In diesem Abschnitt werden die Fouriertransformierten komplexer Radon-Maße charakterisiert. (G bezeichnet stets eine LCA-Gruppe. Diese fassen wir als additiv auf.)

Def. Eine Funktion $\varphi: G \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_N \in G$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i \bar{c}_j \varphi(x_i - x_j) \geq 0.$$

Bem.: (i) Positiv definite Funktionen sind im allgemeinen nicht positiv, nicht einmal reell.
(ii) Sind φ und ψ positiv definit, $\alpha, \beta \geq 0$, so ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ ebenfalls positiv definit.

Lemma 1: Ist $\varphi: G \to \mathbb{C}$ positiv definit, so gelten:

(1) $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$; (2) $|\varphi(x)| \leq \varphi(0)$

(3) $|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(0) \operatorname{Re}(\varphi(0) - \varphi(x-y))$

Folgerungen:
(i) Mit (1) nimmt die definierende Ungleichung die Gestalt $\varphi(0) \cdot \sum_{i=1}^{N} |c_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \bar{c}_j \varphi(x_i - x_j) \geq 0$ an.
(ii) Aus (2) folgt $\varphi(0) \geq 0$. φ ist beschränkt.
(iii) Ist φ stetig in $x_0 = 0$, so ist φ gleichmäßig stetig.

Begründung zu iii): Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert eine Nullumgebung V, sodass für alle $x, y \in G$ mit $x - y \in V$ gilt $|\varphi(0) - \varphi(x-y)| < \frac{\varepsilon^2}{2\varphi(0)}$. Für diese x, y ist dann $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Bew. des Lemmas: Zum Beweis von (1) und (2) wählen wir $N = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $c_1 = 1$ und $c_2 = c$. Dann ist

$$(1 + |c|^2)\,\varphi(0) + c\,\varphi(x) + \bar{c}\,\varphi(-x) \geq 0 \qquad ⊛$$

Für $c = 1$ ergibt sich $0 = \operatorname{Im}(\varphi(x) + \varphi(-x)) = \operatorname{Im}(\varphi(x)) + \operatorname{Im}(\varphi(-x))$, also $\operatorname{Im}(\varphi(-x)) = -\operatorname{Im}(\varphi(x))$.
Für $c = i$ haben wir $i\,(\varphi(x) - \varphi(-x)) \in \mathbb{R}$ bzw. $0 = \operatorname{Re}(\varphi(x) - \varphi(-x)) = \operatorname{Re}(\varphi(x)) - \operatorname{Re}(\varphi(-x))$, d.h. die Realteile sind gleich. Zsf ergibt $\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$, also (1).

Wir fixieren x und wählen c mit $|c| = 1$, sodass $c \cdot \varphi(x) = -|\varphi(x)|$ $\left(\rightsquigarrow \bar{c}\,\varphi(-x) \underset{(1)}{=} \bar{c}\,\overline{\varphi(x)} = -|\varphi(x)|\right)$. Dann lautet ⊛ $2\varphi(0) - 2|\varphi(x)| \geq 0$, und das ist (2).

Zu (3). Der Fall $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt aus (2). Andernfalls wählen wir $N = 3$; $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$; $c_1 = 1$ und

$$c_2 = -c_3 = \lambda \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\varphi(x) - \varphi(y)} \text{ mit einem } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann sind $|c_2|^2 = |c_3|^2 = \lambda^2$, und die Diagonalterme liefern den Beitrag

$$\varphi(0)\,(1 + 2\lambda^2)$$

Für $i=1$ und $j \in \{2,3\}$ ergeben sich die Summanden

$$2\,\mathrm{Re}\left\{\lambda \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\varphi(x)-\varphi(y)} \cdot (\varphi(x)-\varphi(y))\right\} = 2\lambda\, |\varphi(x)-\varphi(y)|,$$

und schließlich für $i=2$, $j=3$ den Beitrag $(|c_2| = |c_3| = \lambda!)$

$$2\,\mathrm{Re}\left(-|c_2|^2 \cdot \varphi(x-y)\right) = -2\lambda^2\, \mathrm{Re}(\varphi(x-y))$$

Insgesamt: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(0)\,(1+2\lambda^2) + 2\lambda\, |\varphi(x)-\varphi(y)| - 2\lambda^2\, \mathrm{Re}(\varphi(x-y)) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda^2 \underbrace{2(\varphi(0) - \mathrm{Re}(\varphi(x-y)))}_{a\,>\,0\ \text{(O.E.) sonst: } \varphi(x)=\varphi(y)} + 2\lambda \underbrace{|\varphi(x)-\varphi(y)|}_{b} + \underbrace{\varphi(0)}_{c} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow a\left(\lambda^2 + 2\frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(\lambda + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}\right) \geq 0$$

Dies erfordert $ac \geq b^2$, und das ist gerade (3). $\square$

Beispiele positiv definiter Funktionen:

(1) Ist $f \in L^2(G)$, $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ und $\varphi = f * \tilde{f}$, so ist φ stetig und positiv definit.

Begründung: $\varphi \in C_0(G)$ nach Satz 3 (d) in Abschnitt 1.2.

Positive Definitheit:

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i \overline{c_j}\, \varphi(x_i - x_j) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i \overline{c_j} \int_G f(x_i - x_j - y)\, \overline{f}(-y)\, dH(y)$$

$$\overset{\text{Translations-invarianz}}{=} \sum_{i,j=1}^{N} c_i \overline{c_j} \int_G f(x_i - y)\, \overline{f}(x_j - y)\, dH(y)$$

$$= \int_G \left| \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i - y) \right|^2 dH(y) \geq 0.$$

(2) Jeder Charakter $\gamma \in \widehat{G}$ ist positiv definit, denn

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i \bar{c}_j \gamma(x_i - x_j) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i \gamma(x_i) \bar{c}_j \overline{\gamma(x_j)} = \Big|\sum_{i=1}^{N} c_i \gamma(x_i)\Big|^2 \geq 0.$$

Damit sind auch Linearkombinationen von Charakteren mit positiven Koeffizienten positiv definit. Allgemeiner:

(3) Ist $\mu \in M(\widehat{G})$ ein positives Maß und

$$\varphi(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma),$$

so ist auch φ pos. def. und (glm.) stetig.

Bew.: Die glm. Stetigkeit sieht man wie für die Fourier-transformierte eines komplexen Radon-Maßes ein, vgl. Abschnitt 1.4, Satz 3 (a). Positive Definitheit:

$$\sum_{i,j=1}^{N} c_i \bar{c}_j \varphi(x_i - x_j) = \int_{\widehat{G}} \sum_{i,j=1}^{N} c_i \gamma(x_i) \bar{c}_j \overline{\gamma(x_j)}\, d\mu(\gamma)$$

$$= \int_{\widehat{G}} \Big|\sum_{i=1}^{N} c_i \gamma(x_i)\Big|^2 d\mu(\gamma) \geq 0.$$

Bsp. (3) enthält die einfache Richtung des folgenden

<u>Satz</u> (es) <u>von Bochner</u>: Eine stetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn ein positives Maß $\mu \in M(\widehat{G})$ existiert, so dass

$$\text{(B)} \qquad \varphi(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \qquad \forall x \in G.$$

(Für $G = \mathbb{Z}$: Herglotz, 1911; für $G = \mathbb{R}$: Bochner, 1933; allgemeiner Fall: A. Weil, 1938.)

Um den noch fehlenden schwierigeren Teil dieses Satzes 1.104 zu zeigen, muß ich erneut auf ein Resultat aus der Theorie der Banachalgebren zurückgreifen, was ich im Rahmen dieser Vorlesung nicht beweisen kann. Zunächst einige Begriffe:

<u>Def.</u>: Es sei A eine Banachalgebra mit Einselement e und $a \in A$. Dann heißen

- $\rho(a) := \{ z \in \mathbb{C} : ze - a \text{ ist invertierbar} \}$ die <u>Resolventenmenge</u> von $a \in A$ und

  $$R_a : \rho(a) \longrightarrow A, \quad z \longmapsto R_a(z) := (ze-a)^{-1}$$

  die <u>Resolvente</u> von a.

- $\sigma(a) := \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ das <u>Spektrum</u> von a und

  $$r(a) := \sup \{ |z| : z \in \sigma(a) \}$$

  der <u>Spektralradius</u> von a.

Ist $a \in A$ fixiert und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|a\|$, kann man $ze - a = z(e - \frac{a}{z})$ mit Hilfe der geometrischen Reihe invertieren: In diesem Fall ist

$$(ze-a)^{-1} = \frac{1}{z}(e - \frac{a}{z})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$$

mit Konvergenz in der Norm. Diese Verallgemeinerung der geometrischen Reihe wird als Neumannsche Reihe bezeichnet. Für $|z| > \|a\|$ gilt also $z \in \rho(a)$ und daraus folgt: $\quad r(a) \leq \|a\|$.

Der Spektralradius kann aber tatsächlich kleiner sein als die Norm, genauer gilt die

<u>Spektralradiusformel:</u> $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. (Aussage umfaßt die Ex. des Grenzwerts.)

(Bew. zum Bsp. in: Meise/Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Satz 17.10. Der Beweis benutzt das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.)

Hiervon werden wir im Beweis des Satzes von Bochner Gebrauch machen. Weiter gilt in jeder kommutativen Banach-Algebra mit Einselement:

$$\sigma(a) = \{y(a) : y \in \Delta_A\},$$ (siehe: Meise/Vogt, ebda, Satz 17.13)

wobei $\Delta_A = \{y \in A' : y$ ist ein komplexer Homomorphismus $\neq 0\}$ der Strukturraum ist. Dies wird angewendet auf die B-Algebra $(M(G), +, *) \supset (L^1(G), +, *)$. Damit ist für eine Funktion $h \in L^1(G)$:

kennen wir nicht

$$\sigma(h) = \{y(h) : y \in \Delta_{M(G)}\}$$

$$\subset \{y(h) : y \in \Delta_{L^1(G)}\}$$ denn: ist $y \in \Delta_{M(G)}$, so ist $y|_{L^1(G)} \in \Delta_{L^1(G)}$

$$= \{\hat{h}(\gamma) : \gamma \in \hat{G}\}$$ Abschnitt 1.3, Satz 1.

Damit gilt für den Spektralradius $r(h)$ einer Funktion $h \in L^1(G)$:

$$r(h) = \sup\{|z| : z \in \sigma(h)\} \le \sup\{|\hat{h}(\gamma)| : \gamma \in \hat{G}\} = \|\hat{h}\|_\infty$$

und mit der Spektralradiusformel insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \|h^{*n}\|_1^{\frac{1}{n}} \le \|\hat{h}\|_\infty .$$

(Bem.: $\|\hat{h}\|_\infty < \|h\|_1$ ist möglich.)

bew. von Bochners Theorem. Zu zeigen bleibt:

Ist $\varphi: G \to \mathbb{C}$ positiv definit und stetig, so existiert ein positives Maß $\mu \in M(\hat{G})$, so dass $\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x) d\mu(\gamma)$.

Dazu können wir o.E. $\varphi(0) = 1$ annehmen (vgl. Lemma 1(2)).

1. Sei $f \in C_c(G)$ mit $\operatorname{supp}(f) = K$ und

$$Q : G \times G \to \mathbb{C},\ (x,y) \to Q(x,y) := f(x) \cdot \overline{f(y)} \cdot \varphi(x-y).$$

Dann ist Q ebenfalls stetig, besitzt den Träger $\operatorname{supp}(Q) \subset K \times K$ (ebenfalls kompakt) und ist also gleichmäßig stetig. Sei $((E_i^{(n)})_{1 \le i \le n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge für K. Das bedeutet hier: Es gibt eine Folge V_n von Nullumgebungen mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{0\}$ und: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n$ ex. $x_i^{(n)} \in E_i^{(n)}$, so dass $E_i^{(n)} - x_i^{(n)} \subset V_n$.

Wir setzen

$$\Sigma_n := \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^{(n)}) \overline{f(x_j^{(n)})} \varphi(x_i^{(n)} - x_j^{(n)}) H(E_i^{(n)}) H(E_j^{(n)})$$

Dann ist $\Sigma_n \ge 0$ wegen der positiven Definitheit von φ. Ferner gilt wie bei Riemann-Integral wegen der glm. Stetigkeit von Q, dass

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_n = \int_{G \times G} f(x) \overline{f(y)} \varphi(x-y) dH(x) dH(y) = I_\varphi(f).$$

Dann ist auch $I_\varphi(f) \ge 0$.

Wg. $|\varphi(x)| \le \varphi(0) = 1$ haben wir $|I_\varphi(f)| \le \|f\|_1^2$ und können $I_\varphi(f)$ auch für $f \in L^1(G)$ definieren.

Da $C_c(G) \subset L^1(G)$ dicht ist, gilt $I_\varphi(f) \geq 0$ auch für alle $f \in L^1(G)$.

2. Für $f, g \in L^1(G)$ definieren wir das lineare Funktional

$$T_\varphi[f] := \int_G f(x)\,\varphi(x)\,dH(x)$$ (stetig auf $L^1(G)$, aber wir wollen mehr erreichen.)

sowie

$$\langle f, g\rangle := T_\varphi[f * \tilde{g}] \qquad (\tilde{g}(x) = \overline{g(-x)})$$

Dann ist $f \mapsto \langle f, g\rangle$ linear, $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ und

$$\langle f, f\rangle = \int_G f * \tilde{f}(x)\,\varphi(x)\,dH(x) = \int_{G\times G} f(x-y)\,\overline{f(-y)}\,\varphi(x)\,dH(y)\,dH(x)$$

$$\overset{\text{Translation und Reflexion}}{=} \int_{G\times G} f(x)\,\bar{f}(y)\,\varphi(x-y)\,dH(y)\,dH(x) = I_\varphi(f) \geq 0.$$

Das heißt: $\langle\ ,\ \rangle$ ist ein Halbskalarprodukt und es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle$$

Jetzt wählen wir für g eine (reellwertige, symmetrische) approximative Einheit $(k_i)_{i\in I}$ in $L^1(G)$. Da T_φ stetig auf $L^1(G)$ ist, folgt

$$T_\varphi[f] = \lim_{i\in I} T_\varphi[k_i * f] = \lim_{i\in I} \langle k_i, f\rangle$$

und weiter

$$|T_\varphi[f]|^2 = \lim_{i\in I} |\langle k_i, f\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle \lim_{i\in I} \langle k_i, k_i\rangle$$

Nun ist mit $(k_i)_{i\in I}$ auch $(k_i * k_i)_{i\in I}$ eine approximative Einheit auf $L^1(G)$ und daher

$$\lim_{i\in I} \langle k_i, k_i\rangle = \lim_{i\in I} T_\varphi[k_i * k_i] = \lim_{i\in I} \int_G k_i * k_i(x)\,\varphi(x)\,dH(x)$$

$$= \varphi(0) = 1 .$$

Das bedeutet $|T_\varphi[f]|^2 \le \langle f, f\rangle = T_\varphi[f * \tilde f]$. Setzen wir $h = f * \tilde f$, so ist $h * h = h * \tilde h$, und wir können diese Ungleichung iterieren:

$$|T_\varphi[f]|^2 \le T_\varphi[h] \le T_\varphi[h^{*2}]^{\frac{1}{2}} \le \dots \le T_\varphi[h^{*2^n}]^{\frac{1}{2^n}} \le \dots$$

Da T_φ auf $L^1(G)$ ein stetiges lineares Funktional ist mit Norm $\le \varphi(0) = 1$:

$$|T_\varphi[f]|^2 \le \|h^{*2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ aufgrund der Spektralradiusformel, wie vor Beweisbeginn erläutert:

$$|T_\varphi[f]|^2 \le \lim_{n\to\infty} \|h^{*n}\|_1^{\frac{1}{n}} = \|\hat h\|_\infty = \|\hat f\|_\infty^2 ,$$

also $\quad |T_\varphi[f]| \le \|\hat f\|_\infty . \qquad (**)$

3. Mit Step 2. ist gezeigt, dass T_φ ein stetiges lineares Funktional auf $A(\hat G)$ ist, wobei $A(\hat G)$ mit der Supremumsnorm ausgestattet ist. Hierbei ist $\|T_\varphi\| = 1$ ($\le$ nach (**), für $=$ betrachte man eine approx. Einheit).

(Ferner zeigt (**): $\hat f_1 = \hat f_2 \Rightarrow T_\varphi[f_1] = T_\varphi[f_2]$ $\rightsquigarrow$ Wohldef.!)

Da $A(\hat G) \subset C_0(\hat G)$ dicht ist(*), können wir T_φ in eindeutiger Weise und mit gleicher Norm auf $C_0(\hat G)$ fortsetzen. Nach dem Rieszschen Darstellungs-

(*) Abschnitt 1.3, Satz 3 (c)

satz existiert ein Maß $\mu \in M(\hat{G})$ mit $\|\mu\| = 1$,
so daß für alle $f \in L^1(G)$

$$T_\varphi[f] = \int_{\hat{G}} \hat{f}(-\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}\times G} \gamma(x) f(x)\, d\mu(\gamma)\, dH(x)$$

Vergleich mit der Def. $T_\varphi[f] = \int_G f(x)\varphi(x)\, dH(x)$ zeigt
$\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$ zunächst H-fast überall und
wegen der Stetigkeit von φ sogar für alle $x \in G$.
Schließlich haben wir $1 = \varphi(0) = \int_{\hat{G}} d\mu = \mu(\hat{G}) = \|\mu\|$
und damit $\mu \geq 0$. $\square$