Kap. 2: Interpolation

2.1 Der Satz von Riesz-Thorin

Fragestellung und allgemeine Voraussetzungen in diesem Abschnitt: Gegeben seien:

- Zwei Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$;
- Hölder-Exponenten $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1, \dots \le \infty$, die Banachräumepaare $L^{p_i}(\mu)$ und $L^{q_i}(\nu)$ werden stets als $\mathbb{C}$-Vektorräume betrachtet;
- ein gemeinsamer dichter linearer Teilraum $D \subset L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ (allg.: $\|x\|_{E \cap F} := \|x\|_E + \|x\|_F$);
- eine lineare Abbildung $T : D \longrightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ (allg.: $\|x\|_{E+F} := \inf\limits_{\substack{y+z=x \\ y \in E, z \in F}} \|y\|_E + \|z\|_F$), die den Stetigkeitsabschätzungen $\|Tf\|_{q_i} \le M_i \|f\|_{p_i}$ für $i \in \{0,1\}$ genügt.

Können wir hieraus für Hölderexponenten $p \in [p_0, p_1]$ und $q \in [q_0, q_1]$ auf eine Abschätzung

$$\|Tf\|_q \le M \|f\|_p$$

für alle $f \in D$ schließen, die es erlaubt, T zu einer stetigen linearen Abschätzung $\tilde{T} : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ fortzusetzen? Und: In welcher Beziehung müssen die Hölder-Exponenten p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 dafür zueinanders stehen?

Lemma 1 (Lyapunoff'sche Ungleichung): Sei $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$, $\theta \in [0,1]$ und $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Dann ist $f \in L^p(\mu)$ und es gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}$.

Bew.: Wir wählen $r_{0,1}$ mit $\frac{1}{r_0} = \frac{1-\theta}{p_0}$, $\frac{1}{r_1} = \frac{\theta}{p_1}$, so dass $\frac{1}{p} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$. Dann ergibt die Höldersche Ungleichung

$$\|f\|_p = \| |f|^{1-\theta} |f|^{\theta} \|_p \leq \| |f|^{1-\theta} \|_{r_0} \| |f|^{\theta} \|_{r_1}$$

$$= \|f\|_{r_0(1-\theta)}^{1-\theta} \|f\|_{r_1 \theta}^{\theta} = \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}. \quad \square$$

Folgerungen: In der oben beschriebenen Situation ist

(1) $\mathcal{D} \subset L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu) \subset L^p(\mu)$, wann immer p zwischen p_0 und p_1 liegt;

(2) $L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ und damit auch $\mathcal{D}$ dicht in $L^p(\mu)$, denn in $L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ liegen die Treppenfunktionen.

(3) Gilt $\|Tf\|_{q_i} \leq M_i \|f\|_{p_i}$ und ist $\frac{1}{q}$ ~~$\in [q_0, q_1]$~~, $= \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, so ist zumindest $\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} \|f\|_{p_0}^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta} < \infty$.

Letzteres ist natürlich noch keine ~~Norm~~ Stetigkeitsabschätzung für T, deutet aber an, wohin die Reise gehen sollte:

<u>Satz 1.</u> (Reisz-Thorin): Neben den obigen allgemeinen Voraussetzungen seien $\theta \in [0,1]$ und $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, sowie $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Dann gilt für alle $f \in D$

$$\| Tf \|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_p .$$

<u>Bem.</u>: T ist also eine auf einem dichten linearen Teilraum von $L^p(\mu)$ definierte stetige lineare Abbildung. Daher kann T in eindeutiger Weise zu einer linearen Abbildung $\hat{T} : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ fortgesetzt werden, die derselben Stetigkeitsabschätzung genügt. Diese wird in der Regel wieder mit T bezeichnet.

Zum Beweis des Satzes von Reisz-Thorin wird der folgende "Drei-Geraden-Satz" (Hadamard) verwendet, dessen Beweis wiederum vom Maximum-Prinzip für holomorphe Funktionen Gebrauch macht:

<u>Maximumprinzip:</u> Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $F : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig und auf U holomorph. Dann nimmt $|F|$ sein Maximum auf ∂U an.

Dieses Max.-Prinzip will ich als bekannt voraussetzen ($\to$ Funktionentheorie) und benutzen zum Beweis des nachfolgenden Satzes.

Satz 2 (Drei-Geraden-Satz, Hadamard) Es seien $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ und $F : S \to \mathbb{C}$ eine stetige und beschränkte Funktion, die auf $\mathring{S}$ holomorph ist. Für $0 \leq \theta \leq 1$ sei

$$M_\theta = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(\theta + iy)|.$$

Dann gilt $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Bem.: Ohne die Beschränktheitsvoraussetzung an F wird der Satz falsch!

Bew.: (1) Sei zunächst $M_0 = M_1 = 1$ angenommen. Dann ist $|F(z)| \leq 1 \;\; \forall z \in S$ zu zeigen. Wir setzen für $\varepsilon > 0$

$$F_\varepsilon(z) := \frac{F(z)}{1 + \varepsilon z}, \quad z \in S.$$

Dann ist F_ε ebenfalls beschränkt und stetig auf S und holomorph in $\mathring{S}$. Ferner gilt

$$\lim_{|y| \to \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |F_\varepsilon(x + iy)| = 0.$$

Also existiert ein $R > 0$, so dass $|F_\varepsilon(x+iy)| \leq 1$ ist für alle $x \in [0,1]$ und $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| \geq R$. Ferner haben wir

$$|F_\varepsilon(x+iy)| \leq 1$$

für $x + iy \in \partial Q$, wobei $Q = \{x + iy : |y| \leq R, 0 \leq x \leq 1\}$.
Das Maximum-Prinzip ergibt: $|F_\varepsilon(z)| \leq 1 \;\; \forall z \in Q$

und somit $|F_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \forall z \in S$. Grenzübergang

$\varepsilon \searrow 0$ liefert: $|F(z)| = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} |F_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \forall z \in S$.

(2) $0 < M_0$ und $0 < M_1$. Wir setzen

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{M_0^{1-z} M_1^{z}}$$

Dann ist $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(1+iy)| = \frac{1}{M_1} \cdot \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |F(1+iy)| = 1$

und $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(iy)| = \frac{1}{M_0} \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |F(iy)| = 1$ und somit

ist (1) anwendbar. Wir erhalten

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F(\theta+iy)| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |M_0^{1-\theta-iy}| \, |M_1^{\theta+iy}| \sup_{y \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(\theta+iy)|$$

$$\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

(3) $M_0 = 0$. Wir wählen $F_\varepsilon(z) = F(z) + \varepsilon$. Dann gilt

nach (2)

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_\varepsilon(\theta+iy)| \leq \varepsilon^{1-\theta} \cdot (M_1 + \varepsilon)^{\theta}.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $F(z) = 0 \quad \forall z \in \mathring{S}$, wg. Stetigkeit gilt

$F(z) = 0 \quad \forall z \in S$. $\square$

<u>Bew.</u> des Satzes von Riesz-Thorin:

(1) Vorbem.: Wir wollen $\| Tf \|_q$ "by duality" abschätzen, d.h. indem wir schreiben

$$\| Tf \|_q = \sup_{\substack{g \in L^{q_1} \\ \|g\|_{q_1} \leq 1}} \left| \int g(y)\, Tf(y)\, d\nu(y) \right| \qquad \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1\right)$$

Das ist für beliebige Maßräume gerechtfertigt durch den Rieszschen Darstellungsatz, sofern $1<p<\infty$ ist. Man betrachtet dann die Norm des stetigen linearen Funktionals

$$g: L^{p'} \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \int_Y g\, Tf\, d\nu .$$

Für $p\in\{1,\infty\}$ müssen wir eine kurze Zusatzüberlegung anstellen.

(i) Sei $\varphi \in L^\infty(\nu)$. Dann gibt es zu $\varepsilon>0$ eine Menge $E\in\mathcal{E}$ mit $0<\nu(E)<\infty$ und $|\varphi(x)| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x\in E$. Wir wählen

$$\psi(x) = \frac{\chi_E(x)}{\nu(E)} \cdot \frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}, \quad \text{so dass } \|\psi\|_1 = 1$$

dann ist $\int_Y \psi(x)\varphi(x)\,d\nu(x) = \frac{1}{\nu(E)}\int_E |\varphi(x)|\,d\nu(x) \geq \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$.

Gilt für jedes $\varepsilon>0$, also $\|\varphi\|_\infty = \sup_{\substack{\psi\in L^1\\ \|\psi\|=1}} \left|\int_Y \varphi\,\psi\,d\nu\right|$.

(ii) Sei $\varphi\in L^1(\nu)$. Dann ist φ ein L^1-Grenzwert von Treppenfunktionen $t_n = \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^{(n)} \chi_{A_i^{(n)}}$, wobei die $A_i^{(n)}$ endliches Maß haben. Also gibt es zu $\varepsilon>0$ eine Menge $E_\varepsilon \in \mathcal{E}$, so dass $\varphi(x)\neq 0 \quad \forall x\in E_\varepsilon$ und

$$\int_{E_\varepsilon} |\varphi(x)|\,d\nu(x) \geq \|\varphi\|_1 - \varepsilon$$

Wir setzen $\psi(x) = \chi_{E_\varepsilon}(x)\cdot\frac{|\varphi(x)|}{\varphi(x)}$. Dann ist $\psi\in L^\infty(\nu)$ mit $\|\psi\|_\infty = 1$ und $\int_Y \varphi(x)\cdot\psi(x)\,d\nu(x) \geq \|\varphi\|_1 - \varepsilon$.

Also: $\|\varphi\|_1 = \sup_\psi \left|\int_Y \varphi(x)\psi(x)\,d\nu(x)\right|$, wobei sich das sup über alle $\psi\in L^\infty(\nu)$ mit $\|\psi\|\leq 1$ erstreckt, für die

$\nu(\{y \in Y : \psi(y) \neq 0\}) < \infty$ ist.

(2) Abzuschätzen ist also $\left|\int_Y g(y)\, Tf(y)\, d\nu(y)\right|$, wobei

- $g \in L^{q'}(\nu)$ mit $\|g\|_{q'} \leq 1$ ist,
- $f \in L^p(\mu)$ ist, wobei wir (da T linear ist), annehmen können, dass $\|f\|_p \leq 1$ ist
- wir uns ferner darauf zurückziehen können, dass f und g Treppenfunktionen (mit Mengen endlichen Maßes sind (denn diese sind dicht in $L^p(\mu)$ bzw. $L^q(\nu)$).

Wir werden also zeigen:

Es seien, mit disjunkten Mengen $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ und $C_1, \dots, C_M \in \mathcal{C}$, $\alpha_n, \gamma_m \in \mathbb{C}$

$$f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \chi_{A_n} \quad \text{und} \quad g = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \cdot \chi_{C_m},$$

so dass

$$1 = \|f\|_p^p = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^p \mu(A_n) = \|g\|_{q'}^{q'} = \sum_{m=1}^{M} |\gamma_m|^{q'} \nu(C_m)$$

(bzw. $1 = \|f\|_\infty = \max_{n=1}^{N} |\alpha_n|$ für $p = \infty$ und

$1 = \|g\|_\infty = \max_{m=1}^{M} |\gamma_m|$ im Fall $q' = \infty$ (i.e. $q = 1$)).

Dann gilt $\left|\int_Y (Tf)\, g\, d\nu\right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. (!)

(3) Zum Beweis von (!) definiert man für $z \in S$:

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad ; \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'} \;,$$

$$f_z := |f|^{\frac{p}{p(z)}} \cdot \frac{f}{|f|} \cdot \chi_{\{f \neq 0\}} \qquad (f_z = f, \text{ falls } p = \infty)$$

$$g_z := |g|^{\frac{q'}{q'(z)}} \cdot \frac{g}{|g|} \chi_{\{g \neq 0\}} \qquad (g_z = g, \text{ falls } q = 1)$$

und schließlich

$$F(z) := \int_Y (Tf_z)\, g_z \, d\nu \,.$$

Aufgrund der Voraussetzung $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ haben wir $\frac{1}{p(\theta)} = \frac{1}{p}$, entsprechend $\frac{1}{q'(\theta)} = \frac{1}{q'}$ und daher

$$f_\theta = f \;, \quad g_\theta = g \quad \text{und} \quad F(\theta) = \int_Y (Tf)\, g \, d\nu \,.$$

Daher folgt (!), wenn wir zeigen können:

(a) F genügt den Voraussetzungen des 3-Geraden Satzes,

(b) $|F(iy)| \leq M_0$ und $|F(1+iy)| \leq M_1$.

Zu (a) Für die betrachteten Treppenfunktionen gilt

$$F(z) = \int_Y (Tf_z)\, g_z \, d\nu$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} |a_n|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{a_n}{|a_n|} |b_m|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{b_m}{|b_m|} \int_Y (T\chi_{A_n})\, \chi_{B_m} \, d\nu$$

Alle z-abhängigen Terme hierin haben die Form

$c \cdot |a|^{\lambda z}$ mit $c, a \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

und sind daher holomorph auf $\mathring{S}$. Für $z = x+iy \in S$ haben wir $0 \le x \le 1$ und daher

$$|c\, |a|^{\lambda z}| = |c|\, |a|^{\lambda x} \le |c| \max(1, |a|^{\lambda}),$$

woraus die Beschränktheit folgt. Also ist F holomorph in $\mathring{S}$, stetig und beschränkt in S.

(b) Für $z = iy$ haben wir

$$|f_z| = |f_{iy}| = \left|\, |f|^{\frac{p}{p(iy)}} \cdot \frac{f}{|f|} \right| = \left|\, |f|^{p\left(\frac{1-iy}{p_0} + \frac{iy}{p_1}\right)} \right|$$

$$= |f|^{\frac{p}{p_0}}, \quad \text{also} \quad |f_{iy}|^{p_0} = |f|^{p}$$

Ebenso:

$$|g_{iy}|^{q_0'} = |g|^{q'}$$

und damit $\quad \|f_{iy}\|_{p_0} = \|f\|_p^{\frac{p}{p_0}} = 1, \quad \|g_{iy}\|_{q_0'} = \|g\|_{q'}^{\frac{q'}{q_0'}} = 1.$

Hieraus folgt

$$|F(iy)| = \left|\int_Y (Tf_{iy})\, g_{iy}\, d\nu\right| \le \|Tf_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q_0'}$$

$$\le M_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q_0'} = M_0$$

und ebenso sieht man

$$|F(1+iy)| \le M_1 .$$

Nun folgt (!) aus dem 3-Geraden-Satz und die Behauptung ist bewiesen.

$\square$

Anwendung: Young'sche Ungleichung

<u>Satz</u> 3 (W. H. Young): Es seien G eine LCA-Gruppe, $p, q, r \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$ und $\frac{1}{p'}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}$. Dann ist für $f \in L^q(G)$ und $g \in L^r(G)$ die Faltung $f*g \in L^p(G)$ und es gilt

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r .$$

<u>Bew.</u>: Ist $g \in L^r(G)$ vorgegeben, so können wir o.E. annehmen, dass $f \in L^1(G) \cap L^{r'}(G)$ ist. Dann haben wir

(a) nach Hölder $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_{r'} \|g\|_r$, also

$$T_{g,0} : L^{r'}(G) \to L^\infty(G),\ f \mapsto f*g \text{ stetig mit Norm} \leq \|g\|_r$$

(b) nach Minkowski $\|f*g\|_r = \left\| \int_G f(y)\, g(x-y)\, dH(y) \right\|_{L^r_x}$

$$\leq \int_G |f(y)|\, \|\tau_y g\|_{L^r_x}\, dH(y) \leq \|f\|_1 \|g\|_r, \text{ also}$$

$$T_{g,1} : L^1(G) \to L^r(G),\ f \mapsto f*g \text{ stetig mit Norm} \leq \|g\|_r .$$

Sind jetzt p, q mit $\frac{1}{p'}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}$ gegeben, wählen wir θ so, dass $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{r}$, also $\theta := \frac{r}{p}$.

Da $\frac{1}{r'} \leq \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{r}{p} \leq 1$, also $\theta \in [0,1]$. Dann ist ferner $\frac{1-\theta}{r'}+\theta = \frac{1}{r'}-\theta+\frac{\theta}{r}+\theta = \frac{1}{r'}+\frac{1}{p} = \frac{1}{r'}+1-\frac{1}{p'}$ $= 1-\frac{1}{q'} = \frac{1}{q}$. Der Interpolationssatz ergibt jetzt mit $M_0 = M_1 = \|g\|_r$: $\|f*g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r$ $\square$