2.3 Der Interpolationssatz von Marcinkiewicz

Bezeichnungen und allgemeine Voraussetzungen in diesem Abschnitt:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ seien σ-endliche Maßräume;

der Vektorraum aller $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen

$f : X \to \mathbb{C}$ sei mit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ bezeichnet, entsprechend: $\mathcal{M}(\mathcal{C})$

Ein Operator $T : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \supset D \to \mathcal{M}(\mathcal{C})$ heißt sublinear, wenn

$|T(f_1+f_2)(x)| \le |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|$ und

$|T(\lambda f)(x)| = |\lambda| |Tf(x)|$ für μ-fast alle $x \in X$ gelten.

In diesem Abschnitt soll der folgende Interpolationssatz für Lorentzräume (= verallgemeinerter Satz von Marcinkiewicz) bewiesen werden:

<u>Satz</u> 1: Es seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 \ne p_1$, $r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $r_0 < r_1$ und

$$T : L^{r_0}(\mu) + L^{r_1}(\mu) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

ein sublinearer Operator, der den Abschätzungen

$$\| Tf \|_{p_0,\infty} \le M_0 \| f \|_{r_0,1} \quad \text{und}$$

$$\| Tf \|_{p_1,\infty} \le M_1 \cdot \begin{cases} \| f \|_{r_1,1} & \text{falls } r_1 < \infty \\ \| f \|_\infty & \text{" } r_1 = \infty \end{cases}$$

genügt. Ferner seien $q \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und p, r so, dass

$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ und $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ gelten.

Dann existiert ein $C = C(p, p_0, p_1, r, r_0, r_1, q)$, so dass

$$\| Tf \|_{p,q} \le C (M_0 + M_1) \| f \|_{r,q} .$$

Bem.: (1) Jeder lineare Operator ist auch sublinear. In diesem Fall kann man auch einen dichten linearen Teilraum als Definitionsbereich zulassen (etwa: Treppenfunktionen auf Mengen endlichen Maßes).

(2) Ist $f \in L^{r,q}(\mu) \subset L^{r,\infty}(\mu)$, so kann man f zerlegen in $f_{\le 1} + f_{>1} = f$ mit $f_{\le 1} = f \cdot \chi_{\{|f| \le 1\}} \in L^{r_1}(\mu)$ und $f_{>1} = f \cdot \chi_{\{|f| > 1\}} \in L^{r_0}(\mu)$. Zum Beweis muss man die Verteilungsfunktionen $d_{f>1}$ und $d_{f \le 1}$ bestimmen. Beachtet man, dass $f \in L^{r,\infty}(\mu)$ ist, führt Lemma 2 aus Abschnitt 2.2 zum Ziel. (Erkl. ÜA.)

(3) Der oben formulierte Satz 1 umfasst den klassischen Interpolationssatz von M.. Dieser lautet:

Satz (Marcinkiewicz): Es seien $p_0, p_1, r_0, r_1, \theta, p$ und r wie in Satz 1, sowie $r \le p$. Der sublineare Operator

$$T : L^{r_0}(\mu) + L^{r_1}(\mu) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

genüge den Abschätzungen

$$\| Tf \|_{p_0,\infty} \le M_0 \| f \|_{r_0}$$

und

$$\| Tf \|_{p_1,\infty} \le M_1 \| f \|_{r_1} .$$

Dann ex. ein $C = C(p_0, p_1, r_0, r_1, p, r)$, so dass

$$\|Tf\|_p \le C(M_0+M_1)\|f\|_r .$$

Bem.: (1) Wie bereits angemerkt, liegt die Stärke des Satzes von M. darin, eine schwache Abschätzung in den Randpunkt(paar)en in eine starke Abschätzung im Inneren umzuwandeln.

(2) Im klassischen Satz von Marčinkiewicz kann man auch – wie bei Riesz-Thorin – die Schranke

$$\le C\, M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_r$$

erreichen.

(3) Inwiefern gilt: Satz 1 $\Rightarrow$ Marčinkiewicz?
Nach Lemma 6*: $\|f\|_{r_i} \le \|f\|_{r_i,1}$. Insofern sind die in Satz 1 vorausgesetzten Abschätzungen schwächer als im klassischen Satz. Wenn wir in der Folgerung von Satz 1 $q=p$ wählen, erhalten wir

$$\|Tf\|_p = \|Tf\|_{p,p} \le C(M_0+M_1)\cdot\|f\|_{r,p} \le C(M_0+M_1)\|f\|_r$$

letzteres wiederum nach Lemma 6*, da $p \ge r$ (und damit $\|f\|_{r,p} \le \|f\|_{r,r} = \|f\|_r$) im klassischen Satz vorausgesetzt wird.

* in Abschnitt 2.2

Ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis von Satz 1 sind die folgenden Ungleichungen, die auf G. H. Hardy zurückgehen ("Hardy's inequalities"):

Lemma 1: Es seien $1 \le q < \infty$, $\varrho > 0$ und $\varphi \ge 0$ eine messbare Funktion auf $(0,\infty)$. Dann gelten:

$$(1) \quad \left(\int_0^\infty \left[\int_0^t \varphi(u)\,du \right]^q t^{-\varrho} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{q}{\varrho} \left(\int_0^\infty (u\cdot\varphi(u))^q u^{-\varrho} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(2) \quad \left(\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \varphi(u)\,du \right]^q t^{\varrho} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{q}{\varrho} \left(\int_0^\infty (u\,\varphi(u))^q u^{\varrho} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bew.: Für die Faltung

$$f * g(t) = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{u}\right) g(u) \frac{du}{u}$$

auf $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ mit Haar-Maß $dH(u) = \frac{du}{u}$ steht uns die Young'sche Ungleichung $\|f * g\|_q \le \|f\|_1 \|g\|_q$ zur Verfügung. Diese wenden wir an mit

$$f(u) = u^{-\frac{\varrho}{q}} \chi_{[1,\infty)}(u) \quad \text{und} \quad g(u) = \varphi(u)\cdot u^{1-\frac{\varrho}{q}}.$$

Dann sind

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty f(u) \frac{du}{u} = \int_1^\infty u^{-1-\frac{\varrho}{q}} du = \frac{1}{-\frac{\varrho}{q}} u^{-\frac{\varrho}{q}} \Big|_1^\infty = \frac{q}{\varrho}$$

und

$$\|g\|_q^q = \int_0^\infty g(u)^q \frac{du}{u} = \int_0^\infty (u\cdot\varphi(u))^q \cdot u^{-\varrho} \frac{du}{u},$$

so dass

$$\|f\|_1 \|g\|_q = \text{rechte Seite von (1)}.$$

Wir berechnen die Faltung

$$f*g(t) = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{u}\right) g(u) \frac{du}{u} = t^{-\frac{r}{q}} \cdot \int_0^\infty \chi_{[1,\infty)}\left(\frac{t}{u}\right) \varphi(u)\, du$$

$$= t^{-\frac{r}{q}} \cdot \int_0^t \varphi(u)\, du,$$

so dass

$$\| f*g \|_q = \left(\int_0^\infty \left[\int_0^t \varphi(u)\, du \right]^q t^{-r} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} =$$ ~~rechte~~ linke Seite von (1).

□

(Teil (2): Übungsaufgabe.)

Um den Satz 1 zu beweisen, benutzt man ferner für $f \in L^{r,q}(\mu)$ die Zerlegung $f(x) = f^t(x) + f_t(x)$, wobei für $t \geq 0$ und $\gamma > 0$ (wird später gewählt)

$$f^t(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } |f(x)| > f^*(t^\gamma) \\ 0, & \text{"} \quad |f(x)| \leq f^*(t^\gamma) \end{cases}$$

$$f_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } |f(x)| > f^*(t^\gamma) \\ f(x), & \text{"} \quad |f(x)| \leq f^*(t^\gamma). \end{cases}$$

Lemma 2: Für die monoton fallenden Umordnungen von f^t und f_t gelten die Ungleichungen

$$(f^t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & \text{für } 0 \leq s < t^\gamma \\ 0 & \text{für } s \geq t^\gamma \end{cases}$$

$$(f_t)^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t^\gamma) & \text{für } 0 \leq s < t^\gamma \\ f^*(s) & \text{für } s \geq t^\gamma \end{cases}$$

Bew.: Es gelten $|f^t(x)| \le |f(x)|$ sowie $|f_t(x)| \le |f(x)|$ $\forall x \in X$. 2.31

Lemma 4 (4) in A. 2.2 ($|f| \le |g| \Rightarrow f^* \le g^*$) ergibt $(f^t)^*(s) \le f^*(s)$ und $(f_t)^*(s) \le f^*(s)$ $\forall s \ge 0$. Das liefert die erste und die vierte Ungleichung des Lemmas. Zum Bew. der zweiten:

$$(f^t)^*(s) = \inf\{\sigma \ge 0 : d_{f^t}(\sigma) \le s\},$$

wobei

$$d_{f^t}(\sigma) = \mu\{x : |f^t(x)| > \sigma\} \overset{\text{Def } f^t}{=} \mu\{x : |f(x)| > \sigma \wedge |f(x)| > f^*(t^\gamma)\}$$

$$= \min(d_f(\sigma), d_f(f^*(t^\gamma))) \le d_f(f^*(t^\gamma)) \underset{\text{Lemma 4 (1) in A2.2}}{\le} t^\gamma$$

Die Bedingung $d_{f^t}(\sigma) \le s$ ist daher für alle $\sigma \ge 0$ erfüllt, wenn $s \ge t^\gamma$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist also $(f^t)^*(s) = 0$.

Zum 3. und letzten Teil: Es gilt $f_t(x) \le f^*(t^\gamma)$ und damit $(f_t)^*(s) \le (f_t)^*(0) = \inf\{\sigma \ge 0 : \mu\{x : |f_t(x)| > \sigma\} = 0\}$

$= \|f_t\|_\infty \le f^*(t^\gamma)$.

(vgl. Lemma 5, (1) in A2.2)

$\square$

Beweis von Satz 1:

Wir haben für jedes $t > 0$ $f = f^t + f_t$ und aufgrund der Sublinearität von T: $|Tf(x)| \leq |Tf^t(x)| + |Tf_t(x)|$. Daraus folgt für die fallende Umordnung mit Lemma 4 (3) in A 2.2

$$(Tf)^*(t) \leq (Tf^t)^*(\tfrac{t}{2}) + (Tf_t)^*(\tfrac{t}{2}).$$

Hieraus ergibt sich für $q < \infty$

$$\|Tf\|_{p,q} \leq 2^{\frac{1}{p}} \Big\{ \Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (Tf^t)^*(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (Tf_t)^*(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big)$$

bzw. für $q = \infty$

$$\|Tf\|_{p,\infty} \leq 2^{\frac{1}{p}} \Big\{ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (Tf^t)^*(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (Tf_t)^*(t) \Big\}$$

Im folgenden sei stets

$$\gamma := \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}.$$

Hierbei ist nur die erste Gleichung definierend, die zweite folgt aus den Interpolationsbedingungen $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ und $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$, wie eine kurze Rechnung zeigt.

Nun beginnt eine case-by-case discussion:

Fall 1: $q < \infty$ und $r_1 < \infty$ $(\Rightarrow r_0 < \infty)$. Abzuschätzen sind

$$I = \Big(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} (Tf^t)^*(t))^q \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{II} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (Tf_t)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

<u>zu I:</u>

$$I = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \cdot \underbrace{t^{\frac{1}{p_0}} (Tf^t)^*(t)}_{\leq \|Tf^t\|_{p_0,\infty} \underset{\text{Vor.}}{\leq} M_0 \|f^t\|_{r_0,1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq M_0 \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \cdot \int_0^\infty s^{\frac{1}{r_0}} \underbrace{(f^t)^*(s)}_{\text{Lemma 2} \;\to\; \leq f^*(s)\, \chi_{[0,t^\gamma]}(s)} \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq M_0 \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \cdot \int_0^{t^\gamma} f^*(s)\, s^{\frac{1}{r_0}-1} ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Hierin substituiert man $u = t^\gamma$, so dass $\frac{du}{u} = \gamma \frac{dt}{t}$ und $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} = u^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}{\gamma}} = u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}$, so dass

$$I \leq \gamma^{-\frac{1}{q}} M_0 \cdot \left(\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}} \int_0^u \underbrace{f^*(s)\, s^{\frac{1}{r_0}-1}}_{\varphi(s)} ds \right)^q \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{\text{Hardy (i)}}{\lesssim} M_0 \left(\int_0^\infty s^{\frac{q}{r_0}} f^*(s)^q\, s^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r_0}} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} = M_0 \|f\|_{r,q}.$$

<u>zu II:</u> $$\mathrm{II} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \underbrace{t^{\frac{1}{p_1}} (Tf_t)^*(t)}_{\leq \|Tf_t\|_{p_1,\infty} \leq M_1 \|f_t\|_{r_1,1} \text{ (Vor.)}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq M_1 \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_0^\infty s^{\frac{1}{r_1}} (f_t)^*(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Nach Lemma 2 haben wir

$$(f_t)^*(s) \le f^*(t^\gamma)\chi_{[0,t^\gamma]}(s) + f^*(s)\chi_{(t^\gamma,\infty)}(s)$$

und dementsprechend zwei Beiträge $\mathrm{II} \lesssim M_1(\mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2)$ mit

$$\mathrm{II}_1 = \Big(\int_0^\infty \big(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_1}} f^*(t^\gamma)\frac{ds}{s}\big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}$$ (Das innere Integral kann man ausrechnen.)

$$\lesssim \Big(\int_0^\infty \big(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\, t^{\frac{\gamma}{r_1}} f^*(t^\gamma)\big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}$$ (Jetzt Substitution $u = t^\gamma$, s.o.)

$$\lesssim \Big(\int_0^\infty \big(u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}\, u^{\frac{1}{r_1}} f^*(u)\big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{r,q}$$

und

$$\mathrm{II}_2 = \Big(\int_0^\infty \big(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_{t^\gamma}^\infty s^{\frac{1}{r_1}} f^*(s)\frac{ds}{s}\big)^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}$$ (Substitution $u = t^\gamma$)

$$\lesssim \Big(\int_0^\infty \big(u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}} \int_u^\infty s^{\frac{1}{r_1}} f^*(s)\frac{ds}{s}\big)^q \frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}},$$

worauf wir Hardy (2) anwenden mit $\varphi(s) = s^{\frac{1}{r_1}-1} f^*(s)$.

Dies ergibt

$$\mathrm{II}_2 \lesssim \Big(\int_0^\infty s^{\frac{q}{r_1}} f^*(s)^q\, s^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r_1}} \frac{ds}{s}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Big(\int_0^\infty \big(s^{\frac{1}{r}} f^*(s)\big)^q \frac{ds}{s}\Big)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{r,q}.$$

Zusammenfassung: $\mathrm{II} \lesssim M_1 \|f\|_{r,q}$ und damit

$$\|Tf\|_{p,q} \lesssim \mathrm{I} + \mathrm{II} \le C(M_0 + M_1)\|f\|_{r,q},$$

was die Diskussion von Fall 1 abschließt.

Fall 2: $r_1<\infty$ und $q=\infty$. Hier sind abzuschätzen:

$$I := \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(Tf^t)^*(t) \quad \text{und} \quad II := \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(Tf_t)^*(t)$$

Für I schreiben wir

$$t^{\frac{1}{p}}(Tf^t)^*(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\cdot t^{\frac{1}{p_0}}(Tf^t)^*(t) \le t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\|Tf^t\|_{p_0,\infty} \le M_0\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\|f^t\|_{r_0}$$

$$= M_0\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^\infty s^{\frac{1}{r_0}}(f^t)^*(s)\frac{ds}{s} \underset{\text{Lemma 2}}{\le} M_0\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_0}} f^*(s)\frac{ds}{s}$$

$$\le M_0\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^{t^\gamma} s^{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}}\underbrace{s^{\frac{1}{r}}f^*(r)}_{\le\|f\|_{r,\infty}}\frac{ds}{s}$$ (Das verbleibende Integral kann man ausrechnen.)

$$\lesssim M_0\|f\|_{r,\infty}\cdot t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\cdot t^{\gamma\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)} = M_0\|f\|_{r,\infty}.$$

Für II haben wir die obere Schranke

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|Tf_t\|_{p_1,\infty} \le M_1\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|f_t\|_{r_1,1}$$

mit

$$\|f_t\|_{r_1,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{r_1}}(f_t)^*(s)\frac{ds}{s} \overset{\text{Lemma 2}}{\le} \int_0^{t^\gamma} f^*(t^\gamma)\, s^{\frac{1}{r_1}-1}ds + \int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)\, s^{\frac{1}{r_1}}\frac{ds}{s},$$

also wieder $II \le M_1(II_1+II_2)$, wobei

$$II_1 \lesssim \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\, t^{\frac{\gamma}{r_1}} f^*(t^\gamma) = \sup_{t>0} t^{\gamma\cdot\frac{1}{r}} f^*(t^\gamma) = \|f\|_{r,\infty}$$

und

$$II_2 \lesssim \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_{t^\gamma}^\infty \underbrace{s^{\frac{1}{r}}f^*(s)}_{\le\|f\|_{r,\infty}}\, s^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}}\frac{ds}{s}$$

$$\lesssim \sup_{t>0}\underbrace{t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\,t^{\gamma\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)}}_{=1}\cdot\|f\|_{r,\infty} = \|f\|_{r,\infty},$$

insgesamt also die behauptete Abschätzung.

Fall 3: $r_1 = \infty$, $q < \infty$. Hier sind wieder

$$I = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (Tf^t)^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ und } II = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (Tf_t)^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

(wie in Fall 1) abzuschätzen. Da $r_0 < \infty$ ist, erhält man exakt wie in Fall 1 $I \le C M_0 \|f\|_{r,q}$, die Abschätzung von II ist allerdings zu modifizieren. Wir haben

$$\|Tf\|_{p_1,\infty} \le M_1 \|f\|_\infty$$

zur Verfügung, also $t^{\frac{1}{p_1}} (Tf_t)^*(t) \le M_1 \|f_t\|_\infty = M_1 f^*(t^\gamma)$.

Damit ergibt sich

$$II \le M_1 \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} f^*(t^\gamma) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{Subst. } s = t^\gamma, \text{ s.o.}$$

$$\lesssim M_1 \left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{r} - \underbrace{\frac{1}{r_1}}_{=0}} f^*(s) \right)^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} = M_1 \|f\|_{r,q}.$$

Fall 4: $r_1 = q = \infty$. Hier sind I und II wie in Fall 2 abzuschätzen, wobei $I \le M_0 \|f\|_{r,\infty}$ exakt wie dort zu beweisen ist. Für den zweiten Beitrag haben wir

$$II = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (Tf_t)^*(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} \cdot \underbrace{t^{\frac{1}{p_1}} (Tf_t)^*(t)}_{\text{wie in Fall 3 } \to\ \le M_1 f^*(t^\gamma)}$$

$$\le M_1 \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} f^*(t^\gamma) = M_1 \sup_{s>0} s^{\frac{1}{r} \underbrace{\left(-\frac{1}{r_1}\right)}_{=0}} f^*(s)$$

$$= M_1 \|f\|_{r,\infty}.$$

Wiederum haben wir $I + II \le C(M_0 + M_1) \|f\|_{r,q}$, wie behauptet. Damit ist auch der 4. und letzte Fall diskutiert.

$\square$