1.4 Faltung und Fouriertransformation komplexer Radon-Maße

Erinnerung: Sei G eine LCA-Gruppe.

- Eine σ-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{C}$ mit $\mu(\emptyset)=0$ heißt ein komplexes Borel-Maß auf G.
- $|\mu|$, def. durch $|\mu|(E) := \sup\{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)| : \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n = E\}$,

  dabei $E, E_n \in \mathcal{B}(G)$, heißt die Totalvariation von μ.

  $|\mu| : \mathcal{B}(G) \to [0,\infty)$ ist ein endliches Maß.
- μ heißt regulär (oder: ein Radon-Maß), wenn $|\mu|$ regulär ist. Das wiederum bedeutet: Für alle $E \in \mathcal{B}(G)$ ist

  $$|\mu|(E) = \sup\{|\mu|(K) : K\subset E,\ K \text{ kompakt}\} \quad \text{(innere Reg.)}$$

  $$= \inf\{|\mu|(U) : E\subset U,\ U \text{ offen}\} \quad \text{(äußere Reg.)}$$

(Für ein äußeres Radon-Maß ($\to$ Haar-Maß) ist die innere Regularität nur für offene Mengen gefordert.)

- μ ist regulär genau dann, wenn $(\mathrm{Re}\,\mu)_\pm$ und $(\mathrm{Im}\,\mu)_\pm$ regulär sind.
- Die komplexen Maße bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, der durch $\|\mu\| := |\mu|(G)$ normiert wird.
- $M(G) := \{\mu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{C} : \mu \text{ ist ein komplexes Radon-Maß}\}$, ausgestattet mit der o.g. Norm, ist ein Banachraum.

  Riesz: $M(G) \cong (C_0(G))'$.

Es soll die Faltung zweier Maße $\mu, \nu \in M(G)$ eingeführt werden. Zu diesem Zweck definieren wir für $E \in \mathcal{B}(G)$:

$$E_{(2)} := \{(x,y)\in G\times G : x+y \in E\} = (+)^{-1}(E),$$

wobei $+ : G\times G \to G$ die Addition ist. Diese ist stetig, also gilt $E_{(2)} \in \mathcal{B}(G\times G)$. Allgemeiner, für $n\in\mathbb{N}$ ist

$$E_{(n)} := \{ (x_1,\dots,x_n) \in G^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \in E \} \in \mathcal{B}(G^n).$$

Für $\mu, \nu \in M(G)$ und $E\in\mathcal{B}(G)$ setzen wir

$$\mu * \nu (E) := \mu\times\nu(E_{(2)}). \tag{1}$$

Da μ absolutstetig bezüglich $|\mu|$ ist (d.h.: $|\mu|(E)=0 \Longrightarrow \mu(E)=0 \ \forall E\in\mathcal{B}(G)$), existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym eine Borel-meßbare Dichte $\varrho_\mu : G\to\mathbb{C}$ mit $|\varrho_\mu(x)| = 1$ $|\mu|$-fast überall und

$$\mu(E) = \int_E \varrho_\mu(x)\, d|\mu|(x) \qquad \forall E\in\mathcal{B}(G).$$

Desgleichen für ν, dessen Dichte mit ϱ_ν bezeichnet sei. Dann haben wir die folgenden Darstellungen:

$$\mu*\nu(E) = \mu\times\nu(E_{(2)}) = \int_{G\times G} \chi_{E_{(2)}}(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y)$$

$$= \int_G\int_G \chi_E(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \tag{2}$$

$$= \int_G\int_G \chi_E(x+y)\, \varrho_\mu(x)\,\varrho_\nu(y)\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y).$$

Hierbei ist $|\chi_E(x+y)\,\varrho_\mu(x)\,\varrho_\nu(y)| \le 1$ $|\mu|\times|\nu|$ fast überall und die konstante Funktion $f=1$ ist $\in L^1(|\mu|\times|\nu|)$.

Der Lebesguesche Konvergenzsatz liefert

$$\mu * \nu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu * \nu(E_n),$$

und offenbar ist $\mu * \nu(\emptyset) = 0$. Ferner haben wir

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu * \nu(E_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_G \int_G \chi_{E_n}(x+y)\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y)$$

$$\underset{\text{B. Levi}}{=} \int_G \int_G \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}(x+y)\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y) \leq \|\mu\|\,\|\nu\|.$$

Supremumsbildung ergibt: $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$, (3)

und damit insbesondere $\mu * \nu(E) \in \mathbb{C} \ \forall E \in \mathcal{B}(G)$.

D.h.: $\mu * \nu$ ist ein komplexes Borel-Maß auf $\mathcal{B}(G)$.

Das erlaubt die folgende

Def.: Für komplexe Borel-Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(G)$ heißt $\mu * \nu : \mathcal{B}(G) \to \mathbb{C}$, definiert durch (1), die Faltung (oder auch: das Faltungsmaß) von μ und ν.

Bem.: Wir können $\mu * \nu$ auch als das von $+ : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x+y$ induzierte Maß $(\mu \times \nu)_+$ auffassen, denn es ist

$$(\mu \times \nu)_+(E) = \mu \times \nu\big((+)^{-1}(E)\big) = \mu \times \nu(E_{(2)}) = \mu * \nu(E).$$

Als nächstes soll gezeigt werden, dass $\mu * \nu$ regulär ist, wenn dies auf μ und ν zutrifft.

Satz 1: Für $\mu, \nu \in M(G)$ ist $\mu * \nu$ regulär.

Beim Beweis können wir uns auf den Fall beschränken, dass μ und ν positive Maße sind. In diesem Fall folgt die Behauptung aus den beiden nachstehenden Lemmata.

Lemma 1: (X,τ) und (Y,σ) seien lokal kompakte Hausdorff-Räume und μ, ν endliche reguläre Borel-Maße auf $\mathcal{B}(X)$ bzw. $\mathcal{B}(Y)$. Dann ist auch $\mu \times \nu$ ein reguläres Borel-Maß auf $\mathcal{B}(X \times Y)$.

Kurzer Beweis, basierend auf dem Rieszschen Darstellungssatz: Aus der Diskussion zum Satz von Fubini (Abschnitt 1.1.3 und Beweis von Lemma 2 in Abschnitt 1.2) wissen wir bereits, dass $\mu \times \nu$ ein äußeres Radon-Maß ist. Wir zeigen: Jedes endliche äußere Radon Maß ist auch von innen regulär. ($\Rightarrow$ Beh.)

Sei also η ein endliches Maß mit

$$\eta(U) = \sup\{\eta(K) : K \subset U \text{ kompakt}\} \quad \forall\, U \text{ offen} \tag{4}$$

sowie

$$\eta(E) = \inf\{\eta(U) : E \subset U, U \text{ offen}\} \quad \forall \text{ Borel-Mengen } E. \tag{5}$$

Dann ist (4) für alle Borelmengen E zu zeigen. Da η endlich ist folgt aus (5) durch Übergang zu den Komplementen: Für jede Borel-Menge E ist

$$\eta(E) = \sup\{\eta(A) : A \subset E, A \text{ abgeschlossen}\} \tag{6}$$

Nun sei E fixiert und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existieren:

- U_ε offen mit $E \subset U_\varepsilon$
- $A_\varepsilon \subset E$ abgeschlossen mit $\eta(E - A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$
- $K_\varepsilon \subset U_\varepsilon$, K_ε kompakt, so dass $\eta(U_\varepsilon - K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann ist $A_\varepsilon \cap K_\varepsilon$ kompakt, $E \setminus (A_\varepsilon \cap K_\varepsilon) \subset (E \setminus A_\varepsilon) \cup (U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)$ und also $\eta(E \setminus (A_\varepsilon \cap K_\varepsilon)) \le \eta(E \setminus A_\varepsilon) + \eta(U_\varepsilon - K_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

(Ein elementares Arg. wird in der Vorl. skizziert.)

Lemma 2: Es seien (X,τ), (Y,σ) lokal kompakte Hausdorff-Räume, μ ein <u>endliches</u> reguläres Borel-Maß auf $\mathcal{B}(X)$ und $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ stetig. Dann ist induzierte Maß μ_f, def. durch $\mu_f(E)=\mu(f^{-1}(E))$ $\forall E\in\mathcal{B}(Y)$ ebenfalls regulär.

<u>Bew.</u>: Innere Regularität: Sei $E\in\mathcal{B}(Y)$ fixiert und $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann existiert ein Kompaktum $K_\varepsilon\subset f^{-1}(E)$, so dass $\mu(f^{-1}(E)-K_\varepsilon)<\varepsilon$, also $\mu(K_\varepsilon)>\mu_f(E)-\varepsilon$. Nun ist $f(K_\varepsilon)\subset E$, hieraus folgt $K_\varepsilon\subset f^{-1}(f(K_\varepsilon))\subset f^{-1}(E)$ und damit

$$\mu_f(E)\geq\mu(f^{-1}(f(K_\varepsilon)))=\mu_f(f^{*}(K_\varepsilon))\geq\mu(K_\varepsilon)>\mu_f(E)-\varepsilon.$$

Da f stetig ist, ist $f(K_\varepsilon)\subset E$ kompakt, und es gilt $\mu_f(E-f(K_\varepsilon))<\varepsilon$.

Die äußere Regularität folgt jetzt durch Übergang zu den Komplementen.

<u>Bsp.</u> (1) Maße mit integrierbaren Dichten bezüglich des Haar-Maßes. Sei $f\in L^1(G)$. Dann wird durch

$$\mu^{(f)}(E):=\int_E f\,dH$$

ein komplexes, endliches Borel-Maß auf $\mathcal{B}(G)$ definiert, das absolut stetig bezüglich H ist. Nach dem Satz von Radon-Nikodym haben alle komplexen Radon-Maße, die von H dominiert werden, diese Gestalt. Die Maßeigenschaften von $\mu^{(f)}$ sind leicht einzusehen: $\mu^{(f)}(\emptyset)=0$ ist offensichtlich, und die σ-Additivität folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. Ferner handelt es sich bei $\mu^{(f)}$ um ein Radon-Maß. Um dies einzusehen, nehmen wir zur Vereinfachung an:

$$(i)\ f \geq 0 \qquad \text{und} \qquad (ii)\ f \in C_c(G).$$

(Der allgemeine Fall läßt sich hierauf wieder durch Zerlegung und Approximation zurückführen.)

Sei also $E \in \mathcal{B}(G)$ fixiert und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Ferner: $K := \operatorname{supp}(f)$. Da H von außen regulär ist, existiert eine offene Menge U_ε, so dass $E \cap K_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ und

$$H(U_\varepsilon - E \cap K) < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}.$$

Wir setzen $\tilde{U}_\varepsilon := U_\varepsilon \cup K^c$. Dann ist $\tilde{U}_\varepsilon$ offen und

$$E = E \cap K \cup E \cap K^c \subset U_\varepsilon \cup K^c = \tilde{U}_\varepsilon.$$ Weiter gilt

$$\mu^{(f)}(\tilde{U}_\varepsilon - E) \leq \mu^{(f)}(\tilde{U}_\varepsilon - E \cap K) = \int_{\tilde{U}_\varepsilon - E \cap K} f\, dH = \int_{U_\varepsilon - E \cap K} f\, dH$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot H(U_\varepsilon - E \cap K) < \varepsilon.$$

Also ist $\mu^{(f)}$ von außen regulär. Da $\mu^{(f)}$ endlich ist, existiert zu $E \in \mathcal{B}(G)$ eine Folge $(A_n)_n$ abgeschlossener Teilmengen von G mit $A_n \subset E$ und $\lim_{n \to \infty} \mu^{(f)}(E - A_n) = 0$. Wir setzen $K_n := A_n \cap K \subset E$. Dann sind die K_n kompakt und es gilt $\mu^{(f)}(E - K_n) = \mu^{(f)}(E - A_n) \longrightarrow 0\ (n \to \infty)$. Das zeigt die innere Regularität.

Betrachten wir die lineare Abbildung

$$i : L^1(G) \longrightarrow M(G), \quad f \longmapsto \mu^{(f)}.$$

Diese ist isometrisch, denn

$$\|\mu^{(f)}\| = |\mu^{(f)}|(G) = \int_G d|\mu^{(f)}| = \int_G |f|\, dH = \|f\|_1.$$

Insbes. ist i injektiv. Man spricht in diesem Fall von einer Einbettung und fasst $L^1(G)$ als linearen Teilraum von $M(G)$ auf.

Ist die Identifizierung von $f \in L^1(G)$ mit $\mu^{(f)} \in M(G)$ mit der Faltung verträglich? Zur Beantwortung dieser Frage seien $f, g \in L^1(G)$ und $E \in \mathcal{B}(G)$. Dann ist

$$\mu^{(f)} * \mu^{(g)}(E) = \int_{G\times G} \chi_E(x+y)\, d\mu^{(f)}(x)\, d\mu^{(g)}(y)$$

$$= \int_{G\times G} \chi_E(x+y)\, f(x) g(y)\, dH(x)\, dH(y)$$

Fubini $$= \int_G \int_G \chi_E(x+y) f(x)\, dH(x)\; g(y)\, dH(y)$$

Translationsinvariant $$= \int_G \int_G \chi_E(x) f(x-y)\, dH(x)\; g(y)\, dH(y)$$

Fubini $$= \int_G \chi_E(x) \int_G f(x-y) g(y)\, dH(y)\, dH(x) = \int_G \chi_E(x)\, f*g(x)\, dH(x)$$

$$= \mu^{(f*g)}(E)$$

Die Dichte des Faltungsmaßes ist also die Faltung der Dichten der Ausgangsmaße. Insofern ist die Identifizierung (man sagt auch: Einbettung) $i: L^1(G) \to M(G)$ auch mit der Faltung verträglich. $L^1(G)$ ist als Teilraum von $M(G)$ abgeschlossen unter der Faltung.

(2) Dirac-Maße: Für $x \in G$ und $E \in \mathcal{B}(G)$ definiert man

$$\delta_x(E) := \left\{ \begin{matrix} 1, & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right\} = \chi_E(x)$$

Dann ist δ_x ein <u>endliches Maß</u> auf $\mathcal{B}(G)$, denn $\delta_x(\emptyset) = 0$

und $\delta_x\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \left\{ \begin{matrix} 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: x \in E_n \\ 0 \quad \text{sonst} \end{matrix} \right\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(E_n)$,

zur letzten Summe trägt höchstens ein Summand bei.

δ_x ist <u>von innen regulär</u>, denn $\{x\}$ und $\emptyset$ sind kompakt. Da δ_x endlich ist, folgt auch die <u>äußere Regularität</u>. Beides zusammen ergibt: $\forall x \in G$ ist $\delta_x \in M(G)$.

Sofern G nicht diskret ist, ist δ_x <u>nicht</u> <u>absolut stetig</u> bezüglich des Haar-Maßes. Im allgemeinen ist also $L^1(G)$ $\subsetneqq M(G)$.

<u>Integral nach einem Dirac-Maß:</u> Für eine Treppenfunktion $t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ haben wir

$$\delta_{x_0}[t] \left(= \int_G t(x)\, d\delta_{x_0}(x) \right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \delta_{x_0}(E_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}(x_0) = t(x_0).$$

Diese Eigenschaft bleibt bei monotonen Grenzwerten erhalten, also $\delta_{x_0}[f] = f(x_0)$ für alle nichtnegativen Borel-meßbaren Funktionen $f: G \to [0,\infty)$. Auch die Zerlegung in Re und Im, f_+ und f_- bringt keine Veränderung: Für alle Borel-meßbaren Funktionen $f: G \to \mathbb{C}$ gilt

$$\delta_{x_0}[f] = \int_G f(x)\, d\delta_{x_0}(x) = f(x_0).$$

<u>Faltung mit einem Dirac-Maß:</u> Es seien $x_0 \in G$, $\mu \in M(G)$ und $E \in \mathcal{B}(G)$. Dann ist

$$\mu * \delta_{x_0}(E) = \int_G \int_G \chi_E(x+y)\, d\delta_{x_0}(x)\, d\mu(y)$$

Integral nach δ_{x_0}, wie gerade besprochen

$$= \int_G \underbrace{\chi_E(x_0+y)}_{=\chi_{E-x_0}(y)}\, d\mu(y) = \mu(E-x_0)$$

<u>Insbesondere</u> ergeben sich

(i) $\mu * \delta_0 = \mu$ (wenn $x_0 = 0$ das neutrale Element von G ist, sonst entsprechend $\mu * \delta_e = \mu$, e Neutralelement)

In $M(G)$ besitzt die Faltung also mit δ_0 <u>ein neutrales Element.</u> Ist G nicht diskret, so gilt $\delta_0 \notin L^1(G)$. Wegen der Eindeutigkeit des neutralen Elements erhalten wir jetzt also als einfache Folgerung: Ist G nicht diskret, so besitzt $L^1(G)$ kein neutrales Element bezüglich des Faltungsprodukts.

(ii) $\delta_{x_1} * \delta_{x_2} = \delta_{x_1+x_2}$, <u>denn</u>

$$\delta_{x_1} * \delta_{x_2}(E) = \delta_{x_1}(E - x_2) = \cancel{\chi(E} \; \chi_{E-x_2}(x_1)$$

$$= \chi_E(x_1 + x_2) = \delta_{x_1+x_2}(E)$$

Dirac-Maße bleiben also beim Falten unter sich.

<u>Anwendung</u> (W.-Theorie): Dirac-Maße und ihre Faltungen treten im Prinzip in der elementaren W-theorie auf. Eine Bernoulli-Verteilung $B_{1,p}$ kann man als W-Maß auf $G = \mathbb{Z}$ auffassen mit

$$B_{1,p}(\{k\}) = \begin{cases} 1-p & : k=0 \\ p & : k=1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} =: b_k,$$ wobei die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

eine Zähldichte ist, d.h. eine Dichte bezüglich des Zählmaßes, was das Haar-Maß auf $(\mathbb{Z},+)$ ist. Die n-fache Faltung von $B_{1,p}$ mit sich selbst sei mit $B_{1,p}^{*n} := \underbrace{B_{1,p} * \ldots * B_{1,p}}_{n\text{-mal}}$ bezeichnet.

Diese wird mit kombinatorischen Überlegungen bestimmt, man kann auch die oben angegebene Zähldichte n-mal mit sich selbst falten (im Sinne der Faltung von Folgen). Das Ergebnis ist die Binomialverteilung

$$B_{1,p}^{*n}\{k\} = B_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^{k}.$$

Legen wir zur Beschreibung dieses einfachen Sachverhalts die Gruppe $(\mathbb{R},+)$ zugrunde, ist das W-Maß $B_{1,p}$ nicht mehr absolut stetig bezüglich des Haar-Maßes (= Lebesgue-Maß). In diesem Fall bietet es sich an, die Bernoulli-Verteilung als Konvexkombination von Dirac-Maßen zu schreiben:

$$B_{1,p} = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1 .$$

Die Faltung von Maßen ist kommutativ, was sich aus der Kommutativität der Addition und dem Satz von Fubini ergibt. Sie ist auch assoziativ, wie wir später überlegen werden.(*) Somit gilt für die n-fache Faltung von zwei Summanden der binomische Lehrsatz und wir erhalten

$$B_{1,p}^{*n} = ((1-p)\delta_0 + p\delta_1)^{*n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((1-p)\delta_0\right)^{*k}(p\delta_1)^{*(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^{k}p^{n-k}\,\delta_0^{*k}\,\delta_1^{*(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^{k}p^{n-k}\,\delta_{n-k}$$

Der Übergang von der Gruppe $G=(\mathbb{Z},+)$ zu $G=(\mathbb{R},+)$ erlaubt

---

(*) Die Distributivität folgt aus der Linearität des Integrals.

die Verallgemeinerung der Bernoulli-Verteilung zu

$$(\overset{\text{Bez.}}{?\longrightarrow})\; B_{1,p}^{Q} := (1-p)\,\delta_0 + p\,Q$$

mit beliebigem (möglicherweise auch bezüglich λ absolut-stetigen) Wahrscheinlichkeitsmaß Q, das auf $(0,\infty)$ konzentriert ~~~~ ist, d.h. das $Q(0,\infty) = Q(\mathbb{R}) = 1$. Solche Verteilungen treten in der Risikotheorie ($\to$ Versicherungsmathematik) auf. Hierbei hat Q wiederum oft die Gestalt

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} p_k Q_0^{*k} ,$$

wobei $p_k =$ W.-keit $\{$Schadenszahl $= k\} \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ und Q_0 die Schadenshöhenverteilung ist.

(3) Flächenmaße, allgemeiner: Maße auf k-dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

Es sei (X,τ) ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und $M(X)$ der $\mathcal{B}$-Raum aller komplexen Radon Maße auf $\mathcal{B}(X)$.

Ein Maß <u>$\mu \in M(X)$ heißt stetig</u>, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ ist für jedes $x \in X$ und somit auch $\mu(E) = 0$ für jede abzählbare Menge $E \subset X$ (Ist E abzählbar, so ist $E \in \mathcal{B}(X)$.)

<u>$\mu \in M(X)$ heißt diskret</u>, wenn es auf einer abzählbaren Menge konzentriert ist. Das bedeutet: Es gibt eine abzählbare Menge $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ und eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_{x_n} .$$

Jedes Maß $\underset{\in M(X)}{\mu}$ kann in eindeutiger Weise zerlegt werden in einen stetigen und einen diskreten Anteil.

Sei G eine nicht-diskrete LCA-Gruppe mit Haar-Maß H. Dann ist $H(\{x\}) = 0 \ \forall x \in G$, in sofern ist H stetig, auch wenn i. allg. $H \notin M(G)$. Ist $\mu \in M(G)$ absolut stetig bezüglich H, also $\mu = \mu^{(f)}$ mit einem $f \in L^1(G)$ wie im Bsp. (1) besprochen, so ist μ ebenfalls stetig. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl stetiger Maße in $M(G)$, die nicht absolut stetig bezüglich H sind. Um konkrete Beispiele zu geben betrachten wir $G = (\mathbb{R}^n, +)$:

Es sei $n \geq 2$, $1 \leq k < n$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so dass

(i) $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ ein Homöomorphismus ist und

(ii) die Jacobi-Matrix $D\varphi(t)$ in jedem $t \in \Omega$ maximalen Rang hat (also $\operatorname{rk} D\varphi(t) = k \ \forall t \in \Omega$).

Dann heißt $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares k-dim. Flächenstück. Bez.: $\varphi(\Omega) = S$ (für Surface). Man definiert

- die Gramsche Matrix $G(t) := D\varphi(t)^T D\varphi(t)$,
- die Gramsche Determinante $g(t) = \det G(t) > 0$ und
- das k-dimensionale "Flächen"-Maß

$$\sigma_S(E) := \int_\Omega \chi_E(\varphi(t)) \sqrt{g(t)}\, dt \quad (E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

Dann ist $\sigma_S \in M(\mathbb{R}^n)$, sofern $\sigma_S(\mathbb{R}^n) < \infty$ ist. σ_S ist stetig, aber nicht absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß λ^n, welches in diesem Fall das Haar-Maß ist.

(Oberflächenintegrale sind selten einfach auszurechnen, manchmal helfen Integralsätze (Gauss, Stokes). Spezialfälle sind:

(i) $k=1$. In diesem Fall ist $\varphi : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^n$ und beschreibt eine diff'bare Kurve C. Die Gramsche Det. reduziert sich auf $\sqrt{g(t)} = |\varphi'(t)|$ (euklidische Norm des Tangentialvektors) und man erhält das Längen- bzw. Bogenmaß

$$\sigma_c(E) = \int_I \chi_E(\varphi(t))\, |\varphi'(t)|\, dt .$$

(ii) $k=n-1$. Ist die Fläche S als Graph einer differenzierbaren Funktion $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, so wird sie parametrisiert durch

$$\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \varphi(t) = (t, \psi(t)) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

und die Gram'sche Determinante vereinfacht sich zu

$$g(t) = 1 + \|\nabla \psi(t)\|^2$$

(s. z.B. Kaballo, Band III, Bsp. 19.7 (c))

Konkretes Beispiel: Integral über die Sphäre vom Radius $r>0$:

$$S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{|x|}_{\text{euklidische Norm}} = r\}$$

Man parametrisiert die Hemisphären $S_{r,\pm}^{n-1} := \{x \in S_r^{n-1} : x_n \gtrless 0\}$ durch $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \supset B_r(0) \to \mathbb{R}^n$, $x' \mapsto (x', \pm\sqrt{r^2 - |x'|^2})$ und erhält mit $\psi(x') = \pm\sqrt{r^2 - |x'|^2}$:

$$g(t) = 1 + |\nabla \psi(x')|^2 = \frac{r}{\sqrt{r^2 - |x'|^2}}$$

bezeichnen wir das Flächenmaß einer solchen Sphäre mit σ_r. Dann ist das Integral einer Funktion $f \in L^1(\sigma_r)$ über S_r^{n-1} gegeben durch

$$\int_{S_r^{n-1}} f(x)\,d\sigma_r(x) = I_+ + I_- \quad \text{mit}$$

$$I_\pm = \int_{B_r(0)} f(x', \pm\sqrt{r^2-|x'|^2})\,\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dx' ,$$

wobei das Integral sich über die $(n-1)$-dim. Kugel $\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < r\}$ vom Radius $r>0$ erstreckt. Der "Äquator" wird hierbei als $(n-1)$-dimensionale Nullmenge vernachlässigt.

<u>Anwendung</u>: Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung in 3 Raumdimensionen:

Sind $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ so ist die Lösung der homogenen linearen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \Delta u(x,t) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$$

mit Anfangswerten $u(x,0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ durch die Kirchhoffsche Formel gegeben:

$$u(x,t) = t \cdot M(g; x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\big(t \cdot M(f; x,t)\big)$$

wobei allgemein

$$M(f; x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{|x-y|=t} f(y)\,d\sigma_t(y) = \fint_{|x-y|=t} f(y)\,d\sigma_t(y)$$

$$= \frac{1}{4\pi t^2}\cdot f * \sigma_t(x)$$ Faltung von f mit dem Flächenmaß σ_t.

Auch in höheren Raumdimensionen spielen diese sphärischen Mittelwerte eine wesentliche Rolle bei den Integraldarstellungen der Lösungen der linearen Wellengleichung. Die Verifikation der o.g. Lösungsformel erfordert etwas Geschick (Skalierung, Gauss'scher Integralsatz). Ihre Herleitung mit Hilfe der Fouriertransformation wird (hoffentlich noch) in Kap. 4 gelingen.

——— Ende der Diskussion der Beispiele ———

Fassen wir unsere Erkenntnisse über die Faltung komplexer Radon-Maße mit einigen kleinen Ergänzungen zusammen:

Satz 2: G sei eine LCA-Gruppe. Dann gelten:

(a) $(M(G), +, *)$ ist eine kommutative Banach-Algebra mit δ_0 als neutralem Element der Faltung.

(b) $L^1(G) \subset M(G)$ ist ein abgeschlossenes Ideal.

(c) $M_d(G)$ bezeichne den UVR aller diskreten Radon-Maße in $M(G)$. Dann ist $M_d(G)$ eine abgeschlossene Unteralgebra.

~~(d) Ist $(k_i)_{i \in I}$ eine approximative Einheit auf G, so konvergiert (k_i) schwach gegen δ_0, d.h. wir haben $\lim_{i \in I} k_i * \varphi(0) = \varphi(0) = \delta_0 * \varphi(0) \; \forall \varphi \in C_0(G)$ (Bez. $k_i \to \varphi$, es handelt sich dabei um die von $C_0(G)$ erzeugte schwach-$*$-Topologie. Bem.: Konvergenz in der Norm ist unmöglich, da $L^1(G)$ vollständig ist.)~~

(c) Ist für ein $p \in (1,\infty]$ $f \in L^p(G)$ und $\mu \in M(G)$, so ist für H-fast alle $x \in G$

$$f * \mu(x) := \int_G f(x-y)\, d\mu(x)$$

wohldefiniert. Es ist $f * \mu \in L^p(G)$ und es gilt

$\|f * \mu\|_p \leq \|f\|_p \|\mu\|$.

(Bem.: Da i.allg. $f \notin L^1(G)$ ist, definiert f nicht notwendig ein endliches Maß. Eine Def. ist an dieser Stelle notwendig, sie ist gerade so gewählt, als sei $f \in L^1(G)$.)

(e) Ist $(k_i)_{i \in I}$ eine approximative Einheit auf G, so gilt für alle $\mu \in M(G)$ und $\varphi \in C_0(G)$

$$\lim_{i \in I} \int_G k_i * \mu(x)\, \varphi(x)\, dH(x) = \int_G \varphi(x)\, d\mu(x)$$

(Man sagt: $(k_i * \mu)_{i \in I}$ konvergiert schwach gegen μ.
Es handelt sich tatsächlich um die Konvergenz in der von $C_0(G)$ erzeugten schwach-$*$-Topologie. Konvergenz in der Norm ist nicht möglich, da $L^1(G)$ vollständig, also abgeschlossen in $M(G)$ ist.)

Bew. 1 Zu (a) Die Ungleichung

$$\|\mu * \nu\| \le \|\mu\| \, \|\nu\| \qquad (3)$$

wurde bereits gezeigt. Die Diskussion der Dirac-Maße (Bsp. (2)) ergab, dass

- δ_0 ein Einselement der Faltung ist und
- die Faltung kommutativ ist und
- sich distributiv zur Addition verhält.

Assoziativität: Für $E \in \mathcal{B}(G)$ haben wir

$$(\mu * \nu) * \sigma(E) = \int_G \int_G \chi_E(x+z) \, d(\mu * \nu)(x) \, d\sigma(z)$$

$$= \int_G \underbrace{\int_G \chi_{E-z}(x) \, d\mu * \nu(x)}_{= \mu * \nu(E-z)} \, d\sigma(z)$$

$$= \int_G \int_G \int_G \chi_{E-z}(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \, d\sigma(z)$$

$$= \int_{G \times G \times G} \chi_E(x+y+z) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \, d\sigma(z)$$

und eine ähnliche Rechnung zeigt, dass dies mit $\mu * (\nu * \sigma)(E)$ übereinstimmt.

(b) Die Abgeschlossenheit folgt aus der Vollständigkeit von $L^1(G)$. Zur Idealeigenschaft: Sei $f \in L^1(G)$, $\mu \in M(G)$:

$$\mu^{(f)} * \mu(E) = \int_{G \times G} \chi_E(x+y) \, f(x) \, dH(x) \, d\mu(y)$$

$$= \int_G \int_G \chi_E(x) \, f(x-y) \, dH(x) \, d\mu(y) \qquad \text{Translationsinvarianz}$$

$$= \int_G \chi_E(x) \int_G f(x-y) \, d\mu(y) \, dH(x) \qquad \text{Fubini}$$

$$= \int_G \chi_E(x) \cdot g(x)\, dH(x),$$

wobei $g(x) = \int_G f(x-y)\, d\mu(y)$ und damit

$$\int_G |g(x)|\, dH(x) \leq \int_G \int_G |f(x-y)|\, d|\mu|(y)\, dH(x) \leq \|\mu\| \, \|f\|_1,$$

was bedeutet, dass $g \in L^1(G)$ eine Dichte von $\mu^{(f)} * \mu$ ist.

(d) Ist $\mu \in M_d(G)$, so hat μ die Gestalt $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{x_n}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty$. Da $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ ergibt sich mit einem weiteren derartigen Maß $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n \delta_{y_n}$:

$$\mu * \nu = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_m \delta_{x_n + y_m},$$ und dies ist ebenfalls ein diskretes Maß. Ist $(\mu^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $M_d(G)$, so ist $\{x \in G : \exists m \in \mathbb{N} : \mu^{(m)}(\{x\}) \neq 0\}$

Erg. 1.92 (a)

$$= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{x \in G : \mu^{(m)}(\{x\}) \neq 0\} =: X$$

eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und daher auch ein möglicher Grenzwert der $\mu^{(m)}$ ein diskretes Maß.

(c) Mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale erhalten wir

$$\|f * \mu\|_p = \Big\| \int_G f(\cdot - y)\, d\mu(y) \Big\|_p \leq \int_G \|\tau_y f\|_p \, d|\mu|(y)$$

$$= \|f\|_p \, \|\mu\|$$

Hieraus folgt $\int_G |f(x-y)|\, d|\mu|(y) < \infty$ H-fast überall, damit insbes. die Wohldefiniertheit. Mit der Ungleichung ist auch $f * \mu \in L^p(G)$ gezeigt.

Wir zeigen: Ist $\lim_{m\to\infty} \|\mu^{(m)} - \mu\| = 0$ so gilt $|\mu|(X^c) = 0$ 1.32 (a)

Aus der Def. von X folgt $|\mu^{(m)}|(X^c) = 0 \;\; \forall m \in \mathbb{N}$

und damit

$$|\mu|(X^c) = \big|\, |\mu|(X^c) - |\mu^{(m)}|(X^c) \big| \overset{(*)}{\leq} |\mu - \mu^{(m)}|(X^c) \leq \|\mu - \mu^{(m)}\| \xrightarrow[(m\to\infty)]{} 0$$

Also ist $|\mu|$ und damit μ auf der abzählbaren Menge X konzentriert, also $\mu \in M_d(G)$

(*) An dieser Stelle verwendet man eine Dreiecksungleichung

$$|\mu + \nu|(E) \leq (|\mu| + |\nu|)\, E$$

für die Totalvariation, deren Beweis "straight forward" ist und die $|(|\mu| - |\nu|)(E)| \leq |\mu - \nu|(E)$ impliziert.

(e) Es ist

$$\int_G k_i * \mu(x)\varphi(x)\,dH(x) = \int_G\int_G k_i(x-y)\,d\mu(y)\,\varphi(x)\,dH(x)$$

$$= \int_G\int_G k_i(x-y)\varphi(x)\,dH(x)\,d\mu(y) \qquad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_G\int_G k_i(x)\,\varphi(x+y)\,dH(x)\,d\mu(y) \qquad \text{(Translations-invarianz)}$$

$$= \int_G k_i(x) \underbrace{\int_G \varphi(x+y)\,d\mu(y)}_{\text{stetig in } x \text{, nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz}} dH(x) \qquad \text{(Fubini)}$$

$$\xrightarrow[i\in I]{} \int_G \varphi(y)\,d\mu(y) \qquad \text{(Konvergenzaussage für approx. Einheiten)} \qquad \square$$

Jetzt führen wir die Fouriertransformation komplexer Radon-Maße ein:

<u>Def.</u>: Für $\mu \in M(G)$ heißt die Funktion $\hat{\mu}: \hat{G} \to \mathbb{C}$, def. durch

$$\hat{\mu}(\gamma) := \int_G \overline{\gamma(x)}\,d\mu(x),$$

die Fourier-Transformierte von μ. Die Menge aller Fourier-transformierten komplexen Radon-Maße auf $\mathcal{B}(G)$ wird mit $B(\hat{G})$ bezeichnet.

<u>Bem.</u>: Die Fouriertransformation von Maßen wird manchmal auch als Fourier-Stieltjes-Transformation bezeichnet, um sie von der "gewöhnlichen" Fouriertransformation von L^1-Funktionen zu unterscheiden.

Satz 3:

(a) Jedes $\hat{\mu} \in B(\hat{G})$ ist beschränkt und gleichmäßig stetig.

(b) Für alle $\mu, \nu \in M(G)$ ist $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$. Für jedes $\gamma \in \hat{G}$ ist daher die Abbildung $\mu \mapsto \hat{\mu}(\gamma)$, $M(G) \to \mathbb{C}$, ein komplexer Homomorphismus.

(c) $B(\hat{G})$ ist invariant unter Translation, Multiplikation mit $\gamma(x)$ ($x \in G$ fest aber beliebig) und unter komplexer Konjugation.

Bew.: (a) Die Beschränktheit folgt aus

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = \left| \int_G \overline{\gamma(x)}\, d\mu(x) \right| \leq \int_G d|\mu|(x) = \|\mu\|$$

(was zugleich die Stetigkeit der Fourier-(Stieltjes-)Transformation $\mathcal{F}: M(G) \to L^\infty(\hat{G})$, $\mu \mapsto \hat{\mu}$ liefert.)

Zum Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da μ endlich und regulär ist, existiert ein ~~$\varepsilon > 0$~~ kompaktum $K \subset G$, sodass $|\mu|(K^c) < \frac{\varepsilon}{4}$. Sind nun $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ mit $\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_2} = \gamma_1 \gamma_2^{-1} \in N(K, \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|})$, dabei

$$N(K, r) = \{\gamma \in \hat{G} : |\gamma(x) - 1| < r \ \forall x \in K\}, \text{ vgl. A. 1.3.2,}$$

so folgt

$$|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| \leq \int_G |\gamma_1(x) - \gamma_2(x)|\, d|\mu|(x)$$

$$\leq \int_K |\gamma_1(x)\overline{\gamma_2}(x) - 1|\, d|\mu|(x) + 2\int_{K^c} d|\mu|(x)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|} \cdot |\mu|(K) + 2|\mu|(K^c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

zu (b): $\widehat{\mu*\nu}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma}(x)\, d(\mu*\nu)(x)$

$$= \int_G\int_G \underbrace{\overline{\gamma}(x+y)}_{=\overline{\gamma}(x)\cdot\overline{\gamma}(y)}\, d\mu(x)\,d\nu(y) \underset{\text{Fubini}}{=} \hat\mu(\gamma)\,\hat\nu(\gamma).$$

zu (c): <u>Translationsinvarianz</u>: Wir definieren für $\gamma_0\in\hat G$ μ_{γ_0} durch

$$\mu_{\gamma_0}(E) = \int_G \chi_E(x)\, d\mu_{\gamma_0}(x) := \int_G \chi_E(x)\gamma_0(x)\,d\mu(x).$$

Dann ist μ_{γ_0} ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(G)$ mit der stetigen μ-Dichte γ_0 und daher regulär (vgl. Aufg.). Also ist $\mu_{\gamma_0}\in M(G)$ und für die Fouriertransformierte haben wir

$$\hat\mu_{\gamma_0}(\gamma) = \int_G \overline\gamma(x)\gamma_0(x)\,d\mu(x) = \int_G \overline{\gamma\cdot\gamma_0^{-1}}(x)\,d\mu(x)$$

$$= \hat\mu(\gamma\gamma_0^{-1}) = \tau_{\gamma_0}\hat\mu(\gamma)$$

Also: $\hat\mu\in B(\hat G) \Rightarrow \tau_{\gamma_0}\hat\mu\in B(\hat G)$.

<u>Invarianz unter Multiplikation mit $\gamma\mapsto\gamma(x)$</u> ($x\in G$ fest, bel.)

Für $x\in G$ und $\mu\in M(G)$ definieren wir $\tau_x\mu$ durch $\tau_x\mu(E)=\mu(E+x)$.
Da $+x: G\to G,\ y\mapsto y+x$ stetig und bijektiv mit stetiger Inverser ist, gilt $\tau_x\mu\in M(G)$. Ferner

$$\widehat{\tau_x\mu}(\gamma) = \int_G\overline{\gamma(y)}\,d\tau_x\mu(y) = \int_G \overline{\gamma(y-x)}\,d\mu(x)$$

$$= \gamma(x)\int_G\overline{\gamma(y)}\,d\mu(x) = \gamma(x)\cdot\hat\mu(\gamma) =: M_x\hat\mu(\gamma)$$

und das heißt: $\hat\mu\in B(\hat G)\Rightarrow M_x\hat\mu\in B(\hat G)$.

<u>Invarianz unter komplexer Konjugation</u>: Für $\mu\in M(G)$ sei $\tilde\mu(E) = \overline{\mu(-E)}$. Dann ist $\hat{\tilde\mu}(\gamma) = \int_G\overline\gamma(x)\,d\tilde\mu(x)$

$$= \int_G \overline\gamma(x)\,d\overline\mu(-x) = \overline{\int_G\gamma(-x)\,d\mu(x)} = \overline{\int_G\overline\gamma(x)\,d\mu(x)} = \overline{\hat\mu}(\gamma).$$

Also: $\hat\mu\in B(\hat G) \Rightarrow \overline{\hat\mu}\in B(\hat G)$ □

Bem. + Bsp. zu Teil (a): Im Gegensatz zu $A(\hat{G})$ ist $B(\hat{G}) \subsetneqq C_0(\hat{G})$, sofern G nicht diskret und damit $\hat{G}$ kompakt ist. Für die Dirac-Maße gilt nämlich

$$\hat{\delta}_x(\gamma) = \int_G \overline{\gamma}(y)\, d\delta_x(y) = \overline{\gamma}(x) \text{ mit } |\overline{\gamma}(x)| = 1 \ \forall \gamma \in \hat{G}$$

Insbesondere gilt $\hat{\delta}_0(\gamma) = 1$ (konstante Funktion, neutrales Element der punktweisen Multiplikation in $C(\hat{G})$).

Ein Eindeutigkeitssatz für die duale Gruppe bzw. die inverse Fouriertransformation:

Satz 4: Sei $\mu \in M(\hat{G})$ und $\check{\mu}(x) := \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) = 0$ für alle $x \in G$. Dann ist $\mu = 0$.

Bew.: Für jedes $f \in L^1(G)$ ist

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\mu(\gamma) = \int_{\hat{G}} \int_G \overline{\gamma}(x) \cdot f(x)\, dH(x)\, d\mu(\gamma)$$

$$= \int_G f(x) \int_{\hat{G}} \overline{\gamma}(x)\, d\mu(\gamma)\, dH(x)$$

$$= \int_G f(-x) \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)\, dH(x) = 0.$$

Nun ist $A(\hat{G})$ dicht in $C_0(\hat{G})$ und μ definiert ein stetiges lineares Funktional auf $C_0(\hat{G})$. Also ist $\int_{\hat{G}} g(\gamma)\, d\mu(\gamma) = 0 \ \forall g \in C_0(\hat{G})$ und damit ist $\mu = 0$ □

Bsp. 2: Die Fouriertransformierte des Flächenmaßes σ_r der Sphäre $S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ vom Radius $r > 0$.

Vorbem.: Verhalten von Flächenintegralen bei Streckungen

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dim. glattes (hier: $= C^1$) Flächenstück mit Parametrisierung

$$\varphi : \mathbb{R}^k \supset \Omega \longrightarrow \varphi(\Omega) = S \subset \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \varphi(t)$$

mit Gramscher Matrix $G_\varphi(t) = D\varphi(t)^T D\varphi(t)$. Das ist eine $k \times k$-Matrix, wobei $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Dann ist für $r > 0$ die Abb. $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \psi(t) := r \cdot \varphi(t)$ eine Parametrisierung von

$$S_r := rS = \{rx : x \in S\}$$

mit Gramscher Matrix $G_\psi(t) = D\psi(t)^T D\psi(t) = r^2 G_\varphi(t)$.

Für deren Determinanten gilt dann

$$g_\psi(t) = \det G_\psi(t) = r^{2k} \det G_\varphi(t) = r^{2k} g_\varphi(t).$$

Für die Integrale nach den Flächenmaßen σ bzw. σ_r bedeutet dies:

$$\int_{S_r} f(x)\, d\sigma_r(x) = \int_\Omega f(\psi(t)) \sqrt{g_\psi(t)}\, d^k t$$

$$= r^k \int_\Omega f(r\varphi(t)) \sqrt{g_\varphi(t)}\, d^k t = r^k \int_S f(ry)\, d\sigma(y)$$

Wenden wir dies mit $k = n-1$ und $S = S_r^{n-1}$ an, können wir uns zunächst auf den Fall $r = 1$ beschränken.

Berechnung der Fouriertransformierten von $\sigma = \sigma_1$

Wg. der Rotationsinvarianz können wir $\xi = (0,\dots,0,|\xi|)$ annehmen. Dann ist

$$\hat{\sigma}(\xi) = C_n \cdot \int_{|x|=1} e^{-ix\xi}\, d\sigma(x) = C_n \cdot \int_{|x|=1} e^{-ix_n\cdot|\xi|}\, d\sigma(x)$$

$$= C_n \cdot \int_{|x'|<1} \left(e^{-i|\xi|\sqrt{1-|x'|^2}} + e^{i|\xi|\sqrt{1-|x'|^2}}\right) \frac{d(x')}{\sqrt{1-|x'|^2}}$$

Jetzt: $n-1$ dim. Polarkoordinaten:

$$= C_n \cdot \int_0^1 \int_{|x'|=s} d\sigma_s(x') \left(e^{-i|\xi|\sqrt{1-s^2}} + e^{i|\xi|\sqrt{1-s^2}}\right) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$= C_n \cdot |S^{n-2}| \cdot \int_0^1 s^{n-2} \left(\text{———} \;\; '' \;\; \text{———} \right) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

Im ersten Integral $\int_0^1 s^{n-2}\, e^{-i|\xi|\sqrt{1-s^2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} =: I$

substituieren wir $s = \sin(t)$ mit $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dann ist $ds = \underbrace{\cos(t)}_{>0} dt = \sqrt{1-s^2}\, dt$ und daher

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(\frac{n}{2}-1)}(t)\, e^{-i|\xi|\cos(t)}\, dt.$$

Für das zweite Integral benutzen wir dieselbe Subst. $s = \sin(t)$, aber mit $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Hier ist $\cos(t) < 0$, also $\sqrt{1-s^2} = -\cos(t)$ und wir erhalten einen zweiten Beitrag

$$II = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2(\frac{n}{2}-1)} e^{-i|\xi|\cos(t)}\, dt$$

Insgesamt also

$$\hat{\sigma}(\xi) = C_n \cdot \underbrace{|S^{n-2}|}_{(*)} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin^{2(\frac{n}{2}-1)} e^{-i|\xi|\cos(t)}\,dt}_{= \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{|\xi|}\right)^{\frac{n}{2}-1}\cdot J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|)}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= C_n \cdot (2\pi)^{n/2} \cdot |\xi|^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n}{2}-1}(|\xi|)$$

Mit der Vorbemerkung ergibt sich für $r > 0$:

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}_r(\xi)}} = C_n \cdot (2\pi)^{n/2}\, r^{n-1}\, |r\xi|^{1-\frac{n}{2}} \cdot J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)$$

$$= \underline{\underline{C_n \cdot (2\pi)^{n/2}\, r^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)}}\ |\xi|^{1-\frac{n}{2}}$$

(*) ggf. später als Aufgabe