Wir haben in der Einführung zwei "Fouriertransformationen" kennengelernt:

(1) Einer integrierbaren Funktion f wird die Folge ihrer Fourierkoeffizienten zugeordnet, genauer:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}),\ f \longmapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}},$$

$$\text{dabei}\quad \hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx.$$

(2) Durch Grenzübergang (Periodenlänge $\to \infty$) waren wir zur Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$ gelangt:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}),\ f \longmapsto \hat{f},\ \text{def. durch}$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x}\,dx$$

Fragestellung: Wie kann man diese Transformationen auf beliebige LCA-Gruppen G verallgemeinern?

1.3.1 Definitionen und klassische Beispiele

Def.: Es sei G eine LCA-Gruppe.

(i) Eine Abbildung $\gamma : G \to \mathbb{C}$ heißt ein Charakter, wenn für alle $x, y \in G$ gilt: $|\gamma(x)| = 1$ und $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

(ii) $\hat{G} := \{\gamma : G \to \mathbb{C};\ \gamma \text{ ist ein stetiger Charakter}\}$;

(iii) Auf $\hat{G}$ definiert man eine innere Verknüpfung durch: $\gamma_1 \cdot \gamma_2(x) := \gamma_1(x)\gamma_2(x)$. (Diese ist kommutativ und assoziativ. $\gamma_e(x) := 1\ \forall x \in G$ ist das neutrale Element und für $\gamma \in \hat{G}$ ist $\bar{\gamma} \in \hat{G}$ (komplex konjugierte Funktion) das inverse Element: $\gamma^{-1} = \bar{\gamma} = \gamma(-\cdot)$)

Forts. der Def.:

(iv) $(\hat{G}, \cdot)$ mit der in (iii) definierten Multiplikation als innerer Verknüpfung heißt die zu G duale Gruppe

Bsp. (1) Sei $G = (\mathbb{R}, +)$. Dann ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ die Funktion $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \gamma_\xi(x) := e^{ix\xi}$ ein stetiger Charakter. Wir zeigen, dass es keine weiteren gibt:

Sei $\gamma \in \hat{G}$. Da $\gamma \neq 0$ ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\alpha := \int_0^\delta \gamma(t)\,dt \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Mit der Funktionalgleichung folgt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \gamma(x) = \int_0^\delta \gamma(x)\gamma(t)\,dt = \int_0^\delta \gamma(x+t)\,dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,dt.$$

Da γ stetig ist, können wir an der rechten Seite ablesen, dass γ stetig diffbar ist. Ableiten der Funktionalgleichung $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ nach y:

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x) \cdot \gamma'(y), \quad \text{insbes.} \quad \gamma'(x) = \gamma'(0) \cdot \gamma(x),$$

eine homogene lineare Dgl. 1. Ordnung mit der allgemeinen Lösung $\gamma(x) = C \cdot \exp(\gamma'(0) \cdot x)$. Aus $\gamma(0) = 1$ folgt $C = 1$, und $|\gamma(x)| = 1$ erfordert $\gamma'(0) \in i \cdot \mathbb{R}$. Also gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$, so dass $\gamma(x) = e^{i\xi x}$. Ergebnis:

$$\hat{G} = \{\gamma_\xi, \xi \in \mathbb{R} : \gamma_\xi(x) = e^{i\xi x} \ \forall x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}.$$

(2) $G = (\mathbb{T}, +)$. Die stetigen Charaktere auf $\mathbb{T}$ müssen nach der Überlegung zu (1) dieselbe Gestalt $\gamma_\xi(x) = e^{ix\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$ haben. Zusätzlich muss wegen $x + 2\pi = x$ in $G = \mathbb{T}$ gelten: $\gamma_\xi(x) = \gamma_\xi(x + 2\pi) = \gamma_\xi(x) \cdot \gamma_\xi(2\pi)$, also

Forts. Bsp. (2):

also $1 = \gamma_\xi(2\pi) = e^{i2\pi\xi}$, und das erfordert $\xi \in \mathbb{Z}$. Offenbar handelt es sich bei $\gamma_k(x) := e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ auch tatsächlich um stetige Charaktere, und wir haben

$$\widehat{G} = \{\gamma_k,\ k \in \mathbb{Z} : \gamma_k(x) = e^{ikx}\ \forall x \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{Z}.$$

(3) $G = (\mathbb{Z}, +)$. Sei $\gamma \in \widehat{G}$. Dann gibt es ein $\alpha \in [-\pi, \pi)$, so dass $\gamma(1) = e^{i\alpha}$. Wiederholte Anwendung der Funktionalgleichung ergibt $\gamma(k) = e^{i\alpha k}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Also

$$\widehat{G} = \{\gamma_\alpha,\ \alpha \in [-\pi, \pi) : \gamma_\alpha(k) = e^{ik\alpha}\} \cong \mathbb{T}.$$

<u>Def.</u>: Sei G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H und $f \in L^1(G)$. Dann heißt die Funktion $\hat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$, def. durch

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(x)\,\gamma(-x)\,dH(x)$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f.

<u>Bem.</u>: Es ist $|\hat{f}(\gamma)| \le \int_G |f(x)|\,\underbrace{|\gamma(-x)|}_{=1}\,dH(x) = \|f_1\|$, also $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$. Die Stetigkeit (und daraus die Borel-Meßbarkeit) von $\hat{f}$ wird sich zeigen, wenn wir $\widehat{G}$ mit einer Topologie ausgestattet haben.

<u>Def.</u>: Sei G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H. Die <u>Fouriertransformation</u>

$$\mathcal{F}_G : L^1(G) \to L^\infty(\widehat{G}), \quad f \mapsto \mathcal{F}_G f$$

wird definiert durch $\mathcal{F}_G f(\gamma) = \hat{f}(\gamma)$ $\forall \gamma \in \widehat{G}$.

Das Bild der Fouriertransformation wird mit $A(\widehat{G})$ bezeichnet.

Bsp.: Für die klassischen Gruppen der Fourier-Analysis haben wir: 1.6

(1) $G=(\mathbb{R},+)$: $\hat{f}(\xi) = c\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x}\,dx$ $\quad(\xi\in\mathbb{R})$

(2) $G=(\mathbb{T},+)$: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\,dx$ $\quad(k\in\mathbb{Z})$

(3) $G=(\mathbb{Z},+)$: $\hat{f}(\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\, e^{-ik\alpha}$ $\quad(\alpha\in\mathbb{T})$

(Dabei werden γ_ξ mit ξ, γ_k mit k und γ_α mit α gleichgesetzt; $\gamma_\xi, \gamma_k, \gamma_\alpha$ aus den vorhergehenden Beispielen (1)-(3).)

Im weiteren wird es darum gehen, die duale Gruppe $\hat{G}$ so mit einer Topologie auszustatten, dass eine LCA-Gruppe entsteht. In einem ersten Schritt identifizieren wir $\hat{G}$ mit dem sogenannten Spektrum der B-Algebra $(L^1(G),+,*)$.

<u>Def.</u>: Sei A eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$. Dann heißt

(i) $\varphi\in A'$ ein <u>komplexer Homomorphismus</u>, wenn $\varphi(f\cdot g)=\varphi(f)\varphi(g)$ $\forall f,g\in A$ ist;

(ii) $\Delta_A := \{\varphi: A\to\mathbb{C} : 0\neq\varphi$ ist ein komplexer Homomorphismus$\}$ der <u>Spektrum</u> von A.

<u>Bem.</u>: Δ_A wird auch der maximale Idealraum von A genannt. Das hat folgenden Hintergrund:

- Ist A eine Algebra und $I\subset A$ eine Unteralgebra mit der Eigenschaft

$$f \in A,\ g \in I \quad \Longrightarrow \quad fg \in I,$$

so heißt I ein Ideal.

- Ein Ideal I heißt echt (oder eigentlich, englisch: proper), wenn $I \neq A$ gilt.
- Ein maximales Ideal ist ein echtes Ideal, wenn es in keinem echten, größeren Ideal enthalten ist.

In einer kommutativen B-Algebra A gilt: $I \subset A$ ist ein maximales Ideal $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\varphi \in \Delta_A$, so dass $I = \operatorname{Ker} \varphi$.

Satz 1: Es sei G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H und dualer Gruppe $\widehat{G}$. $\Delta = \Delta_{L^1(G)}$ sei der Strukturraum der Banachalgebra $L^1(G)$. Dann ist die Abbildung

$$d : \widehat{G} \longrightarrow \Delta, \qquad \gamma \longmapsto d(\gamma),$$

definiert durch $d(\gamma)[f] := \widehat{f}(\gamma)$, eine Bijektion.

Vorbem.: Im Beweis benutzen wir den Satz über die Dualräume von L^p in der Version $(L^1(G))' \cong L^\infty(G)$. Dieser gilt allgemein nur für σ-endliche Maße. Auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit kann man jedoch im Fall äußerer Radon-Maße auf LC-Gruppen verzichten. (Vgl. Loomis, Lynn H.: An introduction to abstract harmonic Analysis; §§ 15 D und 18 E).

Bew.:

(i) Wir zeigen: Für jedes $\gamma \in \widehat{G}$ ist $d(\gamma) \in \Delta$.

Aus den Eigenschaften des Integrals folgt $\widehat{f+g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma) + \hat{g}(\gamma)$ sowie $\widehat{\lambda f}(\gamma) = \lambda \hat{f}(\gamma)$. Also ist $d(\gamma)$ ein lineares Funktional. Wir haben $|\hat{f}(\gamma)| \leq \|f\|_1$, das ist die Stetigkeit. Multiplikativität:

$$\widehat{f*g}(\gamma) = \int_G f*g(x) \cdot \gamma(-x)\, dH(x)$$

$$= \int_G \int_G f(x-y) g(y)\, dH(y) \cdot \gamma(-x)\, dH(x)$$

$$= \int_G g(y) \int_G f(x-y) \gamma(-x)\, dH(x)\, dH(y) \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_G g(y) \int_G f(x) \underbrace{\gamma(-x-y)}_{=\gamma(-x)\gamma(-y) \text{ ≙ Eigenschaft eines Charakters}} dH(x)\, dH(y) \quad \text{Translationsinvarianz}$$

$$= \int_G g(y)\gamma(-y) \int_G f(x)\gamma(-x)\, dH(x)\, dH(y) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).$$

Aus $\hat{f}(\gamma) = 0 \ \forall f \in L^1(G)$ folgt $0 = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\, dH(x) \ \forall f \in L^1(G)$

$\Rightarrow \gamma = 0$ ↯. Also: $d(\gamma) \neq 0$.

(ii) Wir zeigen: d ist surjektiv. Dazu sei $\varphi \neq 0$ ein komplexer Homomorphismus, also insbesondere ein stetiges lineares Funktional auf $L^1(G)$. Wir zeigen, dass $\|\varphi\| = 1$:

(a) Nehmen wir $\|\varphi\| > 1$ an, so existiert $f \in L^1(G)$ mit $\|f\|_1 \leq 1$ und $|\varphi[f]| > 1$. Für $f^{*n} := \underbrace{f * \dots * f}_{n\text{-mal}}$ ergibt sich $\|f^{*n}\|_1 \leq \|f\|_1^n \leq 1$, andererseits: $|\varphi[f^{*n}]| = |\varphi[f]|^n \longrightarrow \infty \ (n \to \infty)$, ein Widerspruch zur Stetigkeit von φ.

(b) Wir wählen $f \in L^1(G)$ mit $\varphi(f) \neq 0$ und eine approximative Einheit $(k_i)_{i\in I}$ mit $k_i \geq 0$ (vgl. Lemma 4 in Abschnitt 1.2). Dann ist wegen der Stetigkeit und Multiplikativität von φ:

$$\varphi[f] = \lim_{i\in I} \varphi[k_i * f] = \varphi[f] \cdot \lim_{i\in I} \varphi[k_i], \text{ also}$$

$\lim_{i\in I} |\varphi[k_i]| = 1$ und $\|k_i\|_1 = 1 \ \forall i \in I$. Hieraus folgt $\|\varphi\| = 1$.

Nach dem Satz über die Dualräume von L^p, speziell $(L^1(G))' \cong L^\infty(G)$ (vgl. die Vorbem.) existiert eine $\psi \in L^\infty(G)$ mit $\|\psi\|_\infty = 1$, so dass $\forall f \in L^1(G)$ gilt:

$$\varphi[f] = \int_G f(x)\psi(x)\,dH(x). \qquad (1)$$

Sind nun f und $g \in L^1(G)$, haben wir

$$\int_G \varphi[f]\, g(y)\psi(y)\,dH(y) = \varphi[f]\cdot\varphi[g] = \varphi[f*g]$$

$$= \int_G f*g(x)\,\psi(x)\,dH(x) = \int_G\int_G f(x-y)g(y)\,dH(y)\,\psi(x)\,dH(x)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_G\int_G f(x-y)\psi(x)\,dH(x)\; g(y)\,dH(y)$$

$$= \int_G \varphi[\tau_y f]\, g(y)\,dH(y).$$

Da dies für alle $g \in L^1(G)$ gilt, folgt

$$\varphi[f]\cdot\psi(y) = \varphi[\tau_y f] \quad \text{für } H\text{-fast alle } y \in G. \qquad (2)$$

Nun ist $\varphi: L^1(G) \to \mathbb{C}$ stetig und, nach Satz 2 in Abschnitt 1.2, auch die Abbildung

$$y \mapsto \tau_y f,\ G \to L^1(G) \quad (\text{für jedes feste } f \in L^1(G)).$$

Also ist die rechte Seite in (2) stetig (als Funktion von y). 1.65

Wählt man $f \in L^1(G)$ mit $\varphi[f] \neq 0$, sieht man, dass ψ auf einer H-Nullmenge so abgeändert werden kann, dass (2) für alle $y \in G$ gilt und dadurch ψ stetig wird.

Wir ersetzen jetzt y durch $x+y$ in (2). Dann folgt

$$\varphi[f]\,\psi(x+y) = \varphi[\tau_{x+y} f] = \varphi[\tau_x(\tau_y f)] \underset{(2)}{=} \psi(x)\,\varphi[\tau_y f]$$

$$\underset{(2)}{=} \psi(x)\cdot\psi(y)\cdot\varphi[f] \quad \Rightarrow \quad \psi(x+y) = \psi(x)\cdot\psi(y)$$

Nun ist $|\psi(x)| \leq 1 \ \forall x \in G$ und nach der gerade hergeleiteten Funktionalgleichung: $1 = \psi(0) = \psi(x)\,\psi(-x)$, also auch $|\psi(x)| \geq 1$ und damit $\psi \in \widehat{G}$. Damit ist die Surjektivität gezeigt.

(iii) Injektivität: Sei $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2) \ \forall f \in L^1(G)$. Dann folgt:

$$\int_G f(x)\,(\overline{\gamma_1}(x) - \overline{\gamma_2}(x))\,dH(x) = 0 \quad \forall f \in L^1(G)$$

und damit $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ für H-fast alle $x \in G$. Da die γ_i stetig sind, folgt $\gamma_1 = \gamma_2$. $\square$

1.3.2 Die Topologie auf der dualen Gruppe

Wir haben jetzt eine Bijektion

$$\hat{G} := \{\gamma : G \to S^1,\ \gamma \text{ ist ein stetiger Charakter}\} \xrightarrow[\text{bijektiv}]{d} \Delta := \{\varphi : L^1(G) \to \mathbb{C},\ \varphi \text{ ist ein komplexer Homomorphismus} \neq 0\} \subset (L^1(G))'$$

$$\gamma \longmapsto d(\gamma),\quad d(\gamma)[f] := \hat{f}(\gamma)$$

$$\text{insbes}\quad 1 = \gamma_e \longmapsto d(\gamma_e),\quad d(\gamma_e)[f] = \int_G f \, dH$$

Der Strukturraum Δ von $L^1(G)$ wird jetzt mit einer schwachen Topologie σ^* (sogenannte schwach-$*$-Topologie) ausgestattet, und diese anschließend mit d auf $\hat{G}$ zurückgezogen. D.h.: $\hat{G}$ wird mit mit der Topologie $\tau_{\hat{G}} := d^{-1}(\sigma^*) := \{d^{-1}(U) : U \in \sigma^*\}$ versehen. <u>Dadurch wird</u> die Abbildung <u>d</u> per definition von $\tau_{\hat{G}}$ <u>sowohl stetig</u> <u>als auch offen</u>, also ein Homöomorphismus. Das hat den Vorteil, dass sich einige Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der kommutativen B-Algebren über den Strukturraum Δ_A auf die duale Gruppe $\hat{G}$ vererben.

<u>Def.</u>: Sei G eine LCA-Gruppe und $\Delta = \Delta_{L^1(G)}$ der zugehörige Strukturraum. Für $f \in L^1(G)$ definiert man

$$\mathcal{J}f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{durch} \qquad \mathcal{J}f[\varphi] = \varphi[f].$$

Dann heißt die vom Funktionensystem $F := \{\mathcal{J}f : f \in L^1(G)\}$ erzeugte schwache Topologie auf Δ die <u>schwach-*-Topologie.</u> Bezeichnung: σ^*.

<u>Bem.</u>: Diese Def. ist offenbar unabhängig von der speziellen Gestalt der B-Algebra $L^1(G)$ und kann für eine beliebige komm. B-Algebra A und deren Strukturraum Δ_A fast wortgleich übernommen werden. Man würde die schwach-*-Topologie dann etwa mit σ_A^* bezeichnen, diese wird auch Gelfand-Topologie genannt.

Ein typisches Element von σ^* erhalten wir, wenn wir $f \in L^1(G)$ fixieren und die Urbilder der ε-Kreisscheiben $B_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < \varepsilon\}$ unter $\mathcal{J}f$ bestimmen. Es ist

$$(\mathcal{J}f)^{-1}(B_\varepsilon(z)) = \{\varphi \in \Delta : \mathcal{J}f[\varphi] \in B_\varepsilon(z)\} = \{\varphi \in \Delta : |\varphi[f] - z| < \varepsilon\}$$

Die Menge aller endlichen Durchschnitte solcher Mengen, also

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{N} \{\varphi \in \Delta : |\varphi[f_i] - z_i| < \varepsilon_i\},\ N \in \mathbb{N},\ f_i \in L^1(G),\ z_i \in \mathbb{C},\ \varepsilon_i > 0 \right\}$$

bildet eine Basis der Topologie σ^* auf Δ. Hierin kann man von den ε_i zu $\varepsilon = \min_{i=1}^{N} \varepsilon_i$ übergehen. Ist $\varphi_0 \in \Delta$

gegeben, so erhält man leicht

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{N} \{\varphi\in\Delta : |\varphi[f_i]-\varphi_0[f_i]|<\varepsilon\} : N\in\mathbb{N},\ f_i\in L^1(G),\ \varepsilon>0 \right\}$$

eine <u>Umgebungsbasis von φ_0</u> in der σ^*-Topologie

Als Topologie auf $\hat{G}$ definieren wir

$$\tau_{\hat{G}} := d^{-1}(\sigma^*) = \{d^{-1}(V) : V\in\sigma^*\}$$

mit der Bijektion d aus Satz 1. Wie sehen die Umgebungen eines Elements $\gamma_0\in\hat{G}$ aus? Dazu betrachten wir das Urbild

$$d^{-1}\{\varphi\in\Delta : |\varphi[f]-\varphi_0[f]|<\varepsilon\} =: (*)$$

einer einfachen Umgebung von $\varphi_0\in\Delta$ unter d. Dazu wählen wir $\varphi_0 = d(\gamma_0)$, so dass

$$\begin{aligned}
(*) &= \{\gamma\in\hat{G} : d(\gamma)=\varphi\in\Delta \text{ und } |\varphi[f]-\varphi_0[f]|<\varepsilon\} \\
&= \{\gamma\in\hat{G} : |d(\gamma)[f]-d(\gamma_0)[f]|<\varepsilon\} \\
&= \{\gamma\in\hat{G} : |\hat{f}(\gamma)-\hat{f}(\gamma_0)|<\varepsilon\}, \text{ letzteres, da } d(\gamma)[f] = \hat{f}(\gamma).
\end{aligned}$$

Die endlichen Durchschnitte solcher Mengen bilden eine Umgebungsbasis von $\gamma_0\in\hat{G}$:

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{N} \{\gamma\in\hat{G} : |\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(\gamma_0)|<\varepsilon\} : N\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0,\ f_i\in L^1(G) \right\}$$

Als nächstes verwenden wir – ohne Beweis – das folgende Ergebnis aus der Theorie der kommutativen Banachalgebren:

<u>Satz 2</u>: Sei A eine kommutative B-Algebra mit Strukturraum Δ_A. Dann gelten:

(a) Wird Δ_A mit der schwach-$*$-Topologie σ_A^* ausgestattet, so ist (Δ_A, σ_A^*) ein lokal kompakter Hausdorff-Raum.

(b) Besitzt A ein Einselement, so ist (Δ_A, σ_A^*) kompakt.

(c) Die Abbildung J, definiert auf A durch

$$J(a)[\varphi] := \varphi[a] \qquad (a \in A,\ \varphi \in \Delta_A)$$

ist ein Algebrenhomomorphismus (stetig, linear und multiplikativ) von $A \longrightarrow C_0(\Delta_A)$. Insbesondere ist $J(a) \in C_0(\Delta_A)$ für jedes $a \in A$.

(Beweis siehe: Deitmar-Echterhoff, "Principles...", Thm. 2.4.5 und Thm. 2.4.3 (Banach-Alaoglu))

Folgerungen aus Satz 2:

(1) $(\hat{G}, \tau_{\hat{G}})$ ist ein lokal kompakter Hausdorff-Raum.

(2) Ist G diskret, so ist $\hat{G}$ kompakt.

<u>Bew.</u>: G diskret $\xRightarrow[\text{in A 1.2}]{\text{Satz 3}}$ $L^1(G)$ besitzt mit $\delta_{0,x}$ ein Einselement $\xRightarrow[\text{Satz 2 (b)}]{}$ (Δ, σ^*) ist kompakt $\Rightarrow (\hat{G}, \tau_{\hat{G}})$ ist kompakt.

(3) (Riemann-Lebesgue'sches Lemma, abstrakte Version): Für jedes $f \in L^1(G)$ ist $\hat{f} \in C_0(\hat{G})$.

<u>Bew.</u>: Es ist $\hat{f}(\gamma) = d(\gamma)[f] = Jf[d(\gamma)] = Jf \circ d\,(\gamma)$.

Also ist $\hat{f}$ stetig als Verknüpfung der stetigen Abbildungen $\mathcal{F}f \in C_0(\Delta)$ (Satz 2 (c)) und $d : \hat{G} \to \Delta$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein kompaktes $K \subset \Delta$ mit $|\mathcal{F}f[\varphi]| < \varepsilon$ für alle $\varphi \in K^c$. $d^{-1}(K) \subset \hat{G}$ ist ebenfalls kompakt, und für $\gamma \in d^{-1}(K)^c$ ist $|\hat{f}(\gamma)| = |\mathcal{F}f[\underbrace{d(\gamma)}_{\notin K}]| < \varepsilon$.

Verbinden wir das Riemann-Lebesgue-Lemma mit dem Satz von Stone-Weierstraß, erhalten wir das folgende Ergebnis über das Bild $A(\hat{G})$ von $L^1(G)$ unter der Fouriertransformation.

<u>Satz 3</u> (a) $\mathcal{F}_G : (L^1(G), +, *) \longrightarrow (C_0(\hat{G}), +, \cdot)$ ist ein Algebrenhomomorphismus.

(b) $A(\hat{G}) = \{\hat{f} \in C_0(\hat{G}) : f \in L^1(G)\}$ ist eine selbstadjungierte Unteralgebra von $C_0(\hat{G})$, die die Punkte von $\hat{G}$ trennt, und die zu jedem $\gamma_0 \in \hat{G}$ ein Element $\hat{f}$ mit $\hat{f}(\gamma_0) \neq 0$ enthält.

(c) $A(\hat{G})$ ist dicht in $C_0(\hat{G})$.

(d) Für $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \hat{G}$ und $x_0 \in G$ gelten $\tau_{\gamma_0}\hat{f} = \widehat{f \cdot \gamma_0}$ sowie $\gamma(-x_0)\hat{f}(\gamma) = \widehat{\tau_{x_0} f}(\gamma)$. $A(\hat{G})$ ist also abgeschlossen unter Translationen und Multiplikationen mit den Funktionen $\gamma \mapsto \gamma(-x_0)$.

<u>Bem.</u>: $\mathcal{F}_G : L^1(G) \to C_0(\hat{G})$ ist i. allg. <u>nicht surjektiv</u>.
Der Beweis der Injektivität folgt später.

Bew.:

(a) Linearität, Stetigkeit ($\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$) und auch die Multiplikativität ($\widehat{f*g} = \hat{f}\cdot\hat{g}$, "Faltungssatz") haben wir bereits festgestellt.

(b) Dass $A(\hat{G}) \subset C_0(\hat{G})$ eine Unteralgebra ist, folgt aus (a). Zu $f \in L^1(G)$ definieren wir $g(x) = \overline{f(-x)}$. Dann ist $\hat{g}(\gamma) = \int\limits_G g(x)\overline{\gamma}(x)\,dH(x) = \int\limits_G \overline{f(-x)}\,\gamma(-x)\,dH(x)$

$= \int\limits_G \overline{f(x)}\,\gamma(x)\,dH(x) = \overline{\int\limits_G f(x)\overline{\gamma}(x)\,dH(x)} = \overline{\hat{f}}(\gamma)$. Also $\hat{f} \in A(\hat{G}) \Rightarrow \overline{\hat{f}} \in A(\hat{G})$ und d.h. $A(\hat{G})$ ist selbstadjungiert.

Aus Satz 1 wissen wir: $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$ $\forall f \in L^1(G)$ $\Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ (Injektivität von d!). D.h.: sind $\gamma_1 \neq \gamma_2$ $\in \hat{G}$, so existiert ein $f \in L^1(G)$ für das $\hat{f}(\gamma_1) \neq \hat{f}(\gamma_2)$. D.h. wiederum, dass $A(\hat{G})$ die Punkte von $\hat{G}$ trennt.

Ist $\gamma_0 \in \hat{G}$, setzen wir $f = \gamma_0 \cdot f_0$ mit einer Funktion f_0, für die $\int\limits_G f_0(x)\,dH(x) = 1$. Dann ist $\hat{f}(\gamma_0) = 1$.

(c) Aus Folgerung (a) zu Satz 2 wissen wir, dass $(\hat{G}, \tau_{\hat{G}})$ ein lokal kompakter Hausdorff-Raum ist. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß gegeben, und dieser ergibt die Dichtheit von $A(\hat{G})$ in $C_0(\hat{G})$.

(d) $\tau_{\gamma_0}\hat{f}(\gamma) = \hat{f}(\gamma\cdot\overline{\gamma_0}) = \int_G f(x)\cdot\gamma_0(x)\overline{\gamma}(x)\,dH(x)$

$= \widehat{f\cdot\gamma_0}(\gamma)$

$\gamma(-x_0)\cdot\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\,\overline{\gamma}(x+x_0)\,dH(x)$

$= \int_G f(x-x_0)\,\overline{\gamma}(x)\,dH(x) = \widehat{\tau_{x_0}f}(\gamma)$ $\square$

Bislang ist $\hat{G}$ einerseits eine abelsche Gruppe und andererseits ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Wir werden jetzt eine andere Beschreibung der Topologie $\tau_{\hat{G}}$ geben, um einzusehen, dass $\hat{G}$ eine LCA-Gruppe ist.

Satz 4 (a) Die Abbildung $(x,\gamma)\longmapsto\gamma(x)$, $G\times\hat{G}\longrightarrow\mathbb{C}$ ist stetig

(b) Es seien $K\subset G$ und $C\subset\hat{G}$ kompakt, $B_r(1) := \{z\in\mathbb{C} : |z-1| < r\}$ $(r>0)$ und

$$N(K,r) := \{\gamma\in\hat{G} : \gamma(x)\in B_r(1)\ \forall x\in K\}$$ sowie

$$N(C,r) := \{x\in G : \gamma(x)\in B_r(1)\ \forall\gamma\in C\}.$$

Dann sind $N(K,r)$ und $N(C,r)$ offene Teilmengen von $\hat{G}$ bzw. von G.

(c) Die Familie $\{N(K,r)\cdot\gamma : K\subset G \text{ kompakt}, r>0, \gamma\in\hat{G}\}$ ist eine Basis der Topologie $\tau_{\hat{G}}$.

(d) $\hat{G}$ ist eine LCA-Gruppe.

Bew.: (a) Nach Satz 3 (d) haben wir

$$\gamma(x)\cdot\hat{f}(\gamma) = \widehat{\tau_{-x}f}(\gamma)$$

und es reicht zu zeigen, dass die rechte Seite bei festem f eine stetige Funktion von $(x,\gamma)\in G\times\hat{G}$ ist. Nun ist

$$|\widehat{\tau_{-x}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma_0)| \leq |\widehat{\tau_{-x}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma)|+|\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma_0)|$$

$$\leq \|(\tau_{-x}-\tau_{-x_0})f\|_1 + |\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma_0)|$$

Ist $\varepsilon>0$ vorgegeben, so gibt es Umgebungen $U\subset G$ von x_0, so so dass $\|(\tau_{-x}-\tau_{-x_0})f\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$ (Satz 2 in Abschnitt 1.2) und $V\in\hat{G}$ von γ_0, so dass $|\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (Stetigkeit der Fouriertransformierten). Also für alle $(x,\gamma)\in U\times V$:

$$|\widehat{\tau_{-x}f}(\gamma)-\widehat{\tau_{-x_0}f}(\gamma_0)|<\varepsilon.$$

(b) Seien $r>0$ und ein Kompaktum $K\subset G$ vorgegeben. Wir fixieren $\gamma_0\in N(K,r)$. Nach (a) gibt es zu jedem $x_0\in K$ eine offene Umgebung U_{x_0} von x_0 in G und eine offene Umgebung $V_{x_0}\subset\hat{G}$ von γ_0, so dass $V_{x_0}\subset N(K,r)$ $\forall x\in U_{x_0}$. Dann ist $K\subset\bigcup_{x_0\in K}U_{x_0}$, und, da K kompakt ist, bereits $K\subset\bigcup_{i=1}^{N}U_{x_i}$. Wir bilden den Durchschnitt $V:=\bigcap_{i=1}^{N}V_{x_i}$ der zugehörigen Umgebungen von γ_0. Dann ist V offen in $\hat{G}$ und es gilt $V\subset N(K,r)$. Also ist γ_0 ein innerer Punkt von $N(K,r)$.

Für $N(C,r)$ argumentiert man genauso.

(c) Sei $V \subset \widehat{G}$ eine Umgebung eines Punktes $\gamma_0 \in \widehat{G}$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $f_1, \dots, f_N \in L^1(G)$, so dass

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{\gamma \in \widehat{G} : |\widehat{f_i}(\gamma) - \widehat{f_i}(\gamma_0)| < \varepsilon\} \subset V.$$

(Mengen dieses Typs bilden wie wir gesehen haben eine Umgebungsbasis von γ_0.) Wir wollen o.E. $\gamma_0 = \gamma_e \equiv 1$ annehmen.

Das ist möglich, da

$$\overline{\gamma_0}\, V \supset \overline{\gamma_0} \bigcap_{i=1}^{N} \dots = \bigcap_{i=1}^{N} \{\overline{\gamma_0}\gamma : |\widehat{f_i}(\gamma) - \widehat{f_i}(\gamma_0)| < \varepsilon\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{N} \{\gamma' \in \widehat{G} : |\widehat{f_i}(\gamma_0\gamma')) - \widehat{f_i}(\gamma_0\gamma_e)| < \varepsilon\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{N} \{\gamma' \in \widehat{G} : |\widehat{g_i}(\gamma')) - \widehat{g_i}(\gamma_e)| < \varepsilon\}$$

für $g_i = f_i \cdot \overline{\gamma_0}$, so dass $\widehat{g_i}(\gamma) = \int_G f_i(x) \cdot \overline{\gamma_0}(x)\, \overline{\gamma}(x)\, dH(x)$

$$= \widehat{f_i}(\gamma_0 \cdot \gamma)$$ (womit wir die Translationsinvarianz der Topologie $\tau_{\widehat{G}}$ gezeigt haben.)

Wir nehmen also $\gamma_0 = \gamma_e \equiv 1$ an und – da $C_c(G) \subset L^1(G)$ dicht ist – $f_1, \dots, f_N \in C_c(G)$. Dann gibt es ein Kompaktum $K \subset G$, so dass alle f_i außerhalb von K verschwinden. Wir wählen $r < \varepsilon / \max_{i=1}^{N} \|f_i\|_1$. Dann ist für alle $\gamma \in N(K, r)$

$$|\widehat{f_i}(\gamma) - \widehat{f_i}(\gamma_e)| \le \int_G \underbrace{|\overline{\gamma(x)} - 1|}_{< r}\, |f_i(x)|\, dH(x) < \varepsilon$$

und damit $N(K, r) \subset V$.

(d) Es bleibt zu zeigen, dass $(\widehat{G}, \tau_{\widehat{G}})$ eine topologische Gruppe ist, also dass

$$\cdot : \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}, \quad (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \overline{\gamma_2}$$

stetig ist.

Dazu beachten wir: Sind $\gamma, \gamma' \in N(K, \frac{r}{2})$, so gelten

$|\gamma - 1| < \frac{r}{2}$ und $|\gamma' - 1| < \frac{r}{2}$, also $|\gamma\gamma' - 1| \leq \underbrace{|\gamma\gamma' - \gamma|}_{= |\gamma' - 1|} + |\gamma - 1| <$

Also ist $N(K, \frac{r}{2}) \cdot N(K, \frac{r}{2}) \subset N(K, r)$ und damit

$$\gamma_1 \cdot N(K, \tfrac{r}{2}) \cdot \overline{\gamma_2} \cdot N(K, \tfrac{r}{2}) = \gamma_1 \overline{\gamma_2} \cdot N(K, \tfrac{r}{2}) \cdot N(K, \tfrac{r}{2}) \subset \gamma_1 \overline{\gamma_2} \cdot N(K, r).$$

Wird eine Umgebung V von $\gamma_1 \overline{\gamma_2}$ vorgelegt, so finden wir also nach (c) ein kompaktes $K \subset G$ und ein $r > 0$, so dass

$$\gamma_1 \overline{\gamma_2} \cdot N(K, r) \subset V \text{ ist}$$

Nach (b) sind $\gamma_1 \cdot N(K, \frac{r}{2})$ und $\gamma_2 \cdot \underset{\text{invariant unter komplexer Konjugation!}}{\underline{N(K, \frac{r}{2})}}$ Umgebungen von γ_1 bzw. γ_2, so dass

$$: \quad \gamma_1 N(K, \tfrac{r}{2}) \times \gamma_2 N(K, \tfrac{r}{2}) \longrightarrow \gamma_1 \overline{\gamma_2} \cdot N(K, R) \qquad \square$$

abbildet.

Zum Abschluß dieses Abschnitts überlegen wir noch, dass für $G \cong \widehat{G} \cong \mathbb{R}$ die Gelfand-Topologie $\tau_{\widehat{G}}$ mit der Standardtopologie übereinstimmt. Beide sind translationsinvariant, also reicht es, die Übereinstimmung der Neutralumgebungen zu überprüfen. Dabei können wir uns auf $K = K_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$ beschränken $(R > 0)$. Nun gilt

$\gamma_\xi \in N(K_R, r) \iff |\gamma_\xi(x) - 1| < r \quad \forall x \in K_R \iff |e^{ix\xi} - 1| < r \ \forall x \in K_R$

$\iff 2(1 + \cos(x\xi)) < r^2 \quad \forall x \in K_R \iff |\sin(\frac{x\xi}{2})| < \frac{r}{2} \quad \forall |x| \leq R$

$\underset{r \ll 1}{\iff} \quad |x\xi| < 2 \arcsin(\frac{r}{2}) \quad \forall |x| \leq R \iff |\xi| < \frac{2}{R} \arcsin(\frac{r}{2})$

Also sind die Nullumgebungen in $\tau_{\widehat{G}}$ die offenen Intervalle um Null (und deren bel. Vereinigungen)

(Für $\mathbb{T} = G$ mit $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}$ zeigt dieselbe Überlegung $\tau_{\widehat{G}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, was wir aber ~~später~~ noch allgemeiner sehen können $\to$ Übungen).