \frac{1}{r'} = \frac{1}{q_i'} + \frac{1}{r'}$$

und daher aufgrund der Young'schen Ungleichung

---

* diese Voraussetzung ist nicht wirklich notwendig

$$\|f*g\|_{p_i} \leq \|f\|_{q_i} \|g\|_r ,$$

was wir noch abschwächen können zu

$$\|f*g\|_{p_i,\infty} \leq C \|f\|_{q_i,1} \|g\|_r ,$$

da $L^{p_i} \subset L^{p_i,\infty}$ und $L^{q_i,1} \subset L^{q_i}$. Damit sind die im allg. Satz von Marcinkiewicz vorausgesetzten Randabschätzungen für die lineare Abbildung

$$T_g : L^{q_0}(G) + L^{q_1}(G) \longrightarrow \mathcal{M}(G),\ f \mapsto T_g f := f*g$$

gegeben, und der Satz liefert für ein beliebiges $\sigma \in [1,\infty]$:

$$\|f*g\|_{p,\sigma} = \|T_g f\|_{p,\sigma} \lesssim \|f\|_{q,\sigma} \|g\|_r$$

(der Faktor $\|g\|_r$ ist Teil der Operatornorm von T_g !). Insbesondere gilt

$$\|f*g\|_{p,\infty} \lesssim \|f\|_{q,\infty} \|g\|_r .$$

(2) Jetzt fixieren wir $f \in L^{q,\infty}(G)$ und wählen

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p} + \varepsilon,\quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \varepsilon, \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r} + \varepsilon,\ \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \varepsilon ,$$

wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\frac{1}{p_i}, \frac{1}{r_i} \in (0,1)$ für $i \in \{0,1\}$.
Für $\theta = \frac{1}{2}$ sind dann (wie im Schritt (1) überprüft) die Interpolationsbedingungen $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ erfüllt, und für die lineare Abbildung

$$T_f : L^{r_0}(G) + L^{r_1}(G) \longrightarrow \mathcal{M}(G),\ g \mapsto T_f g := f*g$$

stehen uns nach Schritt (1) die Abschätzungen

$$\|f*g\|_{p_i,\infty} = \|T_f g\|_{p_i,\infty} \lesssim \|f\|_{q,\infty} \|g\|_{r_i}$$

zur Verfügung. Ferner haben wir nach Voraussetzung

$\frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} \geq \frac{1}{r'} \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow p \geq r$, so dass die Voraussetzungen des klassischen Satzes von Marcinkiewicz erfüllt sind. Dieser erlaubt nun, die schwache p_i-Norm auf der linken Seite durch eine starke p-Norm zu ersetzen, und wir erhalten

$$\|f*g\|_p \lesssim \|f\|_{q,\infty} \|g\|_r$$

mit einer impliziten Konstante, die nur von p, q, r abhängt. $\square$

Anwendung mit $G = \mathbb{R}^n$ und $f(x) = |x|^{-\frac{n}{q}}$ $(f \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n))$ ergibt:

Satz 2 (Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung, HLS):
Es seien $0 < \lambda < n$ und $r, p \in (1,\infty)$, so dass $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 1 - \frac{\lambda}{n}$.
Dann gilt

$$\| |x|^{-\lambda} * g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\lambda,p,r} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

Bew.: Wir wählen $q = \frac{n}{\lambda} \in (1,\infty)$, so dass $\lambda = \frac{n}{q}$ und $|x|^{-\lambda} \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{r} + 1 - \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{q'}$.
Die Vor. von Satz 1 sind also erfüllt.

Bem.: Entsprechend für $G = \mathbb{Z}^n$ mit $f(k) = \langle k \rangle^{-\frac{n}{q}}$.

2.4.2 Die Hardy-Littlewood maximal function

<u>Def.</u>: Eine meßbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt lokal integrierbar, wenn für jedes kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion $f \cdot \chi_K$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Den Vektorraum aller lokal integrierbarer Funktionen bezeichnen wir mit $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Bem.</u>: (1) Für jedes $p \in [1,\infty]$ ist $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(Hölder mit der 1!)

(2) Für $p \in (1,\infty]$ ist auch $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. (Begründung: $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow f \cdot \chi_K \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow f \cdot \chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (nach Aufg. 25) $\Rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$)

(3) Ist $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, so ist f i.allg. nicht lokal integrierbar. Bsp.: $f(x) = \begin{cases} |x|^{-n} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

<u>Def.</u>: Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiert man

(a) die Maximalfunktion

Mittelwert der Fkt. auf dem Integrationsbereich.

$$Mf(x) := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|dy =: \sup_{\varepsilon > 0} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|dy$$

und (b) die unzentrierte Maximalfunktion

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{|z-x|<\varepsilon} \fint_{B_\varepsilon(z)} |f(y)|dy.$$

<u>Bem.</u>: (1) Der Operator M wurde in einer Raumdimension von Hardy und Littlewood eingeführt. Die Verallgemeinerung auf $n \geq 1$ geht zurück auf N. Wiener.

(2) Wir lassen "∞" als Funktionswert zu. Dann ist Mf (und auch $\tilde{M}f$) für jedes $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

(z.B. ist für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$: $Mf(0) = \infty$.)

(3) Ist für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $0 = Mf(x_0)$

$= \sup\limits_{\varepsilon>0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int\limits_{B_\varepsilon(x_0)} |f(y)|\,dy$, so ist $f = 0$ λ^n fast überall.

Im folgenden sollen L^p-Abschätzungen für die Operatoren M und $\tilde{M}$ gezeigt werden. Dazu stellen wir fest:

(4) $Mf(x) \le \tilde{M}f(x) \le 2^n Mf(x)$, denn

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon>0} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\,dy \le \sup_{\varepsilon>0} \sup_{|x-z|<\varepsilon} ⨍_{B_\varepsilon(z)} |f(y)|\,dy$$

$$= \tilde{M}f(x) \le \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} |f(y)|\,dy \quad \left(\begin{matrix}\text{da } B_\varepsilon(z) \subset B_{2\varepsilon}(x), \\ \text{wenn } |z-x|<\varepsilon\end{matrix}\right)$$

$$= 2^n \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\Omega_n (2\varepsilon)^n} \int_{B_{2\varepsilon}(x)} |f(y)|\,dy = 2^n Mf(x).$$

D.h. es reicht, solche Abschätzungen für einen der beiden Operatoren zu zeigen.

(5) M (und ebenso $\tilde{M}$) sind sublinear. Für M:

$$M(f+g)(x) = \sup_{\varepsilon>0} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |f(y)+g(y)|\,dy$$

$$\le \sup_{\varepsilon>0} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\,dy + \sup_{\varepsilon>0} ⨍_{B_\varepsilon(x)} |g(y)|\,dy = Mf(x) + Mg(x)$$

und $M(\lambda f)(x) = |\lambda|\, Mf(x)$ ist offensichtlich.

Genauso für $\tilde{M}$. (Damit ist eine der Voraussetzungen des Satzes von Marcinkiewicz überprüft. Hier ist M tatsächlich <u>nicht</u> linear!)

(6) Für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ haben wir

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon>0} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\,dy \le \|f\|_\infty, \Rightarrow \|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Das liefert eine Randabschätzung. Eine L^1-Abschätzung ist hingegen unmöglich:

(7) Ist $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt $f = 0$ f.ü.

Begründung: Annahme nicht. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass $\lambda^n\{y : |f(y)| > \delta\} \ge 2\varepsilon$. Da wir $\mathbb{R}^n$ mit Kugeln ausschöpfen können, gibt es weiter ein $R > 0$, so dass $\lambda^n\{y : |y| \le R \wedge |f(y)| > \delta\} \ge \varepsilon$. Dann folgt

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\,dy \ge \frac{1}{\Omega_n} \frac{1}{(|x|+R)^n} \int_{B_{|x|+R}(x)} |f(y)|\,dy$$

$$\ge \frac{1}{\Omega_n} \cdot \frac{1}{(|x|+R)^n} \cdot \int_{B_R(0)} |f(y)|\,dy \ge \frac{\varepsilon\delta}{\Omega_n} \cdot (|x|+R)^{-n}$$

mit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (R+|x|)^{-n}\,dx = C_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(R+r)^n}\,dr \ge C_n \cdot \int_{2R}^\infty \frac{r^{n-1}}{(R+r)^n}\,dr$

$$= \frac{C_n}{2^n} \cdot \int_{2R}^\infty \frac{dr}{r} = \infty.$$

Wir werden stattdessen eine schwache L^1-Abschätzung

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

zeigen und diese mit Hilfe des Satzes von Marcinkiewicz mit Bem. 6 interpolieren. Genauer:

Satz 3: (a) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\tilde{M}f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|\tilde{M}f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq 3^n \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Gleiches gilt für Mf anstelle von $\tilde{M}f$.

(b) Zu jedem $p \in (1,\infty]$ gibt es eine Konstante $C = C(n,p)$, so dass $\|\tilde{M}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Auch hierin kann $\tilde{M}f$ durch Mf ersetzt werden.

Bem.: (1) Die Zusätze zu Mf ergeben sich aus $Mf(x) \leq \tilde{M}f(x)$, siehe Bem. (4) oben.

(2) Teil (b) folgt aus (a) durch Interpolation nach Marcinkiewicz, denn wir haben die Randabschätzungen

$$\|\tilde{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{(Bem. (6) oben. Es ist also } p_0 = r_0 = \infty \text{)}$$

$$\|\tilde{M}f\|_{1,\infty} \leq 3^n \|f\|_1 \quad ((a),\ p_1 = r_1 = 1)$$

Der Diagonalfall des klassischen Satzes von Marcinkiewicz liefert also (b). Hierin kann man

$$C_{n,p} = 3^{\frac{n}{p}} \frac{p}{p-1}$$

erreichen (mit dem Interpolationssatz!).

Es bleibt also Teil (a) von Satz 3 zu beweisen. Dazu benötigen wir das folgende Überdeckungslemma, das auf Vitali (oder Wiener?) zurückgeht:

Lemma 1: Es seien $B_1, \dots, B_N \subset \mathbb{R}^n$ Kugeln. Dann kann man hieraus L paarweise disjunkte Kugeln $B_{j_1}, \dots, B_{j_L}$ auswählen, so dass

$$\bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{k=1}^{L} 3B_{j_k}.$$

Insbesondere gilt $\lambda^n(\bigcup_{j=1}^{N} B_j) \leq 3^n \cdot \sum_{k=1}^{L} \lambda^n(B_{j_k})$.

(Hierbei bezeichnet $3B_{j_k}$ eine Kugel mit demselben Mittelpunkt und dem dreifachen Radius.)

Bew.: Die Radien der Kugeln B_j, $1 \leq j \leq N$ seien o. E. $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N > 0$ (also absteigend). Dann wählen wir $B_{j_1} = B_1$ und

B_{j_2} = größte Kugel B_j mit $B_j \cap B_{j_1} = \emptyset$, allgemein

$B_{j_{k+1}}$ = größte " B_j mit $B_j \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{j_i} = \emptyset$.

(In Worten: Die größte Kugel, die mit den bisher ausgewählten leeren Durchschnitt hat.)

Durch diese Wahl wir $B_{j_k} \cap B_{j_l} = \emptyset$ für $k \neq l$ erzwungen.

Nun sei B_j eine nicht ausgewählte Kugel. Dann existiert ein Index $j_k \leq j$, so dass

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ B_j \cap B_{j_k} \neq \emptyset,\ B_{j_k} \text{ ausgewählt} \\ \bullet\ r_{j_k} \geq r_j \end{array}\right\} \Rightarrow B_j \subset 3B_{j_k},$$

Letztlich $\bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{k=1}^{L} 3B_{j_k}$. $\square$

Beweis von Satz 3, Teil (a): Zu zeigen ist

$$\| \tilde{M} f \|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t\, \lambda^n \underbrace{\{x : \tilde{M}f(x) > t\}}_{=: E_t} \le 3^n \|f\|_1$$

also: $\forall t > 0$ ist $\lambda^n(E_t) \le \frac{3^n}{t} \|f\|_1$

(1) Wir zeigen: E_t ist offen, damit auch λ^n-meßbar. (Damit wird auch die λ^n-Messbarkeit von $\tilde{M}f$ nachgeliefert.) Sei $x \in E_t$. Dann ist

$$t < \tilde{M}f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{|x-z|<\varepsilon} \fint_{B_\varepsilon(z)} |f(y)|\,dy.$$

Dann existieren $\varepsilon_0 > 0$ und z_0 mit $|x - z_0| < \varepsilon_0$ und

$$t < \fint_{B_{\varepsilon_0}(z_0)} |f(y)|\,dy.$$

Wir schreiben $B_x := B_{\varepsilon_0}(z_0)$ und zeigen, dass $B_x \subset E_t$.

Dazu sei $x' \in B_x$. Dann ist

$$\tilde{M}f(x') = \sup_{\varepsilon>0} \sup_{|z-x'|<\varepsilon} \fint_{B_\varepsilon(z)} |f(y)|\,dy \ge \fint_{B_x} |f(y)|\,dy > t,$$

denn $\fint_{B_x} |f(y)|\,dy = \fint_{B_{\varepsilon_0}(z_0)} |f(y)|\,dy$ gehört zu der Menge dazu, über die hier das Supremum gebildet wird. Also:

$x' \in E_t \;\forall x' \in B_x$, d.h. $B_x \subset E_t \Rightarrow E_t$ ist offen.

(2) Aufgrund der inneren Regularität des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$, reicht es für ein beliebiges Kompaktum $K \subset E_t$ die Ungleichung $\lambda^n(K) \le \frac{3^n}{t} \|f\|_1$ zu zeigen.

Nach (1) finden wir zu jedem $x \in K \subset E_t$ eine Kugel B_x,

so dass $B_x \subset E_t$. Wir schreiben $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$ und können aus dieser Überdeckung (wg. K kompakt) eine endliche Teilüberdeckung auswählen, also:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{x_j} \quad \text{mit} \quad B_{x_j} \subset E_t$$

Nach Lemma 1 existieren $x_{j_1}, \dots, x_{j_L}$, so dass $B_{x_{j_k}} \cap B_{x_{j_l}} = \emptyset$ für $k \neq l$ und $K \subset \bigcup_{k=1}^{L} 3B_{x_{j_k}}$. Also haben wir

$\lambda^n(K) \leq 3^n \sum_{k=1}^{L} \lambda^n(B_{x_{j_k}})$. Nun gilt nach Schritt (1)

$$t < ⨍_{B_{x_{j_k}}} |f(y)|\,dy = \frac{1}{\lambda^n(B_{x_{j_k}})} \cdot \int_{B_{x_{j_k}}} |f(y)|\,dy$$

$\Longrightarrow \quad \lambda^n(B_{x_{j_k}}) < \frac{1}{t} \cdot \int_{B_{x_{j_k}}} |f(y)|\,dy$. Einsetzen ergibt

$$\lambda^n(K) \leq \frac{3^n}{t} \cdot \sum_{k=1}^{L} \int_{B_{x_{j_k}}} |f(y)|\,dy \underset{B_{x_{j_k}} \text{ disjunkt}}{\leq} \frac{3^n}{t} \|f\|_1 .$$

$\square$

Um zu konkreten Anwendungen der Maximal-Funktionen-Abschätzung zu gelangen, stellen wir den Zusammenhang zum Konzept der approximativen Einheiten her:

Feststellung: Ist $\mathcal{X} = \frac{1}{\Omega_n} \mathcal{X}_{B_1(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und, für $\varepsilon > 0$, $\mathcal{X}_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \mathcal{X}(\frac{x}{\varepsilon})$, so ist $(\mathcal{X}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine approximative Einheit und es gilt für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$|f| * \mathcal{X}_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_\varepsilon(x-y)\, |f(y)|\, dy = \frac{1}{\Omega_n \varepsilon^n} \int_{|x-y|<\varepsilon} |f(y)|\, dy$$

$$= \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\, dy \, ,$$

so dass $\quad Mf(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |f| * \mathcal{X}_\varepsilon(x)$.

Gleichheit an dieser Stelle gilt nur für diesen speziellen Kern, aber für eine wichtige Klasse approximativer Einheiten kann man die Faltung $|f| * K_\varepsilon$ mit der Maximalfunktion kontrollieren, d.h. es gibt eine Abschätzung der Form

$$\sup_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon * |f| \lesssim Mf.$$

Def.: Eine Funktion $K: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt radial fallend, falls eine monoton fallende Funktion $k: [0,\infty) \to [0,\infty)$ existiert, so dass $K(x) = k(|x|)$.

<u>Bem.</u>: Ist $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radial fallend, so gelten

(1) $K(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ und $\lim\limits_{x \to \infty} K(x) = 0$;

(2) K_ε, def. durch $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$ ist ebenfalls radial fallend und es gilt $\| K_\varepsilon \|_1 = \| K \|_1$.

<u>Def.</u>: Eine approximative Einheit $(K_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt radial beschränkt, wenn es eine Familie $(\tilde{K}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ gibt, so dass

(1) $|K_\varepsilon(x)| \leq \tilde{K}_\varepsilon(x)$ für λ^n fast alle $x \in \mathbb{R}^n$,

(2) $\tilde{K}_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gibt ein $B > 0$, so dass $\| \tilde{K}_\varepsilon \|_1 \leq B \quad \forall \varepsilon > 0$,

(3) $\tilde{K}_\varepsilon$ ist radial fallend $\forall \varepsilon > 0$.

Radial beschränkte approximative Einheiten sind in folgender Weise durch die Hardy-Littlewood Maximalfunktion kontrollierbar:

<u>Satz 4</u>: Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gelten:

(1) Ist $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radial fallend, so gilt $|f| * K(x) \leq \| K \|_1 \, Mf(x)$.

(2) Ist $(K_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine radial beschränkte approximative Einheit auf $\mathbb{R}^n$, so hat man $\sup\limits_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon| * |f|(x) \leq B\, Mf(x)$.

(Dabei B die Schranke aus der Def. von "radial beschränkt.")

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2):

$$|K_\varepsilon| * |f|(x) \leq \tilde{K}_\varepsilon * |f|(x) \underset{(1)}{\leq} \|\tilde{K}_\varepsilon\|_1 \, Mf(x) \leq B\, Mf(x).$$

Zum Beweis von (1) können wir annehmen, dass

$$K(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \, \chi_{B_{R_j}}(x)$$

mit $a_j > 0$ ist. (Eine beliebige radial fallende L^1-Funktion lässt sich hierdurch aufsteigend und damit in L^1 approximieren.) Hierfür haben wir (wie in der obigen Feststellung

$$K * |f|(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \, \chi_{B_{R_j}} * |f|(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j \, \Omega_n R_j^n \cdot ⨍_{B_{R_j}(x)} |f(y)|\,dy$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \, \Omega_n R_j^n \right) Mf(x) = \|K\| \; Mf(x) \qquad \square$$

Zusammen mit Satz 3 erhalten wir:

Folgerung: Ist $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine radial beschränkte approximative Einheit auf $\mathbb{R}^n$, so gelten

(1) $\quad \| \sup_{\varepsilon>0} |f| * |K_\varepsilon| \|_{1,\infty} \lesssim_n \|f\|_1$

und, für $1 < p \leq \infty$

(2) $\quad \| \sup_{\varepsilon>0} |f| * |K_\varepsilon| \|_p \lesssim_{p,n} \|f\|_p$.

Ist $(K_\varepsilon)_{\varepsilon\in I}$ eine approximative Einheit und $f \in L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, so wissen wir

$$\lim_{\varepsilon \in I} \| K_\varepsilon * f - f \|_p = 0,$$

woraus wir die punktweise f.ü.-Konvergenz einer Teilfolge (bzw. eines Teil-Netzes) folgern können. Für verschiedene Zwecke ist das zu wenig – z.B. wenn man Rand- bzw. Anfangswertprobleme für pDglen. mit Daten in L^p lösen will. Im Fall radial beschränkter approximativer Einheiten auf $\mathbb{R}^n$ kann man tatsächlich mehr erreichen:

Satz 5: Es seien $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $(K_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine radial beschränkte approximative Einheit auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon * f(x) = f(x) \quad \text{für } \lambda^n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Bew.: Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A_k := \{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\varepsilon \to 0} |K_\varepsilon * f(x) - f(x)| > \tfrac{1}{k} \}$$

und zeigen $\lambda^n(A_k) = 0$.

(Da $\{x \in \mathbb{R}^n : \neg(\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon * f(x) = f(x))\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \}$ und $\lambda^n(A_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda^n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = 0$, folgt hieraus die Behauptung.)

Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann existiert $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\| f - g \|_p \le \varepsilon$, und für g wissen wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon * g(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann haben wir

$$|K_\varepsilon * f(x) - f(x)| \le |K_\varepsilon * f(x) - K_\varepsilon * g(x)| + |K_\varepsilon * g(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

und dementsprechend $A_k = A_k^{(1)} \cup A_k^{(2)} \cup A_k^{(3)}$, wobei

$$A_k^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \limsup_{\varepsilon \to 0} |K_\varepsilon * (f-g)(x)| > \tfrac{1}{3k}\}$$

$$A_k^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \quad \sim \quad |K_\varepsilon * g(x) - g(x)| > \tfrac{1}{3k}\}$$

$$A_k^{(3)} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \quad \sim \quad |g(x) - f(x)| > \tfrac{1}{3k}\}$$

Aufgrund der Vorbem. zu g ist $\lambda^n(A_k^{(2)}) = 0$. Um $\lambda^n(A_k^{(3)})$ abzuschätzen, benutzen wir die Tschebyschev-Ungleichung ($\mu\{|\varphi| > \alpha\} \le \frac{1}{\alpha^p} \|\varphi\|_p^p$), die uns

$$\lambda^n(A_k^{(3)}) \le (3k)^p \|f-g\|_p^p \le (3k)^p \cdot \varepsilon^p$$

liefert. Um für $A_k^{(1)}$ ähnlich argumentieren zu können, beachten wir

$$A_k^{(1)} \subset \{x \in \mathbb{R}^n,\ \sup_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon * (f-g)|(x) > \tfrac{1}{3k}\}$$

und erhalten

$$\lambda^n(A_k^{(1)}) \le (3k)^p \| \sup_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon * (f-g)| \|_p^p$$

$$\underset{\text{Satz 4}}{\le} (3k)^p B^p \|f-g\|_p^p \le (3k)^p B^p \varepsilon^p$$

Insgesamt: $\lambda^n(A_k) \le (3k)^p (1 + B^p) \cdot \varepsilon^p$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda^n(A_k) = 0$. $\square$

Folgerungen:

(1) Lebesguescher Differentiationssatz:

Ist $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, so gilt für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{B_\varepsilon(x)} f(y)\,dy = f(x)$$

(Satz 5 mit $K_\varepsilon = \mathcal{X}_\varepsilon$, $\mathcal{X}_\varepsilon$ wie in der "Feststellung" (S. 2.47);

Die Bez. Differentiationssatz wird klar für $n = 1$. Hier lautet die Aussage $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\,dy = f(x)$.

Also: Ist f lokal integrierbar, so gilt eine schwache Form des Hauptsatzes für die Stammfkt. von f.)

(2) Ist $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ $\left(\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2\right)$ gegeben durch

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy = G_{\sqrt{2t}} * u_0(x)$$

mit $G(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, $G_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

(Dgl. kann man nachrechnen, etwas mühsam, Differentiation unterm Integral ist möglich.)

Nun sind G und damit G_ε selbst radial fallend und erfüllen damit die Vor. von Satz 5. Dieser ergibt

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0(x) \quad \text{für } \lambda^n\text{-fast alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

und insofern kann man auch für Daten $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ davon sprechen, dass das Cauchy-Problem $u(x,0) = u_0(x)$ von u wie oben gelöst wird.