2.2 Schwache L^p- und Lorentzräume

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein σ-endlicher Maßraum.

Def.: Für eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt

$$d_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty], \quad t \mapsto d_f(t) := \mu\{x \in X : |f(x)| > t\}$$

die Verteilungsfunktion von f (engl. distribution function).

Bsp.: (1) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu) = ((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ und $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig und streng monoton fallend, so ist für $t > 0$

$$d_f(t) = \lambda(\underbrace{\{x \in (0,\infty) : f(x) > t\}}_{\Longleftrightarrow\ x < f^{-1}(t)}) = \begin{cases} 0, & t \geq \lim_{x \to 0} f(x) \\ \lambda((0, f^{-1}(t))) & \text{sonst} \end{cases}$$

(Für $t = 0$: $d_f(0) = \lambda(\{x \in (0,\infty), f(x) > 0\}) = \infty$.)

Insbesondere gilt, wenn $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend, stetig und bijektiv ist, dass $d_f(t) = f^{-1}(t)$, sofern $t > 0$.

(2) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ beliebig und $f(x) = \chi_A(x)$ für ein $A \in \mathcal{A}$.

Dann ist

$$d_f(t) = \mu\{x \in X : \chi_A(x) > t\} = \begin{cases} \mu(A), & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{falls } t \geq 1. \end{cases}$$

D.h. $d_f(t) = \mu(A) \cdot \chi_{[0,1)}(t)$. Etwas allgemeiner: Ist $a \in \mathbb{C}$ und $f(x) = a \cdot \chi_A(x)$, so erhalten wir

$$d_f(t) = \mu(A) \cdot \chi_{[0,|a|)}(t).$$

(3) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ beliebig, $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $a_1 > a_2 > \dots > a_N > a_{N+1} := 0$, sowie

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \quad \text{(Treppenfunktion)}$$

Was ist $d_f(t) = \mu \{x : \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}(x) > t\}$ in diesem Fall?

Falls $t \geq a_1$: Die Menge ist $\emptyset$, also $d_f(t) = 0$,

$a_1 > t \geq a_2$: die Menge ist gerade A_1, also $d_f(t) = \mu(A_1) =: B_1$,

$a_2 > t \geq a_3$: " " " $A_1 \cup A_2$, also $d_f(t) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$

$$=: B_2$$

$$\sum_{k=1}^{j} \mu(A_k) = B_j$$

$$d_f(t) = \sum_{j=1}^{N} B_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(t), \text{ also eine monotone fallende Treppenfunktion.}$$

Lemma 1 (einfache Eigenschaften von d_f): $d_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ ist monoton fallend, rechtsseitig stetig und es gelten:

(1) $|f| \leq |g| \implies d_f \leq d_g$;

(2) $d_{\lambda f}(t) = d_f\left(\frac{t}{|\lambda|}\right) \quad (\lambda \neq 0)$

(3) $d_{f+g}(t+s) \leq d_f(t) + d_g(s)$.

Bew.: Monotonie: Sei $h > 0$. Dann ist

$$\{x : |f(x)| > t+h\} \subset \{x : |f(x)| > t\}$$

und $d_f(t+h) = \mu\{x : |f(x)| > t+h\} \leq \mu\{x : |f(x)| > t\} = d_f(t)$.

Ebenso sehen wir: $|f| \le |g|$

$\Rightarrow \{x : |f(x)| > t\} \subset \{x : |g(x)| > t\}$

$\Rightarrow d_f(t) = \mu\{x : |f(x)| > t\} \le \mu\{x : |g(x)| > t\} = d_g(t)$.

Das ist (1).

Rechtsseitige Stetigkeit: Da d_f monoton fallend ist, existiert $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} d_f(t)$. Daher können wir o. E. $t_n \searrow t_0$ annehmen, so dass $\{x : |f(x)| > t_0\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x : |f(x)| > t_n\}$ mit einer aufsteigenden Mengenfolge auf der rechten Seite. Dann folgt $\lim\limits_{n \to \infty} d_f(t_n) = d_f(t_0)$ aus der aufsteigenden Stetigkeit von Maßen.

Zu (2) $d_{\lambda f}(t) = \mu\{x : |\lambda f(x)| > t\} = \mu\{x : |f(x)| > \frac{t}{|\lambda|}\} = d_f\left(\frac{t}{|\lambda|}\right)$

Zu (3) $|f(x) + g(x)| \ge t + s \Rightarrow |f(x)| + |g(x)| > t + s$

$\Rightarrow |f(x)| > t$ oder $|g(x)| > s$. Also ist

$\{x : |f(x) + g(x)| > t + s\} \subset \{x : |f(x)| > t\} \cup \{x : |g(x)| > s\}$

$\Rightarrow \mu\{x : |f(x) + g(x)| > t + s\} \le \mu\{x : |f(x)| > t\} + \mu\{x : |g(x)| > s\}$

$\Rightarrow d_{f+g}(s+t) \le d_f(t) + d_g(s)$. $\square$

Lemma 2: Für $\mathcal{A}$-meßbares $f : X \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\|f\|_p = \left(p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} d_f(t)\, dt\right) \qquad (1 \le p < \infty)$$

und $\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 : d_f(t) = 0\}$

Bew.: Wg. $d_f(t) = \mu\{x : |f(x)| > t\}$ ist die Aussage für $p = \infty$ gerade die Def. von $\|f\|_\infty$. Sei also $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_X \int_0^{|f(x)|^p} dt \, d\mu(x)$$

$$= \int_X \int_0^\infty \chi_{\{|f|^p > t\}}(x) \, dt \, d\mu(x)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_X \chi_{\{|f|^p > t\}}(x) \, d\mu(x) \, dt$$

$$= \int_0^\infty \mu\{x : |f(x)| > t^{\frac{1}{p}}\} \, dt = \int_0^\infty d_f(t^{\frac{1}{p}}) dt.$$

Die Substitution $s = t^{\frac{1}{p}} \Rightarrow t = s^p \Rightarrow$ "$dt = p\, s^{p-1} ds$"
ergibt $\|f\|_p^p = p\int_0^\infty s^{p-1} d_f(s) \, ds$, d.i. die Beh. $\square$

<u>Def.</u> (schwache L^p-Räume): Für $\mathcal{A}$-meßbares $f : X \to \mathbb{C}$ setzt man

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{t>0} t \, d_f(t)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

und $\|f\|_{\infty,\infty} := \|f\|_\infty \left(= \inf\{c > 0 : d_f(c) = 0\}\right)$.

Dann heißt $L^{p,\infty}(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C}, \mathcal{A}\text{-meßbar}, \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$

der <u>schwache L^p-Raum über $(X, \mathcal{A}, \mu)$.</u>

(engl.: "weak L^p-spaces".)

Bem. zur Def.:

(i) Es gilt $\|f\|_{p,\infty} = \inf\{C>0 : d_f(t) \le \frac{C^p}{t^p} \ \forall t>0\}$,

denn: $\sup\limits_{t>0} t\, d_f(t)^{\frac{1}{p}} = \inf\{C>0 : \sup\limits_{t>0} t\, d_f(t)^{\frac{1}{p}} \le C\}$

$= \inf\{C>0 : t\, d_f(t)^{\frac{1}{p}} \le C \ \forall t>0\} = \inf\{C>0 : d_f(t) \le \frac{C^p}{t^p} \ \forall t>0\}$,

(ii) Die Elemente von $L^{p,\infty}(\mu)$ sind Äquivalenzklassen μ-f.ü. identischer Funktionen.

(iii) $\| \ \|_{p,\infty} : L^{p,\infty}(\mu) \to [0,\infty)$ ist eine Quasi-Norm, d.h. man hat die Eigenschaften einer Norm mit Ausnahme der Dreiecksungleichung, die durch die schwächere Bed.

$$\|f+g\| \le C(\|f\| + \|g\|)$$

ersetzt wird. Im Falle der schwachen L^p-Räume ist $C=2$ die kleinste Konstante, die man erreichen kann. (Bew. mit Hilfe von Lemma 1, ggf. → Übungen).

Unter anderem um den Zusammenhang zu klären zwischen $L^p(\mu)$ und $L^{p,\infty}(\mu)$ zeigen wir:

Lemma 3 (Tschebyschev'sche Ungleichung) Sei $1 \le p \le \infty$ und $f \in L^p(\mu)$. Dann ist auch $f \in L^{p,\infty}(\mu)$ und es gilt:

$$\|f\|_{p,\infty} \le \|f\|_p .$$

Bew.: $\|f\|_p^p = \int\limits_X |f|^p \, d\mu \ \ge \int\limits_{|f|>t} t^p \, d\mu = t^p d_f(t) \ \forall t>0$.

$\Rightarrow \|f\|_{p,\infty}^p = \sup\limits_{t>0} t^p d_f(t) \le \|f\|_p^p$. □

Folgerung: $L^p(\mu) \subset L^{p,\infty}(\mu)$ mit einer stetigen Einbettung.
(Dies umfasst neben der Mengeninklusion auch die Aussage, dass $f_n \to f$ in $L^p(\mu) \Longrightarrow f_n \to f$ in $L^{p,\infty}(\mu)$.)

Konvergenz in $L^{p,\infty}(\mu)$ ist weiterhin eine stärkere Eigenschaft als die Konvergenz dem Maß nach:

<u>Def.</u>: Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$. Man sagt, $(f_n)_n$ <u>konvergiert dem Maß μ nach</u> gegen $f: X \to \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

<u>Bez.</u>: $f_n \xrightarrow[\mu]{} f \ (n \to \infty)$ oder $\mu\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Begründung, dass $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f\|_{p,\infty} = 0 \Longrightarrow \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$:

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = d_{|f-f_n|}(\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^p} \sup_{t>0} t^p d_{|f-f_n|}(t)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \| f_n - f \|_{p,\infty}^p$$

Ähnlich wie bei der $L^p(\mu)$-Konvergenz gilt:

Ist $(f_n)_n$ eine Folge meßbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$, die dem Maß nach gegen $f: X \to \mathbb{C}$ konvergiert, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, die μ-fast überall gegen f konvergiert. Desgl. für Cauchy-Folgen.

(Bew.: Grafakos, Thm. 1.1.11)
Der Übergang zu einer Teilfolge ist notwendig!

Weitere Bem. zur Definition der schwachen L^p-Räume:

(iv) $L^{p,\infty}(\mu)$ ist vollständig bezüglich der definierenden Quasi-Norm bzw. der hierdurch induzierten Metrik.

Bew.-Skizze: Sei $(f_n)_n$ Cauchy in $L^{p,\infty}(\mu)$

$\rightarrow$ $(f_n)_n$ ist Cauchy dem Maß nach, d.h. $\lim_{n,m\to\infty} d_{f_n-f_m}(t)=0 \;\forall t$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$, so dass $(f_{n_k}(x))_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist für μ-f.a. $x\in X$.

$\mathbb{C}$ vollständig erlaubt: $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ (bis auf Nullmenge) Anschließend zeigt man noch, dass $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}-f\|_{p,\infty}=0$ und damit $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{p,\infty}=0$.

(Weitere Einzelheiten: Grafakos, Thm. 1.1.13 und 1.4.11)

(v) Im allgemeinen gilt: $L^p(\mu) \subsetneqq L^{p,\infty}(\mu)$.

Bsp.: Sei $\mu=\lambda^n$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{-\frac{n}{p}} & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}.$$

Für die Verteilungsfunktion von f erhalten wir

$$d_f(t) = \lambda^n\{x : \underbrace{|x|^{-\frac{n}{p}} > t}_{\iff |x| < t^{-\frac{p}{n}}}\} = \lambda^n \underbrace{\{x : |x| < t^{-\frac{p}{n}}\}}_{\text{Kugel mit Radius } t^{-\frac{p}{n}}}$$

$$= \Omega_n \cdot t^{-p}.$$ Hieraus folgt

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t\, d_f(t)^{\frac{1}{p}} = \Omega_n^{\frac{1}{p}}, \text{ also } f \in L^{p,\infty}(\lambda^n),$$

aber: $\|f\|_p^p = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} d_f(t)\,dt = p \cdot \Omega_n \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{t} = \infty$,

Lemma 2

und d.h. $f \notin L^p(\lambda^n)$.

In ähnlicher Weise kann man zeigen: Ist μ das Zählmaß auf $\mathbb{Z}^n$ und

$$f: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}, \quad k \mapsto f(k) = \begin{cases} |k|^{-\frac{n}{p}} & : k \neq 0 \\ 0 & : k = 0, \end{cases}$$

so gilt ~~kaum~~: $f \in L^{p,\infty}(\mu) \setminus L^p(\mu)$. In diesem Fall ist

$$d_f(t) = \#\text{ Gitterpunkte in } B_R(0) \setminus \{0\} \text{ mit } R = t^{-\frac{p}{n}},$$

und für deren Abschätzung muss man etwas mehr Sorgfalt aufwenden als oben. Es können viele Gitterpunkte auf dem Rand der Kugel liegen!

Die Fortführung der Überlegungen in obigem Bsp. zeigt:

(vi) Die Treppenfunktionen sind im allgemeinen keine dichte Teilmenge von $L^{p,\infty}(\mu)$.

Denn: Seien μ, f wie im Bsp. zu (v) und g irgendeine Treppenfunktion $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit Mengen A_i endlichen Maßes. Da f rotationssymmetrisch ist, können wir dies auch von g annehmen und erhalten: Es gibt ein $R>0$, so dass: $g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > R$.

Dann ist $|f(x) - g(x)| \geq \chi_{\{|x|>R\}}(x)\, |x|^{-\frac{n}{p}} =: h(x)$

und für die Verteilungsfunktion ergibt sich

$$d_{|f-g|}(t) \geq d_h(t) = \lambda^n\{x : |x| > R \wedge |x| < t^{-\frac{p}{n}}\},$$

also für $t < R^{-\frac{n}{p}}$: $d_h(t) = \Omega_n\,(t^{-p} - R^n)$ und damit

$$\|h\|_{p,\infty}^p = \sup_{t>0} t^p d_h(t) = \sup_{R^{-\frac{n}{p}}>t>0} t^p \cdot \Omega_n\,(t^{-p} - R^n) = \Omega_n,$$

$$\Rightarrow \|f-g\|_{p,\infty} \geq \Omega_n^{\frac{1}{p}}.$$

Im folgenden sollen die L^p- und $L^{p,\infty}$-Räume eingebettet werden in eine zweiparametrige Skala $(L^{p,q})_{1\leq p,q\leq\infty}$ der sogenannten Lorentzräume. Dazu definieren wir zunächst die "monoton fallende Umordnung" einer messbaren Fkt.:

<u>Def.</u>: Es sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Dann heißt

$$f^* : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty],\quad t \longmapsto f^*(t),$$

definiert durch

$$f^*(t) := \inf\{s \geq 0 : d_f(s) \leq t\} \qquad (\inf \emptyset := \infty)$$

die monoton fallende Umordnung von f.

<u>Bsp.</u> (1) $(X, \mathcal{A}, \mu) = ((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ und $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ streng monoton fallend und bijektiv. Dann ist $d_f(s) = f^{-1}(s)$.

Hieraus folgt

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0 : f^{-1}(s) \leq t\}$$

$$= \inf\{s \geq 0 : f(t) \leq s\} = f(t)$$

f monoton fallend! (Eine monoton fallende bijektive Funktion auf $(0,\infty)$ kann so aus ihrer Verteilungsfkt. rekonstruiert werden.)

(2) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ beliebig, $f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt und $a_1 > a_2 > \ldots > a_N > a_{N+1} := 0$. Auch hierfür haben wir die Verteilungsfunktion bereits berechnet, es ist

$$d_f(s) = \sum_{j=1}^{N} B_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(s) \quad \text{mit } B_j = \sum_{k=1}^{j} \mu(A_k)$$

Wenn

$t \geq B_N$: $d_f(s) \leq t \ \forall s \geq 0 \Rightarrow f^*(t) = 0$

$B_N > t \geq B_{N-1}$: $d_f(s) \leq t \ \forall s \geq a_N \Rightarrow f^*(t) = a_N$

$\vdots$

$B_k > t \geq B_{k-1}$: $d_f(s) \leq t \ \forall s \geq a_k \Rightarrow f^*(t) = a_k$

$$\Rightarrow \quad f^*(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{[B_{k-1}, B_k)}(t) \qquad (\text{mit } B_0 = 0).$$

Im nächsten Lemma sind einige einfache Eigenschaften von f^* zusammengefasst:

<u>Lemma</u> 4: f^* ist monoton fallend, rechtsseitig stetig und es gelten:

(1) $d_f(f^*(t)) \leq t$

(2) $f^*(t) > s \Leftrightarrow d_f(s) > t$

(3) $(f+g)^*(t+s) \leq f^*(t) + g^*(s)$

(4) $|f| \leq |g| \Rightarrow f^* \leq g^*$

(5) $d_f(s) = d_{f^*}(s)$

(6) $(\lambda f)^*(t) = |\lambda| f^*(t)$

Bew.:

Monotonie: Ist $h \geq 0$, so gilt

$$\{s \geq 0 : d_f(s) \leq t\} \subset \{s \geq 0 : d_f(s) \leq t+h\}.$$

Infimumsbildung gibt $f^*(t) \geq f^*(t+h)$.

Zu (1): $f^*(t) = \inf\{s \geq 0 : d_f(s) \leq t\}$. Also existiert eine Folge (s_n) mit $\lim_{n\to\infty} s_n = f^*(t)$, $s_n \geq f^*(t)$ und $d_f(s_n) \leq t$. Nach Lemma 1 ist d_f rechtsseitig stetig, also gilt $d_f(f^*(t)) = \lim_{n\to\infty} d_f(s_n) \leq t$.

Zu (2) $f^*(t) > s \iff \inf\{\sigma \geq 0 : d_f(\sigma) \leq t\} > s$

$$\Rightarrow s \notin \{\sigma \geq 0 : d_f(\sigma) \leq t\} \Rightarrow d_f(s) > t$$

$$f^*(t) \leq s \underset{d_f \text{ fallend}}{\Rightarrow} d_f(s) \leq d_f(f^*(t)) \underset{(1)}{\leq} t. \quad \text{Also:}$$

$$d_f(s) > t \Rightarrow f^*(t) > s.$$

Zu (3) Nach Lemma 1, (3) haben wir

$$d_{f+g}(f^*(t) + g^*(s)) \leq d_f(f^*(t)) + d_g(g^*(s)) \underset{(1)}{\leq} t+s$$

und daher

$$(f+g)^*(t+s) = \inf\{\sigma \geq 0 : d_{f+g}(\sigma) \leq t+s\} \leq f^*(t) + g^*(s),$$

denn $f^*(t) + g^*(s)$ gehören zu der Menge, über die das Infimum gebildet wird.

zu (4): $|f| \le |g| \underset{\substack{\text{Lemma} \\ 1,\ (1)}}{\Longrightarrow} d_f(s) \le d_g(s)$

$$\Longrightarrow \quad \{s \ge 0 : d_f(s) \le t\} \supset \{s \ge 0 : d_g(s) \le t\}$$

$$\Longrightarrow \quad f^*(t) = \inf\{s \ge 0 : d_f(s) \le t\} \le \inf\{s \ge 0 : d_g(s) \le t\} = g^*(t)$$

---

zu (6) $(\lambda f)^*(t) = \inf\{s \ge 0 : d_{\lambda f}(s) \le t\}$

$d_{\lambda f}(s) \qquad = \inf\{s \ge 0 : d_f(\frac{s}{|\lambda|}) \le t\} = \inf\{|\lambda|\sigma : d_f(\sigma) \le t\}$

$= d_f(\frac{s}{|\lambda|})$

nach Lemma 1, (2) $\qquad = |\lambda| f^*(t).$

zu (5) $\quad d_{f^*}(s) = \lambda\{t > 0 : f^*(t) > s\} \underset{(2)}{=} \lambda\{t > 0 : d_f(s) > t\}$

$$= \lambda((0, d_f(s))) = d_f(s)$$

Rechtsseitige Stetigkeit: Da f^* monoton ist, existiert

$\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f^*(t+\varepsilon) =: a$. O.E. sei (ε_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist $f^*(t+\varepsilon_n) \nearrow a$.

Nehmen wir $a < f^*(t)$ an, folgt

$$t \underset{(2)}{<} d_f(a) \le d_f(f^*(t+\varepsilon_n)) \underset{(1)}{\le} t + \varepsilon_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} t. \ \lightning$$

$\nwarrow$ d_f fallend

Also ist $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f^*(t+\varepsilon) = f^*(t)$, d.h. f^* ist rechtsseitig stetig.

$\square$

Als nächstes soll der Zsh. zwischen der fallenden Umordnung f^* und den schwachen L^p-Normen hergestellt werden.

Lemma 5: Sei $f: X \to \mathbb{C}$ meßbar und $1 \le p \le \infty$. Dann gilt

$$\left(\sup_{s>0} s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} =\right) \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t).$$

Bew.: (1) $p=\infty$. In diesem Fall ist:

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t>0} f^*(t) \overset{\text{Monotonie}}{=} \lim_{t \searrow 0} f^*(t) \overset{\text{rechtsseitige Stetigkeit}}{=} f^*(0)$$

$$= \inf \{ s \ge 0 : d_f(s) = 0 \} = \inf \{ s \ge 0 : \mu\{|f| > s\} = 0 \} = \|f\|_\infty$$

(2) $1 \le p < \infty$: Nach Teil (2) in Lemma 4 gilt:

$$f^*(t) > s \iff d_f(s) > t \qquad (*)$$

(i) Wir wählen $\varepsilon \in (0, f^*(t))$, so dass $0 < f^*(t) - \varepsilon =: s < f^*(t)$ und wenden $(*)$ von links nach rechts an. Dann folgt

$$d_f(f^*(t) - \varepsilon) > t$$

und damit

$$\sup_{s>0} s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} \ge (f^*(t) - \varepsilon)\, d_f(f^*(t) - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \ge (f^*(t) - \varepsilon) \cdot t^{\frac{1}{p}}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir $f^*(t) \cdot t^{\frac{1}{p}} \le \sup_{s>0} s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} \quad \forall t > 0$,

also auch: $\sup_{t>0} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p}} \le \sup_{s>0} s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Wir wählen $0 < \varepsilon < d_f(s)$ und wenden $(*)$ von rechts nach links an mit $t = d_f(s) - \varepsilon$. Dann folgt:

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \ge (d_f(s) - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot f^*(d_f(s) - \varepsilon) > (d_f(s) - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot s.$$

Jetzt $\varepsilon \searrow 0$, dann gilt $\forall s > 0$: $s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$;

auch ist $\sup_{s>0} s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$.

$\square$

Def. (Lorentz-Räume) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \le p, q \le \infty$. Für eine $\mathcal{A}$-messbare Fkt. $f : X \to \mathbb{C}$ definiert man

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , \text{ falls } q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & , \text{ falls } q = \infty. \end{cases}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen μ-f.ü. identischer Funktionen, für die $\|f\|_{p,q} < \infty$ ist, wird als Lorentzraum $L^{p,q}(\mu)$ zu Parametern p und q bezeichnet.

Bem.: (1) $\| \ \|_{p,q}$ ist eine Quasi-Norm ($\to$ Übungen)

(2) Für $q < \infty$ ist $L^{\infty,q}(\mu) = \{0\}$. Ist nämlich $f(x) \neq 0$ auf einer Menge positiven Maßes, so existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass

$$\mu\{x : |f(x)| > \varepsilon\} = d_f(\varepsilon) > \delta,$$

also nach Lemma 4, (2) $f^*(\delta) > \varepsilon$ und somit wg. der Monotonie von f^*: $f(t) > \varepsilon$ auf $[0, \delta]$. Dann ist

$$\|f\|_{\infty,q}^q = \int_0^\infty f^*(t)^q \frac{dt}{t} \ge \varepsilon^q \cdot \int_0^\delta \frac{dt}{t} = \infty. \text{ Also } f \notin L^{\infty,q}(\mu)$$

(3) Nach Lemma 5 ist der schwache L^p-Raum $L^{p,\infty}(\mu)$ gleich dem Lorentzraum zu denselben Parametern. Die Bezeichnungen sind also konsistent.

(4) $L^{p,p}(\mu) = L^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$.

Für $p = \infty$ folgt dies auch aus Lemma 5.

$\longrightarrow$

Für $1 \le p < \infty$ haben wir

$$\|f\|_{p,p}^p = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} = \int_0^\infty f^*(t)^p dt \underset{\text{Lemma 2}}{=} p \int_0^\infty t^{p-1} d_{f^*}(t)\, dt$$

$d_f = d_{f^*}$ nach ~~Lemma 4 (5)~~

$$= p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} d_f(t)\, dt = \|f\|_p^p .$$

Bei festem $p \in [1,\infty)$ bilden die Räume $L^{p,q}(\mu)$ eine mit $q \in [1,\infty]$ aufsteigende Skala von Funktionenräumen:

<u>Lemma</u> 6: Für $1 \le p < \infty$ und $1 \le q_1 \le q_2 \le \infty$ ist

$$L^{p,q_1}(\mu) \subset L^{p,q_2}(\mu).$$

<u>Bew.</u>: Zu zeigen ist, dass

$$\|f\|_{p,q_2} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_2} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}} \overset{(!)}{\lesssim} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} = \|f\|_{p,q}$$

gilt. Das geschieht in zwei Schritten:

(1) $\|f\|_{p,q} \sim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{k}{p}} f^*(2^k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (äquivalente Quasinormen auf $L^{p,q}(\mu)$)

(2) $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$, wenn $q_1 \le q_2$

Aus (1) und (2) folgt dann die Beh.

Zu (1) $\|f\|_{p,q}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(\cancel{p})\right)^q \frac{dt}{t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}$

$$\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^*(2^k)^q \cdot 2^{k\left(\frac{q}{p}-1\right)} \cdot 2^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\frac{q}{p}} \cdot f^*(2^k)^q = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{k}{p}} f^*(2^k)\right)^q$$

$$\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \left(2^{\frac{k}{p}} f^*(2^k)\right)^q \frac{dt}{t} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}.$$

Zu (2). O.E. können wir $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_1} = 1$ annehmen.

Insbes. ist dann $|a_k| \leq 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}$ und daher

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_2} \underset{q_2 \geq q_1}{\leq} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_1} = 1 \Rightarrow \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq 1 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$