1.7 Der Dualitätssatz von Pontryagin

Ist G eine LCA-Gruppe, so ist auch $\widehat{G}$, die duale Gruppe von G, eine LCA-Gruppe, besitzt also ihrerseits eine Dualgruppe $\widehat{(\widehat{G})} =: \widehat{\widehat{G}}$. Diese kann man als Bidualgruppe von G bezeichnen.

Alles, was wir bisher über das geordnete Paar $(G, \widehat{G})$ bewiesen haben, gilt genauso für $(\widehat{G}, \widehat{\widehat{G}})$.

Im folgenden soll $\widehat{\widehat{G}}$ mit G identifiziert werden. Dazu setzen wir

$$J : G \to \widehat{\widehat{G}}, \quad x \mapsto J(x), \text{ def. durch } J(x)(\gamma) := \gamma(x)$$

J wird manchmal als kanonische Einbettung bezeichnet, leitunter auch als Pontryagin-Abbildung.

<u>Satz</u>: $J : G \to \widehat{\widehat{G}}$ ist ein Gruppenisomorphismus und ein Homöomorphismus, also strukturerhaltend, stetig, bijektiv mit stetiger Inverser.

<u>Bew.</u> (1) Strukturerhaltung:

Eigenschaft eines Charakters

$$J(x+y)(\gamma) = \gamma(x+y) = \gamma(x)\,\gamma(y) = J(x)(\gamma) \cdot J(y)(\gamma)$$

Def. der Verknüpfung auf $\widehat{G}$ bzw. $\widehat{\widehat{G}}$

$$= (J(x)\,J(y))(\gamma) \quad \forall \gamma \in \widehat{G},$$

also $J(x+y) = J(x)\,J(y)$, d.h. J ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Injektivität: In Folgerung (2) zur Fourierumkehrformel haben wir gesehen, dass $\widehat{G}$ die Punkte von G trennt. D.h.: Sind $x_1, x_2 \in G$ mit $x_1 \neq x_2$, so existiert ein $\gamma \in \widehat{G}$ mit $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$. Anders ausgedrückt:

Ist $\gamma(x_1)=\gamma(x_2)\ \forall \gamma\in\widehat{G}$, so gilt $x_1=x_2$.

Setzen wir die Definition der kanonischen Einbettung J ein:

$$J(x_1)=J(x_2) \iff J(x_1)(\gamma)=J(x_2)(\gamma)\quad \forall\gamma\in\widehat{G} \implies x_1=x_2,$$

und das ist die Injektivität von J.

(3) Verhalten der Null-/Neutralumgebungsbasen unter J und Stetigkeit:

Die Neutralumgebungsbasen sind gegeben durch

in G: $\{N(C,r):=\{x\in G: |\gamma(x)-1|<r\ \forall\gamma\in C\}: r>0,\ C\subset\widehat{G}$ kompakt$\}$

in $\widehat{\widehat{G}}$: $\{M(C,r):=\{\hat{\gamma}\in\widehat{\widehat{G}}: |\hat{\gamma}(\gamma)-1|<r\ \forall\gamma\in C\}$, $r>0,\ C\subset\widehat{G}$ kompakt$\}$.

Hieraus lesen wir ab:

$$\begin{aligned} J(N(C,r)) &= \{J(x)\in\widehat{\widehat{G}}: |J(x)(\gamma)-1|<r\ \forall\gamma\in C\} \\ &= \{\hat{\gamma}\in\widehat{\widehat{G}}: |\hat{\gamma}(\gamma)-1|<r\ \forall\gamma\in C \text{ und } \hat{\gamma}\in J(G)\} \\ &= M(C,r)\cap J(G) \end{aligned} \qquad (*)$$

bzw. $$\begin{aligned} J^{-1}(M(C,r)) &= \{x\in G: J(x)\in M(C,r)\} \\ &= \{x\in G: |\underbrace{J(x)(\gamma)}_{=\gamma(x)}-1|<r\ \forall\gamma\in C\} = N(C,r) \end{aligned}$$

Da die Topologien auf G und $\widehat{\widehat{G}}$ translationsinvariant sind, folgt: Die Urbilder offener Mengen unter J sind offen, d.h. J ist (insbes.) stetig.

(4) $J(G)$ ist abgeschlossen: Dazu sei $\hat{\gamma}_0 \in \overline{J(G)}$.

Wir wählen $r>0$ und ein Kompaktum $C \subset \hat{G}$ so, dass $N(C,r) =: U \subset G$ und $M(C,r) =: V \subset \hat{\hat{G}}$ kompakte Abschlüsse haben. Dann ist $\hat{\gamma}_0 V$ eine Umgebung von $\hat{\gamma}_0$ in $\hat{\hat{G}}$, da $\hat{\gamma}_0 \in \overline{J(G)}$ ist, existiert ein $x_1 \in G$, so dass $\hat{\gamma}_1 := J(x_1) \in \hat{\gamma}_0 V$ bzw. mit $\hat{\gamma}_0 \in \hat{\gamma}_1 V \subset \hat{\gamma}_1 \overline{V}$.

Nun ist $\overline{U} \subset G$ kompakt, ebenso $x_1 + \overline{U}$, und wegen der Stetigkeit von J auch

$$J(x_1 + \overline{U}) \underset{J \text{ Hom.}}{=} J(x_1) \cdot J(\overline{U}) \overset{(3)}{=} \hat{\gamma}_1 (\overline{V} \cap J(G)) = \hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap J(G)$$

Diese Menge ist abgeschlossen, da kompakt, also

$$\hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap J(G) = \overline{\hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap J(G)} = \hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap \overline{J(G)}$$

Nun gilt: $\hat{\gamma}_0 \in \hat{\gamma}_1 \overline{V}$ und $\hat{\gamma}_0 \in \overline{J(G)}$, also $\hat{\gamma}_0 \in \hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap \overline{J(G)}$ $= \hat{\gamma}_1 \overline{V} \cap J(G)$, insbesondere also $\hat{\gamma}_0 \in J(G)$. Da $\hat{\gamma}_0 \in \overline{J(G)}$ beliebig war, folgt: $\overline{J(G)} = J(G)$.

(5) $J(G)$ ist dicht in $\hat{\hat{G}}$: Annahme nicht. Dann existiert eine offene Menge $U \subset \hat{\hat{G}}$ mit $U \cap J(G) = \emptyset$. Nach Folgerung (3) aus dem Satz von Plancherel existiert

$$\hat{F} \in A(\hat{\hat{G}}),\ \hat{F} \neq 0, \text{ so dass } \hat{F}(\hat{\gamma}) = 0 \quad \forall \hat{\gamma} \in J(G).$$

Für das Urbild von $\hat{F}$, also $F \in L^1(\hat{G})$ bedeutet das:

$$0 = \hat{F}(J(x)) = \int_{\hat{G}} \overline{J(x)(\gamma)}\, F(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) = \int_{\hat{G}} \overline{\gamma(x)}\, F(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma),$$

und zwar $\forall x \in G$. Nach dem Eindeutigkeitssatz aus Abschnitt 1.4 folgt $F = 0$ und damit $\hat{F} = 0$, Widerspruch.

(6) Schluss: Aus (4) (Abgeschlossenheit) und (5) (Dichtheit des Bildes) folgt: $\mathcal{J}$ ist surjektiv, mit (2) also: $\mathcal{J}$ ist bijektiv.

Die Gleichung ⊛ in (3) wird zu

$$\mathcal{J}(N(C,r)) = M(C,r),$$

was die Offenheit von $\mathcal{J}$ und damit die Stetigkeit der Umkehrabbildung zeigt. $\square$

Folgerungen:

(1) Jede kompakte ~~...~~ abelsche Gruppe ist die duale einer diskreten abelschen Gruppe. Jede diskrete abelsche Gruppe ist die duale einer kompakten abelschen Gruppe.

(2) Eindeutigkeitssatz: Ist $\mu \in M(G)$ mit $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in \hat{G}$, so ist $\mu = 0$.

Dies folgt jetzt aus dem früheren Eindeutigkeitssatz (für die duale Gruppe), weil wir G als die duale Gruppe von $\hat{G}$ auffassen können.

(3) Allgemeine Form der Fourierinversionsformel:
Ist $\mu \in M(G)$ und $\hat{\mu} \in L^1(\hat{G})$, so existiert ein $f \in L^1(G)$ derart, dass $\mu = f \cdot H$, und es gilt

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{\mu}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) \quad \forall x \in G.$$

(Dies gilt natürlich insbesondere für jedes $f \in L^1(G)$ anstelle von $\mu \in M(G)$)

Begründung von (3):

$\hat{\mu}$ ist eine Linearkombination positiv definiter Fktn. und also $\hat{\mu} \in B(\hat{G})$. Zusammen mit der Voraussetzung gilt also $\hat{\mu} \in B(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$.

Die Fourierinversionsformel (angewendet mit $(\hat{G}, \hat{\hat{G}}) = (\hat{G}, G)$ anstelle von $(G, \hat{G})$) ergibt:

$\hat{\hat{\mu}} \in L^1(\hat{\hat{G}}) = L^1(G)$ und es gilt

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(x) \hat{\hat{\mu}}(x) \, dH(x) ;$$

mit $f(x) = \hat{\hat{\mu}}(-x)$ also $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G f(x) \overline{\gamma(x)} \, dH(x)$.

Der Eindeutigkeitssatz ergibt $\mu = f \cdot H$. $\square$

ENDE DES KAPITELS