1.6 Fourierumkehrformel und Satz von Plancherel

Wir definieren

$$\mathcal{B}(G) := \{ f : G \to \mathbb{C} : \exists\, \mu \in M(\hat{G}), \text{ so dass } f(x) \overset{(*)}{=} \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \}.$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für die duale Gruppe (Abschnitt 1.4, Satz 4) gibt es zu jedem $f \in \mathcal{B}(G)$ höchstens (und also genau) ein Maß $\mu \in M(\hat{G})$, so dass $(*)$ gilt.

Jedes Maß $\mu \in M(\hat{G})$ kann zerlegt werden in $\operatorname{Re}\mu_\pm$ und $\operatorname{Im}\mu_\pm$ (dies sind positive Maße). Also ergibt der Satz von Bochner: Genau dann ist $f \in \mathcal{B}(G)$, wenn f eine Linearkombination positiv definiter Funktionen ist.

Zur Abkürzung setzen wir $\mathcal{B}^1 := \mathcal{B}(G) \cap L^1(G)$.

Satz 1 (Fourierumkehrformel): (1) Ist $f \in \mathcal{B}^1$, so gilt $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$.

(2) Zu gegebenem Haar-Maß H auf G kann das Haar-Maß $\hat{H}$ auf $\hat{G}$ so normiert werden, dass die Inversionsformel

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, \gamma(x)\, d\hat{H}(\gamma)$$

für alle $f \in \mathcal{B}^1$ gilt.

Vorüberlegung: Wissen: $f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \quad (f \in \mathcal{B}(G))$

Wollen: $f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, \hat{f}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) \quad (f \in \mathcal{B}^1)$

Dann muß also nach dem Eindeutigkeitssatz gelten $\mu = \hat{f} \cdot \hat{H}$ bzw. symbolisch, wenn f und $g \in \mathcal{B}^1$ sind:

$$d\hat{H}(\gamma) = \frac{d\mu(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} = \frac{d\nu(\gamma)}{\hat{g}(\gamma)} \quad (\text{dabei } g(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\nu(\gamma))$$

Lemma 1: Seien $f, g \in B^1$, $f(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$, $g(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\nu(\gamma)$.

Dann gilt $\hat{g} \cdot \mu = \hat{f} \cdot \nu$.

Bew.: Für $f \in B^1$ und $h \in L^1(G)$ haben wir

$$h * f(0) = \int_G h(-x) f(x)\, dH(x)$$

$$= \int_G h(-x) \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)\, dH(x)$$

Fubini $$= \int_{\hat{G}} \int_G \gamma(x) h(-x)\, dH(x)\, d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \hat{h}(\gamma)\, d\mu(\gamma).$$

Zusammen mit dem Faltungssatz ergibt sich

$$\int_{\hat{G}} \hat{h}(\gamma) \hat{g}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = (h * g) * f(0) = (h * f) * g(0) = \int_{\hat{G}} \hat{h}(\gamma) \hat{f}(\gamma)\, d\nu(\gamma).$$

□

Da $A(\hat{G})$ dicht in $C_0(\hat{G})$ ist, folgt die Beh.

Bew. der Fourierumkehrformel: Wir konstruieren ein positives lineares Funktional T auf $C_c(\hat{G})$, das translationsinvariant ist und daher mit dem Haar-Maß $\hat{H}$ auf $\hat{G}$ identifiziert werden kann (bis auf einen positiven Faktor). (Rieszscher Darstellungssatz!)

(1) Definition von T: Dazu verwenden wir eine approximative Einheit $(k_i)_{i \in I}$ mit $k_i \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ $\forall i \in I$ und setzen $g_i := k_i * \tilde{k}_i$. Dann gelten:

(i) $(g_i)_{i\in I}$ ist eine approximative Einheit.

(ii) $g_i \in L^1(G) \quad \forall i \in I$ (Faltungen von $L^1(G)$ sind wieder in $L^1(G)$.)

(iii) $k_i \in L^2(G)$, denn $\int_G |k_i(x)|^2 \, dH(x) \leq \|k_i\|_\infty \, \|k_i\|_1$.

Nach Bsp. (1) in Abschnitt 1.5 sind die g_i positiv definit, der Satz von Bochner zeigt: $g_i \in B(G)$

(iv) Aus (ii) und (iii) folgt: $g_i \in B^1$.

(v) $\hat{g_i} = |k_i|^2 \geq 0$

(vi) $\lim_{i\in I} \hat{g_i}(\gamma) = 1$ lokal glm., d.h.: gleichmäßig auf jedem kompakten $C \subset \hat{G}$.

Eigenschaft (vi) gilt für jede approximative Einheit $(k_i)_{i\in I}$

Sei M die obere Schranke für $\|k_i\|_1$. Sind nun ein kompaktes $C \subset \hat{G}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir

$$V = N(C, \tfrac{\varepsilon}{M}) = \{x \in G : |\gamma(x) - 1| < \tfrac{\varepsilon}{M} \ \forall \gamma \in C\}.$$

Dann ist V eine offene Nullumgebung in G und es gilt:

$$|\hat{k_i}(\gamma) - 1| \leq \left|\int_V (\gamma(x)-1)\, k_i(x)\, dH(x)\right| + \left|\int_{V^c} (\gamma(x)-1)\, k_i(x)\, dH(x)\right|$$

$$\leq \int_V \underbrace{|\gamma(x)-1|}_{< \frac{\varepsilon}{M}} |k_i(x)|\, dH(x) + \int_{V^c} \underbrace{|\gamma(x)-1|}_{\leq 2} |k_i(x)|\, dH(x)$$

$$< \frac{\varepsilon}{M} \cdot \underbrace{\int_G |k_i(x)|\, dH(x)}_{\leq M} + 2 \int_{V^c} |k_i(x)|\, dH(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{i\in I} \sup_{\gamma \in C} |\hat{k_i}(\gamma) - 1| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ (und gleichmäßig in } \gamma \in C)$$

Nun sei $\psi \in C_c(\hat{G})$ mit $\operatorname{supp}(\psi) = C$ gegeben. Dann wählen wir $i_0 \in I$ so (groß), dass $\hat{g_{i_0}}(\gamma) > 0$ $\forall \gamma \in C$. Da $g_i \in \mathcal{B}^1$, existieren Maße $\mu_i \in M(\hat{G})$, so dass $g_i(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) \, d\mu_i(\gamma)$.

Damit definieren wir

$$T[\psi] := \int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \frac{d\mu_{i_0}(\gamma)}{\hat{g_{i_0}}(\gamma)} .$$

Wohldefiniertheit: Ist $j \in I$ ein weiterer Index mit $\hat{g_j}(\gamma) > 0$ $\forall \gamma \in C$, so gilt nach Lemma 1 ("$\hat{g_{i_0}} \, d\mu_j = \hat{g_j} \, d\mu_{i_0}$")

$$\int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \frac{d\mu_{i_0}(\gamma)}{\hat{g_{i_0}}(\gamma)} = \int_{\hat{G}} \psi(\gamma) \frac{d\mu_j(\gamma)}{\hat{g_j}(\gamma)} .$$

Der Wert des Funktionals ist also unabhängig von der speziellen Funktion g_{i_0}, die zur Berechnung verwendet wird.

(2) Eigenschaften von T:

(i) Die μ_i sind positive Maße und es gilt $\hat{g_i} \geq 0$. Also ist $T[\psi] \geq 0$ $\forall \psi \in C_c(\hat{G})$ mit $\psi \geq 0$. D.h. T ist ein positives Funktional.

(ii) T ist linear (folgt aus der Linearität des Integrals).

(iii) $T \neq 0$. Da $\int_G g_i(x) \, dH(x) = 1$, gilt $\mu_i \neq 0$ $\forall i \in I$. Also finden wir auch ein $\psi \in C_c(G)$, so dass $T[\psi] > 0$.

(iv) T ist translationsinvariant

Dazu seien $\psi \in C_c(G)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) = C$ und $\gamma_0 \in \hat{G}$ gegeben. Wir wollen zeigen $T[\tau_{\gamma_0} \psi] = T[\psi]$, wobei $\tau_{\gamma_0} \psi(\gamma) = \psi(\gamma \gamma_0^{-1})$.

Wir setzen $\mu(E) = \mu_i(E\gamma_0)$. Dann folgt

$$\int_{\hat G} \chi_E(\gamma)\,d\mu(\gamma) = \int_{\hat G} \chi_{E\gamma_0}(\gamma)\,d\mu_i(\gamma) = \int_{\hat G} \chi_E(\gamma\gamma_0^{-1})\,d\mu_i(\gamma)$$

$$= \int_{G} \chi_E(\gamma)\,d\mu_i(\gamma\gamma_0), \text{ symbolisch } d\mu(\gamma) = d\mu_i(\gamma\gamma_0).$$

Die durch μ dargestellte Funktion sei g, also

$$g(x) = \int_{\hat G} \gamma(x)\,d\mu(\gamma) = \int_{\hat G} \gamma(x)\,d\mu_i(\gamma\gamma_0) = \int_{\hat G} \gamma\bar{\gamma}_0(x)\,d\mu_i(\gamma)$$

$$= \bar{\gamma}_0(x)\cdot \int_{\hat G} \gamma(x)\,d\mu_i(\gamma) = \bar{\gamma}_0(x)\cdot g_i(x).$$

Für die Fouriertransformierten ergibt sich der folgende Zsh.:

$$\hat g(\gamma) = \int_G g(x)\,\bar\gamma(x)\,dH(x) = \int_G \overline{\gamma\gamma_0}(x)\,g_i(x)\,dH(x) = \hat g_i(\gamma\gamma_0)$$

und damit ist

$$T[\psi] = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\,\frac{d\mu(\gamma)}{\hat g(\gamma)} = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\,\frac{d\mu_i(\gamma\gamma_0)}{\hat g_i(\gamma\gamma_0)} = \int_{\hat G} \psi(\gamma\gamma_0^{-1})\,\frac{d\mu_i(\gamma)}{\hat g_i(\gamma)}$$

$$= \int_{\hat G} \tau_{\gamma_0}\psi(\gamma)\,\frac{d\mu_i(\gamma)}{\hat g_i(\gamma)} = T[\tau_{\gamma_0}\psi].$$

(3) Schlußfolgerung: $T[\psi] = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\,d\hat H(\gamma)$, wobei $\hat H$ ein Haar-Maß auf $\hat G$ ist. Für $g \in B^1$ mit $g(x) = \int_{\hat G} \gamma(x)\,d\mu(\gamma)$ erhalten wir also ($\psi \in C_c(\hat G)$):

$$T[\psi\hat g] = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\,\hat g(\gamma)\,d\hat H(\gamma) = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\,d\mu(\gamma) \quad \forall \psi \in C_c(\hat G)$$

Also $\int_{\hat G} \hat g(\gamma)\,d\hat H(\gamma) = \int_{\hat G} d\mu(\gamma)$.

Da μ ein endliches Maß ist, folgt $\hat g \in L^1(\hat G)$

Allgemeiner haben wir

$$T[\varphi\cdot\gamma(x)\hat{g}] = \int_{\hat{G}} \varphi(\gamma)\gamma(x)\hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) = \int_{\hat{G}} \varphi(\gamma)\gamma(x)\,d\mu(\gamma)$$

und also

$$\int_{\hat{G}} \gamma(x)\hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\,d\mu(\gamma) = g(x). \qquad \square.$$

Folgerungen aus der Umkehrformel:

(1) Die Mengenfamilie $N(C,r) = \{x\in G : |\gamma(x)-1| < r \;\forall \gamma\in C\}$ mit $r>0$, $C\subset\hat{G}$ kompakt ist eine Nullumgebungsbasis der Topologie auf G.

Bew.: Sei V eine Nullumgebung in G, K eine kompakte Nullumgebung mit $K-K\subset V$, $f=\frac{\chi_K}{H(K)^{1/2}}$, $g=f*\tilde{f}$.

Dann ist g stetig, positiv definit und $\operatorname{supp}(g)\subset K-K$.

Der Inversionssatz ist anwendbar. Wir haben

$$\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\hat{G}} \hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) = g(0) = 1$$

Es gibt ein Kompaktum $C\subset\hat{G}$, so dass

$$\int_C \hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) > \frac{2}{3}$$

Ist nun $x\in N(C,\frac{1}{3})$, schreiben wir

$$g(x) = \Big(\int_C + \int_{C^c}\Big)\gamma(x)\hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma)$$

Für $\gamma\in C$ ist dann $|\gamma(x)-1| < \frac{1}{3}$, $\Rightarrow \operatorname{Re}(\gamma(x)) > \frac{2}{3}$

und also $\displaystyle\int_C \gamma(x)\hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) \geq \frac{2}{3}\cdot\int_C \hat{g}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) \geq \frac{4}{9}.$

Weiter ist $|\int\limits_{C^c} \hat{g}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma)| < \frac{1}{3}$ und damit

$g(x) > \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (wenn $x \in N(C,r)$)

Da $g(x) = 0$ außerhalb von V, folgt: $N(C,r) \subset V$.

(2) Trigonometrische Polynome bilden eine dichte Unteralgebra von $C(G)$, wenn $\underline{G \text{ kompakt}}$ ist.

Trig. Polynom: $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j(x) \qquad x \in G$

Begründung: Ist $x_0 \in G \setminus \{0\}$ können wir in der Überlegung zu (1) V so wählen, dass $x_0 \notin V$ und somit $g(x_0) = 0$ gilt. Dann ist also $0 = \int\limits_{\hat{G}} \gamma(x_0) \underbrace{\hat{g}(\gamma)}_{\geq 0} dH(\gamma)$.

Also gibt es ein $\gamma \in \hat{G}$ mit $\gamma(x_0) \neq 1$.

Sind dann $x_1, x_2 \in G$ gegeben mit $x_1 - x_2 \neq 0$, so existiert also $\gamma \in \hat{G}$ mit $\gamma(x_1 - x_2) = \gamma(x_1) \gamma^{-1}(x_2) \neq 1$, also $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$

$\hat{G}$ trennt also die Punkte von G.

Die trig. Polynome bilden also eine Unteralgebra von $C(G)$ (G kompakt), die abgeschlossen ist unter komplexer Konjugation, und die die Punkte von G trennt.

Stone-Weierstraß: Die trigonometrischen Polynome sind dicht in $C(G)$.

Weitere Folgerung: Da $C(G) \subset L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ dicht ist und $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$, sind die trigonometrischen Polynome auch dicht in $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty$, G kompakt$)$.

Zur Normierung des Haar-Maßes: Man normiert H und $\hat{H}$ stets so, dass die Inversionsformel gilt. 1.117

(1) Wir hatten zwei Konventionen angegeben:

Ist G kompakt, wählt man H so dass $\int_G dH(x) = 1$;

ist G diskret, wählt man $H(\{x\}) = 1 \quad \forall x \in G$

(Vorausgesetzt war dabei, dass G keine endliche Gruppe ist.)

Wir können feststellen, dass diese Konvention konsistent ist mit der Fourierumkehrformel. (Es reicht, dies jeweils für eine Funktion zu überprüfen!)

<u>G kompakt</u>. Wir wählen $f(x) = 1 \ \forall x \in G$ und erhalten für die Fouriertransformierte $\hat{f}(1) = 1$, $\hat{f}(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in \hat{G} \setminus \{1\}$. (Beachte: $\hat{G}$ ist diskret, s. Übungen.) Ist $\hat{H}$ dasjenige Haar-Maß auf $\hat{G}$, für das die Inversionsformel gilt, so ist

$$1 = f(0) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) = \hat{H}(\{1\})$$

und wg. der Translationsinvarianz $\hat{H}(\{\gamma\}) = 1 \ \forall \gamma \in \hat{G}$.

Umgekehrt: Sei <u>G diskret</u>. Wir wählen $f(x) = \delta_{x,0}$ (Kronecker-Delta) und haben $\hat{f}(\gamma) = \int_G \bar{\gamma}(x)\, \delta_{x,0}\, dH(x) = \gamma(0) = 1$. Dann liefert die Inversionsformel für die duale (kompakte) Gruppe $\hat{G}$:

$$\hat{H}(\hat{G}) = \int_{\hat{G}} \underbrace{\hat{f}(\gamma)}_{=1}\, d\hat{H}(\gamma) = f(0) = 1.$$

(2) <u>$G = \mathbb{R} = \hat{G}$</u>. Wir wissen "$dH(x) = \alpha\, dx$" und "$d\hat{H}(\xi) = \beta\, d\xi$", wobei dx und $d\xi$ für das Lebesgue-Maß stehen.

Wir berechnen die inverse Fouriertransformation von $e^{-|\xi|}$: 1.11 B

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-|\xi|} d\hat{H}(\xi) = \beta \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-|\xi|} d\xi$$

$$= \beta \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+1)\xi} d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{(ix-1)\xi} d\xi \right)$$

$$= \beta \left(\frac{e^{(ix+1)\xi}}{1+ix} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{(ix-1)\xi}}{ix-1} \Big|_{0}^{\infty} \right)$$

$$= \beta \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right) = \frac{2\beta}{1+x^2} = f(x).$$

Da $e^{-|\xi|} d\hat{H}(\xi)$ ein positives Maß ist, ist f positiv definit. Außerdem ist f integrierbar, also in $\mathcal{B}^1$. Die Inversionsformel ergibt

$$\frac{2\beta}{1+x^2} = f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\hat{H}(\xi)$$

Der Eindeutigkeitssatz für die inverse Transformation liefert

$$e^{-|\xi|} = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dH(x) = 2\alpha\beta \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx.$$

Für $\xi = 0$ also: $1 = 2\alpha\beta \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi\alpha\beta$, d.h. $\alpha\beta = \frac{1}{2\pi}$

Übliche Wahlen sind $\alpha = 1,\ \beta = \frac{1}{2\pi}$ (W-Theorie)

$\alpha = \frac{1}{2\pi},\ \beta = 1$ (konsistent mit Fourierreihen bei $L \to \infty$)

oder: symmetrisch: $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (Formeln für rotationssymmetrische Funktionen werden einfach.)

von mir bevorzugt.

Der Satz von Fubini zeigt für $G = \mathbb{R}^n = \hat{G}$: $H = \alpha^n \cdot \lambda^n$

$\hat{H} = \beta^n \cdot \lambda^n$ (λ^n = Lebesgue-Maß)

Also bei symmetrischer Aufteilung $H = (2\pi)^{-n/2} \lambda^n$.

Kehren wir noch einmal zum Ende der gestrigen Vorlesung zurück. Dort hatten wir festgestellt, dass die trigonometrischen Polynome

$$\{P : G \to \mathbb{C} : P = \sum_{j=1}^{n} a_j \gamma_j\} = \langle \gamma : \gamma \in \hat{G} \rangle$$

dicht in $C(G)$ und in $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, liegen, wenn G kompakt ist. Insbesondere gilt also

$$\langle \gamma, \gamma \in \hat{G} \rangle \text{ ist dicht in } L^2(G).$$

Wir wissen bereits, dass für kompakte Gruppen G die stetigen Charaktere ein Orthogonalsystem in $L^2(G)$ bilden.

Def.: Ein Orthogonalsystem $(e_i)_{i \in I}$ in einem Hilbertraum H heißt vollständig oder eine Orthogonalbasis (ONB), wenn eine der drei folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $\forall x \in H$ ist $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

(2) $\forall x \in H$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ ("Parsevalsche Gleichung")

(3) $\langle e_i : i \in I \rangle$ ist dicht in H.

Bem.: In jedem Hilbertraum gibt es eine ONB.

Die Reihe $\sum_{i \in I} \ldots$ ist bei überabzählbaren Indexmengen I folgendermaßen definiert:

$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \;:\Longleftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge I_ε von I, so dass $\|x - \sum_{i \in I_\varepsilon} \lambda_i x_i\| < \varepsilon$.

Damit ist die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) "geradeaus" nachzurechnen. Die Implikation (1) $\Rightarrow$ (3) ist klar.

Um einzusehen, dass auch (3) $\Rightarrow$ (1) gilt, benutzt man die Tatsache, dass auch im ∞-dim. Hilbertraum der kürzeste Abstand der senkrechte ist.

Genauer: Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein ONS in einem Hilbertraum H und $F = \langle e_i, i \in I_0 \rangle$ mit einer endlichen Teilmenge $I_0 \subset I$, so ist für $x \notin F$: $\sum_{i \in I_0} \langle x, e_i \rangle e_i$ die senkrechte Projektion von x auf F und es gilt

(*) $\operatorname{dist}(x, F) = \| x - \sum_{i \in I_0} \langle x, e_i \rangle e_i \| \leq \| x - y \| \quad \forall y \in F.$

(sog. Bestapproximation bei ONSen.)

Nun sei $\langle e_i, i \in I \rangle \subset H$ dicht, $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_\varepsilon \subset I$ und Koeffizienten $\lambda_i, i \in I_\varepsilon$, so dass $\| x - \sum_{i \in I_\varepsilon} \lambda_i e_i \| < \varepsilon$.

Aus der Ungleichung (*) ersehen wir, dass dann auch

$$\| x - \sum_{i \in I_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i \| < \varepsilon .$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist, gilt

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \quad , \text{ und das ist } (1).$$

<u>Folgerung:</u> Ist G kompakt, so stellt $\hat{G}$ eine ONB von $L^2(G)$ dar. Die Parsevalsche Gleichung (2) lautet in dieser Situation:

$$\int_G |f(x)|^2 \, dH(x) = \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\underbrace{\langle f, \gamma \rangle}_{= \int_G f(x) \bar{\gamma}(x) dH(x) = \hat{f}(\gamma)}|^2 = \sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 \, d\hat{H}(\gamma).$$

In der zuletzt angegebenen Form gilt diese Identität auch für nicht kompakte Gruppen. Das ist der

Satz von Plancherel: Die Einschränkung der Fourier-transformation

$$\mathcal{F}\Big|_{L^1(G)\cap L^2(G)} : L^1(G)\cap L^2(G) \longrightarrow L^2(\hat{G})$$

ist eine Isometrie (bezüglich der L^2-Normen), deren Bild ein linearer dichter Teilraum von $L^2(\hat{G})$ ist. Daher kann $\mathcal{F}|_{\dots}$ in eindeutiger Weise zu einem isometrischen Isomorphismus von $L^2(G) \longrightarrow L^2(\hat{G})$ fortgesetzt werden.

Bem.: Diese Fortsetzung wird mitunter zur Unterscheidung als Plancherel-Transformation bezeichnet.

Bew.: Ist $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$ und $g = f * \tilde{f}$, so ist $g \in L^1(G)$, stetig und positiv definit. Ferner gilt $\hat{g}(\gamma) = |\hat{f}(\gamma)|^2$.

Die Fourierumkehrformel gibt

$$g(0) = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\gamma)|^2 d\hat{H}(\gamma) = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\hat{G})}$$

Andererseits haben wir

$$g(0) = f * \tilde{f}(0) = \int_G \tilde{f}(0-x) f(x)\, dH(x) = \int_G |f(x)|^2 dH(x)$$

$$= \|f\|^2_{L^2(G)}, \quad \text{also} \quad \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass das Bild dieser eingeschränkten Transformation dicht ist in $L^2(\hat{G})$.

Sei $\Phi := \{ \hat{f} \in A(\hat{G}) : f \in L^1(G) \cap L^2(G) \}$. Da $L^1(G) \cap L^2(G)$ 1.122

invariant unter Translationen, ist Φ invariant unter

$$m_x : \hat{f} \mapsto m_x \hat{f}, \text{ def. durch } m_x \hat{f}(\gamma) = \gamma(x) \hat{f}(\gamma)$$

und das für alle $x \in G$. Das bedeutet: Ist $\psi \in L^2(\hat{G})$ und

$$\int_{\hat{G}} \phi(\gamma) \overline{\psi}(\gamma)\, d\hat{H}(\gamma) = 0 \qquad \forall \phi \in \Phi,$$

so ist auch

$$\int_{\hat{G}} \phi(\gamma) \overline{\psi}(\gamma)\, \gamma(x)\, d\hat{H}(\gamma) = 0 \qquad \forall \phi \in \Phi, x \in G.$$

Nun sind $\phi, \psi \in L^2(\hat{G})$, also $\phi \cdot \psi \in L^1(\hat{G})$ und der Eindeutigkeitssatz (A 1.4, Satz 4) liefert: $\phi \cdot \overline{\psi} = 0$ $\hat{H}$-fast überall, für alle $\phi \in \Phi$.

Wählen wir ϕ_i als Fouriertransformierte einer approx. Einheit der Form $g_i = k_i * \tilde{k}_i$, so gilt $\phi_i(\gamma) \longrightarrow 1$ lokal glm. (vgl.: Beweis der Inversionsformel) und es folgt: $\psi = 0$ fast überall bzw $\psi = 0$ als Element von $L^2(\hat{G})$. Hieraus folgt, dass $\overline{\Phi} = L^2(\hat{G})$, also Φ in $L^2(\hat{G})$ dicht ist. $\square$

Bem. zum letzten Schluß: Ist $f \in L^2(\hat{G}) \setminus \overline{\Phi}$, so ist $d := \operatorname{dist}(f, \overline{\Phi}) > 0$. Dann gibt es eine Folge $(\phi_n)_n$ in Φ mit $\|f - \phi_n\|_2 \to d$. Man zeigt: (ϕ_n) ist Cauchy, also konvergent, sagen wir $\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi$ und damit

$d = \|f - \phi\| \Rightarrow f - \phi \in \Phi^\perp \Rightarrow f = \phi \in \overline{\Phi}$ ↯

weil $\Phi^\perp = \{0\}$, wie gezeigt.

der kürzeste Abstand ist der senkrechte.

Folgerungen aus dem Satz von Plancherel:

(1) $\forall f,g \in L^2(G): \int_G f(x)\bar{g}(x)\,dH(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\bar{\hat{g}}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma)$.

Auch dies wird als Parsevalsche Gleichung bezeichnet.

Bew.: Folgt durch Polarisation aus der Identität im Satz von Plancherel. Einzelheiten in den Übungen.

(2) $A(\hat{G}) = \{F_1 * F_2 : F_{1,2} \in L^2(\hat{G})\}$.

Zum Beweis leiten wir den "Faltungssatz" $\widehat{f\cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$ für $f,g \in L^2(G)$ her. (Früher haben wir die andere Richtung $\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$ für $f,g \in L^1(G)$ gesehen.) Seien also $f,g \in L^2(G)$, $\gamma_0 \in \hat{G}$ und $h(x) = \gamma_0(x)\overline{g(x)}$, so dass $h \in L^2(G)$ und

$$\hat{h}(\gamma) = \int_G \bar{\gamma}(x)\gamma_0(x)\bar{g}(x)\,dH(x) = \int_G \gamma_0\gamma^{-1}(x)\,\bar{g}(x)\,dH(x)$$

$$= \bar{\hat{g}}(\gamma_0\gamma^{-1}), \quad \text{also} \quad \bar{\hat{h}}(\gamma) = \hat{g}(\gamma_0\gamma^{-1}).$$

(Diese Rechnung ist ok für $g,h \in L^1(G)\cap L^2(G)$, der allgemeine Fall ergibt sich durch Approximation.) Die Parseval-Gleichung, angewendet auf f und h, ergibt:

$$\widehat{f\cdot g}(\gamma_0) = \int_G \bar{\gamma}_0(x) f(x) g(x)\,dH(x) = \int_G f(x)\bar{h}(x)\,dH(x)$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\bar{\hat{h}}(\gamma)\,d\hat{H}(\gamma) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0\gamma^{-1})\,d\hat{H}(\gamma) = \hat{f}*\hat{g}(\gamma_0)$$

Ist jetzt $\hat{F} \in A(\hat{G})$ mit $F \in L^1(G)$, so lässt sich F zerlegen in $F = f\cdot g$ mit Faktoren f,g in $L^2(G)$ mit Fouriertransformierten $\hat{f},\hat{g} \in L^2(\hat{G})$ nach Plancherel. Deren Faltung ergibt $\hat{f}*\hat{g} = \hat{F}$.

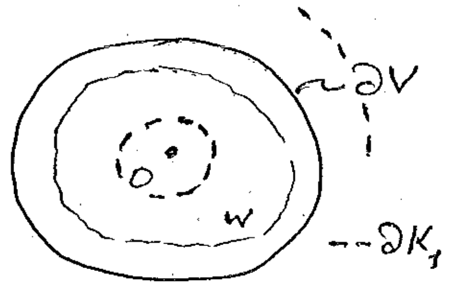
Umgekehrt: Sind $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\hat{G})$, so sind $f, g \in L^2(G)$, also $f \cdot g \in L^1(G)$ und damit $\hat{f} * \hat{g} = \widehat{f \cdot g} \in A(\hat{G})$.

(3) Ist $\emptyset \neq U \subset \hat{G}$ offen, so existiert eine Funktion $\hat{f} \in A(\hat{G})$, $\hat{f} \neq 0$, so dass $\hat{f}(\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in U^c$.

(Bem.: Wird im nächsten Abschnitt verwendet.)

Bew.: Wir wählen eine offene Teilmenge $W \subset U, W \neq \emptyset$, mit $\overline{W}$ kompakt und eine kompakte ~~Null~~ Neutralumgebung $K \subset \hat{G}$, so dass $K \cdot W \subset U$.

(Warum geht das? Nach dem Urysohn-Lemma finden wir offene Mengen $V, W \subset U$ mit kompaktem Abschluss, so dass $\emptyset \neq W \subset \overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Wir setzen $K_1 := \partial V \cdot W^{-1}$. Dann ist K_1 kompakt und $0 \notin K_1$. Dann existiert eine kompakte Neutralumgebung K mit $K \cap K_1 = \emptyset$ und $K \cdot W \subset V$.)



Wir wählen $\hat{f} = \hat{g} * \hat{h}$, $\hat{g} = \chi_K \in L^2(\hat{G})$, $\hat{h} = \chi_W \in L^2(\hat{G})$.

Dann ist $\hat{f}(\gamma) = 0 \ \forall \gamma \in U^c$ und $\int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma) \, d\hat{H}(\gamma) = \underbrace{\hat{H}(K) \cdot \hat{H}(W)}_{>0}$, also $\hat{f} \neq 0$.