1.2 Das Haar-Maß und die Faltung

1.2.1 Existenz und Eindeutigkeit, Beispiele

Def.: (G,τ) sei eine abelsche topologische Gruppe.

(i) Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(G)$ heißt translationsinvariant, falls $\mu(E+x)=\mu(E)$ $\forall E\in\mathcal{B}(G)$ $\forall x\in G$.

(ii) Ein translationsinvariantes äußeres Radon-Maß $H\neq 0$ auf $\mathcal{B}(G)$ heißt ein Haar-Maß.

Bem.: Falls (G,τ) lokal kompakt und σ-kompakt ist, ist H regulär.

Bez.: "Ein Maß auf $\mathcal{B}(G)$" werden wir abkürzen zu: "ein Maß auf G". Nicht vollkommen korrekt, aber unmißverständlich.

Existenzsatz für Haar-Maße: Auf jeder LCA-Gruppe G existiert ein Haar-Maß.

Der Beweis dieses Existenzsatzes ist trotz der umfangreichen Vorbereitungen zu lang für diese Vorlesung. Das wesentliche Argument können wir aber zumindest kurz angeben:

Man konstruiert ein positives, translationsinvariantes Funktional $I: C_c(G)\to\mathbb{C}$, d.h.

$I(f)\geq 0$ $\forall f\in C_c(G)$ mit $f\geq 0$

$I(\tau_y f)=I(f)$ $\forall f\in C_c(G), y\in G$, dabei $\tau_y f(x)=f(x-y)$.

Dann ergibt der Darstellungssatz von Riesz die Existenz eines äußeren Radon-Maßes $H:\mathcal{B}(G)\to[0,\infty]$, so dass $I(f)=\int_G f\,dH$ $\forall f\in C_c(G)$. Die Translationsinvarianz vererbt sich offenbar von I auf H.

Lemma 1 Sei H ein Haar-Maß auf einer LCA-Gruppe G.

Dann gelten:

(a) Ist $\emptyset \neq U \subset G$ offen, so ist $H(U) > 0$.

(b) Ist $f \in C(G) \cap L^1(G)$ mit $f \geq 0$ und $\int_G f \, dH = 0$, so gilt $f = 0$.

(Bem. zur Schreibweise: $L^p(G) = L^p(G, \mathcal{B}(G), H)$)

Bew.: (a) Sei $\emptyset \neq U \subset G$ offen mit $H(U) = 0$.

O.E. sei $0 \in U$ (sonst können wir U geeignet verschieben).

Ist dann $K \subset G$ kompakt, so gilt $K \subset \bigcup_{x \in K} U + x$, wg. der Kompaktheit bereits $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U + x_i$ für geeignete $x_i \in K$.

$$\Rightarrow H(K) \leq \sum_{i=1}^{N} H(U + x_i) \underset{\text{Translationsinvarianz}}{=} N\,H(U) = 0.$$

Also: $H(K) = 0 \quad \forall K \subset G$, K kompakt.

$\Rightarrow H(V) = 0 \quad \forall V \subset G$, V offen (wg. der inneren Regularität offener Mengen)

$\Rightarrow H(E) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{B}(G)$ (aufgrund der äußeren Regularität).

(b) Ist $f \neq 0$, so existiert $x_0 \in G$ mit $f(x_0) > 0$ und eine offene Umgebung U_{x_0} mit $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \;\forall x \in U_{x_0}$ (aufgrund der Stetigkeit von f). Damit folgt

$$\int f \, dH \geq \frac{1}{2} f(x_0) \cdot \int_{U_{x_0}} dH = \frac{1}{2} f(x_0) \, H(U_{x_0}) \underset{(a)}{>} 0.$$

Monotonie des Maßes bzw. des Integrals, gilt allgemein für Maße.

Satz 1 (Eindeutigkeit des Haar-Maßes) Es seien H und H' Haar-Maße auf einer LCA-Gruppe G. Dann ex. $c>0$, so dass $H' = c \cdot H$.

Bew.: Wir fassen H und H' als lineare Funktionale auf $C_c(G)$ auf. Dann reicht es also, für ein beliebiges $\varphi \in C_c(G)$ zu zeigen:

$$\int_G \varphi(x)\, dH'(x) = c \int_G \varphi(x)\, dH(x). \qquad (!)$$

Dazu wählen wir $g \in C_c(G)$ mit $\int_G g\, dH = 1$ und setzen $c = \int_G g(-x)\, dH'(x)$. Dann ergibt sich für $\varphi \in C_c(G)$:

$$\int_G \varphi(x)\, dH'(x) = \underbrace{\left(\int_G g(y)\, dH(y)\right)}_{=1}\left(\int_G \varphi(x)\, dH'(x)\right)$$

$$= \int_G g(y)\left(\int_G \varphi(x)\, dH'(x)\right) dH(y) \qquad \text{Linearität des } \int$$

$$= \int_G g(y)\left(\int_G \varphi(x+y)\, dH'(x)\right) dH(y) \qquad \text{Translationsinv.}$$

$$= \int_G\left(\int_G \varphi(x+y)\, g(y)\, dH(y)\right) dH'(x) \qquad \text{Fubini, wg. compact support ok.}$$

$$= \int_G\left(\int_G \varphi(y)\, g(y-x)\, dH(y)\right) dH'(x) \qquad \text{Translationsinvarianz}$$

$$= \int_G \varphi(y)\underbrace{\left(\int_G g(y-x)\, dH'(x)\right)}_{= \int_G g(-x)\, dH'(x) = c} dH(y) \qquad \text{Fubini; Translationsinvarianz ausdrücken.}$$

$$= c \int_G \varphi\, dH.$$ Also $H' = cH$, wie behauptet. $\square$

Vorläufige Bem. zur Normierung: Häufig wird die folgende Konvention benutzt:

(i) Wenn G diskret ist: $H(\{x\})=1 \quad \forall x \in G$,

(ii) Wenn G kompakt ist: $H(G)=1$.

Was sich für endliche Gruppen bereits ausschließt. Wir werden später eine Wahl treffen.

Folgerung (aus Satz 1): Jedes Haar-Maß auf einer LCA-Gruppe G ist "reflexionsinvariant", d.h. es gilt $H(E)=H(-E) \; \forall E \in \mathcal{B}(G)$

Bew.: Wir setzen $H'(E) := H(-E)$ für $E \in \mathcal{B}(G)$. Dann ist H' ebenfalls ein Haar-Maß auf G. Nach Satz 1 existiert ein $c>0$, so dass $H'=cH$. Nun wählen wir $E_0 \in \mathcal{B}(G)$ mit $H(E_0)>0$ (existiert, da $H \neq 0$) und setzen $E := E_0 \cup (-E_0)$. Dann ist $H(E) \geq H(E_0) > 0$ und $H(E)=H(-E)=H'(E)=cH(E)$. $\square$

Also $c=1$.

<u>Beispiele für Haar-Maße und -Integrale:</u>

(1) G diskret (d.h. $\tau = \mathcal{P}(G)$) $\Rightarrow H(E) = c\#E$, in diesem Fall ist das Haar-Maß ein Vielfaches des Zählmaßes. Für das Integral gilt: $\int f \, dH = \sum_{k \in G} f(k)$.

In den folgenden Beispielen seien die betrachteten top. Gruppen mit der jeweiligen Standardtopologie ausgestattet.

(2) Das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ (also $G=(\mathbb{R}^n,+)$) ist translationsinvariant und regulär, also bis auf einen positiven Faktor das Haar-Maß.

Begründung zur Regularität: In Analysis III wird üblicherweise 1.3. gezeigt:

Satz (Ana III): Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$:

(i) eine offene Menge $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subset U_\varepsilon$ und $\lambda^n(U_\varepsilon - E) < \varepsilon$,

(ii) eine abgeschlossene Menge $A_\varepsilon \subset E$ mit $\lambda^n(E - A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Aus (i) folgt $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) : E \subset U \in \tau\}$, also die äußere Regularität von λ^n. Um die innere Regularität einzusehen, wählen wir $K_{\frac{1}{\varepsilon}} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$. Dann sind $\forall\, \varepsilon > 0$ K_ε und $A_\varepsilon \cap K_{\frac{1}{\varepsilon}}$ (A_ε aus Teil (ii)) kompakt und damit $\lambda^n(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \lambda^n(A_\varepsilon \cap K_{\frac{1}{\varepsilon}}) = \ldots$

$= \sup\{\lambda^n(K) : K \subset E$ und K kompakt$\}$. $\square$.

(3) Auf dem eindimensionalen Torus $\mathbb{T}$ haben wir das Haar-Integral

$$\int_{\mathbb{T}} f(\underbrace{[x]}_{x+2\pi\mathbb{Z}})\, dH([x]) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f([x])\, dx.$$

Anwendung auf $f = \chi_E$ liefert das Haar-Maß. Rechts steht das Lebesgue-Maß auf $(-\pi, \pi)$, die Regularität ist damit klar. In der Praxis unterscheidet man nicht zwischen $f([x])$ und $f(x)$ und schreibt dann auch $\ldots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. Die Translationsinvarianz haben wir in der Übung diskutiert.

Mit dem nachfolgenden Lemma erhält man

als Haar-Integral auf dem n-dim. Torus

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\,dH(x) = (2\pi)^{-n} \int_{(-\pi,\pi)^n} f(x)\,dx ,$$

wobei rechts wieder das Lebesgue-Maß (auf dem Würfel $(-\pi,\pi)^n$) steht.

Lemma 2: Seien (G_i, τ_i) LCA-Gruppen mit Haar-Maßen H_i, $i \in \{1,2\}$, so ist das Haar-Maß auf $G = G_1 \times G_2$ durch das Produktmaß $H_1 \times H_2$ gegeben.

Bew.: (i) Translationsinvarianz: Das Produktmaß ist eindeutig festgelegt, wenn es auf den Rechteckmengen vorgegeben wird. Daher ist die TI nur für diese Mengen zu überprüfen:

$$H_1 \times H_2 (E_1 \times E_2 + (x_1,x_2)) = H_1 \times H_2 ((E_1+x_1)\times(E_2+x_2))$$

$$= H_1 (E_1+x_1)\, H_2 (E_2+x_2) \underset{\text{Translationsinvarianz der } H_i}{=} H_1 (E_1)\, H_2 (E_2) = H_1 \times H_2 (E_1 \times E_2)$$

(ii) Regularität: Um einzusehen, dass $H_1 \times H_2$ ein äußeres Radon-Maß ist, müssen wir die Konstruktion des Produktmaßes für äußere Radon-Maße etwas genauer anschauen, als wir dies bisher getan haben:

Gegeben seien zwei äußere Radon-Maße μ_1 auf $\mathcal{B}(X_1)$ und μ_2 auf $\mathcal{B}(X_2)$, sowie $X = X_1 \times X_2$.

lokal kompakte Hausdorff-Räume

zu $\varphi \in C_c(X)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_1 \times K_2$ (K_i kompakt)

definieren wir

$$I[\varphi] := \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \varphi(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$

Ist $K_1 \times K_2 \subset L_1 \times L_2$ mit (größeren) Kompakta L_i, so führt die Integration über $L_1 \times L_2$ zum selben Ergebnis, daher ist I auf $C_c(X)$ wohldefiniert. I ist ein positives lineares Funktional, also gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein eindeutig bestimmtes äußeres Radon-Maß $\mu_1 \times \mu_2$ auf $\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2)$ mit

$$I[\varphi] = \int_{X_1 \times X_2} \varphi(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2),$$

und dies ist das Produktmaß von μ_1 und μ_2 $\square$

Zwei weitere Beispiele zu multiplikativen Gruppen:

(4) Isomorph zu (3) haben wir für $G = (S^1, \cdot)$ das Haar-Integral

$$\int_{S^1} f(x)\, dH(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, dt$$

mit dem Lebesgue-Integral auf der rechten Seite.

Schließlich betrachten wir noch

(5) Die multiplikative Gruppe $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$. Hier bedeutet Translation

$$E \mapsto xE = \{\underbrace{xt}_{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}^+} : t \in E\}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Zur Bestimmung des Haar-Maßes beachten wir, dass

$$\exp : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^+,\cdot)$$

ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist. Einen Ansatz für das Haar-Maß $H_{\mathbb{R}^+}$ auf $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ finden wir mit der in der Maßtheorie gebräuchlichen Konstruktion des induzierten Maßes, allgemein:

Maßraum $\qquad\qquad\qquad\qquad$ meßbarer Raum

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{A},\mu) \arrow[rr, "f\ \mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}\text{-meßbar}", "\text{d.h. } f^{-1}(C)\in\mathcal{A}\ \forall C\in\mathcal{C}"'] \arrow[d, "\mu"] & & (Y,\mathcal{C}) \arrow[d, "\mu_f"] \\
{[0,\infty]} & & {[0,\infty]}
\end{tikzcd}$$

<u>Def.</u>: $\mu_f : \mathcal{C} \longrightarrow [0,\infty]$, def. durch $\mu_f(C) := \mu(f^{-1}(C))$

heißt <u>das von f auf $\mathcal{C}$ induzierte Maß.</u>

Hier also: H = Haar-Maß auf $(\mathbb{R},+) = c\cdot\lambda$

$$H_{\mathbb{R}^+}(E) \overset{?}{=} H_{\exp}(E) = H(\exp^{-1}(E)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\chi_{\exp^{-1}(E)}(x)}_{=1 \Leftrightarrow x\in\exp^{-1}(E) \Leftrightarrow \exp(x)\in E}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_E(\exp(x))\,dx =: (*)$$

Subst.: $t = \exp(x) \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = \exp(x) = t \rightsquigarrow$ "$\frac{dt}{t} = dx$", $t(\mathbb{R}) = (0,\infty)$

$\rightsquigarrow (*) = \int_0^\infty \chi_E(t)\,\frac{dt}{t}$, und tatsächlich ist mit

$H_{\mathbb{R}^+}[f] = \int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t}$ ein Haar-Integral auf $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ gegeben.

Wir überprüfen kurz die Translationsinvarianz: Für $c>0$

$$\underbrace{\int_0^\infty \chi_{c\cdot E}(t)\,\frac{dt}{t}}_{= H_{\mathbb{R}^+}(c\cdot E)} = \int_0^\infty \chi_E\left(\frac{t}{c}\right)\frac{dt}{t} \overset{\text{Subst.: } s=\frac{t}{c}}{\underset{\Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{ds}{s}}{=}} \underbrace{\int_0^\infty \chi_E(s)\,\frac{ds}{s}}_{= H_{\mathbb{R}^+}(E)}$$

(In den Übungen werden wir sehen, dass diese Vorgehensweise stets ein Haar-Maß liefert.)

1.2.2 Translationen in $L^P(G)$ $(:= L^P(G, \mathcal{B}(G), H))$

Def.: Für $f: G \to \mathbb{C}$ und $y \in G$ definieren wir die Translationen $\tau_y f(x) := f(x-y) \quad \forall x \in G.$

Warum $-y$? Dies wird klar, wenn wir charakteristische Funktionen χ_E anstelle von f betrachten. Hierfür ist

$$\tau_y \chi_E(x) = \chi_E(x-y) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } x-y \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \text{für } x \in E+y \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} = \chi_{E+y}(x).$$

Bei festem y ist $\tau_y: L^P(G) \to L^P(G)$ linear und wegen der Translationsinvarianz des Haar-Maßes isometrisch, d.h. wir haben $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$. Ferner ist τ_y bijektiv mit Inverser τ_{-y}.

Halten wir hingegen $f \in L^P(G)$ fest und betrachten die Abbildung $\quad G \to L^P(G), \quad y \mapsto \tau_y f, \quad$ (*)

so ist deren Stetigkeit weniger leicht einzusehen. Es gilt:

Satz 2: Sei G eine LCA-Gruppe und $1 \le p < \infty$. Dann ist die Abbildung (*) gleichmäßig stetig.

Zur Vorbereitung des Beweises benötigen wir das folgende

Lemma 3: Ist (X, τ) ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum und μ ein äußeres Radon-Maß auf $\mathcal{B}(X)$, so ist für $1 \le p < \infty$ $C_c(X)$ dicht in $L^P(\mu)$.

Bew.: (1) Aufgrund der Konstruktion des Integrals nach einem Maß liegen die Treppenfktn. $t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}$ mit $\mu(E_i) < \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$ dicht in $L^P(\mu)$. Es reicht daher zu zeigen, dass sich charakteristische Funktionen χ_E für E aus $\mathcal{B}(X)$ mit $\mu(E)<\infty$ in $L^p(\mu)$ durch $C_c(X)$-Funktionen approximieren lassen. Da μ ein äußeres Radon-Maß ist, gelten

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E\subset U\in\tau\}$$

und, für alle $U\in\tau$:

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K\subset U,\ K \text{ kompakt}\},$$

so dass wir E als kompakt annehmen können. Ist nun $\varepsilon>0$ vorgegeben, finden wir $U\in\tau$ mit $E\subset U$ und $\mu(U)<\mu(E)+\varepsilon^p$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert $V\in\tau$, so dass

$E\subset V\subset \overline{V}\subset U$ mit $\overline{V}$ kompakt, so dass $\mu(\overline{V})<\mu(E)+\varepsilon^p$,

und eine stetige Funktion $\varphi : X\to[0,1]$, für die gilt

$$\varphi(x)=1 \quad \forall x\in E \qquad \text{und} \qquad \varphi(x)=0 \quad \forall x\in V^c.$$

Hierfür ist dann $\|\varphi-\chi_E\|_p<\varepsilon$. □

Bew. (von Satz 2): Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben, $f\in L^p(G)$. Dann existiert ein $g\in C_c(G)$ mit $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{3}$ und daher auch $\|\tau_y f-\tau_y g\|_p = \|\tau_y(f-g)\|_p<\varepsilon/3$. Sei $K=\operatorname{supp}(g)$. Da g gleichmäßig stetig ist, existiert eine Neutral- bzw. Nullumgebung V, so dass $\sup_{x\in G}|\tau_y g(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}H(K)^{-\frac{1}{p}}\ \forall y\in V.$

Hieraus folgt $\|\tau_y g-g\|_p\le H(K)^{\frac{1}{p}}\|\tau_y g-g\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall y\in V$

und weiter $\|\tau_y f-f\|_p\le\|\tau_y f-\tau_y g\|_p+\|\tau_y g-g\|_p+\|g-f\|_p<\varepsilon$. □

$\forall y\in V$. Damit: $\|\tau_y f-\tau_x f\|_p<\varepsilon\ \ \forall x,y$ mit $x-y\in V$.

1.2.3 Faltung

Def. Es seien G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H und $f, g : G \to \mathbb{C}$ $\mathcal{B}(G)$-meßbar, so dass das Integral

$$\int_G |f(x-y)g(y)|\, dH(y) \qquad (*)$$

existiert. Dann heißt

$$f*g(x) := \int_G f(x-y)g(y)\, dH(y)$$

die Faltung von f und g in $x \in G$.

Je nach Gruppe und Haar-Maß kann die Faltung verschiedene Gestalt annehmen, daher einige Beispiele. Dabei sei stets die Existenz der auftretenden Integrale angenommen.

Bsp.: (1) $G = (\mathbb{Z}, +)$, H sei das Zählmaß. Funktionen f und g auf G sind dann Folgen $f = (f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ und $g = (g(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Die Faltung von f und g ist dann

$$f*g(k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(k-l)g(l) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Entsprechend für $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$, in diesem Fall ist die unendliche Reihe eine n-fache unendliche Reihe.

Sind $f(k) = g(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$, so reduziert sich das "Faltungsintegral" auf die endliche Summe

$$f*g(k) = \sum_{l=0}^{k} f(k-l)g(l)$$

Nennen wir $f(k) = a_k$, $g(k) = b_k$, so ist dies

$$\ldots = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l =: c_k ,$$

und die c_k sind gerade die Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, die man bestimmt, wenn man das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ausrechnet.

(2) $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $H = \lambda^n$ (das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$).

In diesem Fall ist

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, d\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy,$$

letztres die wesentlich übliche Schreibweise.

(3) $G = (\mathbb{T}^n, +)$. Fassen wir Funktionen f und g als in jeder Komponente 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ auf, so ergibt sich für deren Faltung

$$f * g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{(-\pi,\pi)^n} f(x-y) g(y) \, dy,$$

das Integral ist das Lebesgue-Integral auf dem Würfel $(-\pi, \pi)^n$.

(4) $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$, $\int_G f \, dH = \int_0^\infty f(x) \frac{dx}{x}$. Damit ergibt sich für die Faltung

$$f * g(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \frac{dy}{y},$$

$\int_0^\infty \ldots dy$ ist wieder das Lebesgue-Integral, hier auf $(0, \infty)$.

Wichtige Eigenschaften der Faltung sind im nächsten Satz zusammengefasst:

Satz 3: Auf jeder LCA-Gruppe G gelten:

(a) Ist $(*)$ $<\infty$ für ein $x \in G$ erfüllt, so ist $f*g(x) = g*f(x)$.
(Die Faltung ist also kommutativ.)

(b) Ist $f \in L^1(G)$ und $g \in L^\infty(G)$, so ist $f*g$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Ferner gilt $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(c) Sind $f, g \in C_c(G)$ mit $\mathrm{supp}(f) = K_f$ und $\mathrm{supp}(g) = K_g$, so ist auch $f*g \in C_c(G)$ und $\mathrm{supp}(f*g) \subset K_f + K_g$.

(d) Sind $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f \in L^p(G)$ und $g \in L^{p'}(G)$, so ist $f*g \in C_0(G)$, und es gilt $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

(e) Sind $f, g \in L^1(G)$, so ~~gilt~~ existiert $(*)$ für H-fast alle $x \in G$ und es gilt die Ungleichung $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, letztres mit Gleichheit, falls $f, g \geq 0$ sind.

(f) Sind $f, g, h \in L^1(G)$, so ist $(f*g)*h = f*(g*h)$.
(Auf $L^1(G)$ ist die Faltung assoziativ.)

Bew.: (a)
$$f*g(x) = \int_G f(x-y)\, g(y)\, dH(y) \qquad \text{Translation } y \rightsquigarrow y+x$$
$$= \int_G f(-y)\, g(x+y)\, dH(y) \qquad \text{Reflexion } y \rightsquigarrow -y$$
$$= \int_G g(x-y)\, f(y)\, dH(y) = g*f(x)$$

(Bem.: Bei derartigen Rechnungen ist eine gewisse Vorsicht geboten, da die Transformationsformel nicht zur Verfügung steht!)

(b)
$$|f*g(x)| = \left| \int_G f(x-y)\, g(y)\, dH(y) \right| \leq \int_G |f(x-y)\, g(y)|\, dH(y)$$
$$\leq \|g\|_\infty \cdot \int_G |f(x-y)|\, dH(y) = \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

Das zeigt die Beschränktheit von $f*g$ und die behauptete Ungleichung. Weiter haben wir

$$|f*g(x)-f*g(z)| = \Big|\int_G (f(x-y)-f(z-y))\,g(y)\,dH(y)\Big|$$

$$\le \int_G |f(y-x)-f(y-z)|\,|g(-y)|\,dH(y) \le \|g\|_\infty \,\|\tau_x f-\tau_y f\|_1$$

Nach Satz 2 existiert zu $\varepsilon>0$ eine Neutralumgebung V, so dass für alle $x,y\in V$: $\|\tau_x f-\tau_y f\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}$ und damit $|f*g(x)-f*g(z)|<\varepsilon$. Das ist die glm. Stetigkeit.

(c) Seien $f,g\in C_c(G)$ mit Trägern wie angegeben und $x\in(K_f+K_g)^c$. Dann ist

$$f*g(x) = \int_{K_g} f(\underbrace{x-y}_{\notin K_f})\,g(y)\,dH(y) = 0.$$

$\Rightarrow \{x\in G : f*g(x)\neq 0\}\subset K_f+K_g$. Da K_f+K_g kompakt und also abgeschlossen ist, folgt $\operatorname{supp} f*g\subset K_f+K_g$.

(d) $f\in L^p(G)$ und $g\in L^{p'}(G)$ ergibt mit Hölder

$$|f*g(x)| \le \int_G |f(x-y)|\,|g(y)|\,dH(y) \le \|f\|_p\,\|g\|_{p'},$$

also $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p\,\|g\|_{p'}$

Nun wählen wir Folgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ in $C_c(G)$ mit $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p = \lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|_{p'}=0$ (Lemma 3!)

Nach (c) ist dann auch $f_n*g_n\in C_c(G)$ und es gilt

$$\|f*g-f_n*g_n\|_\infty \le \|(f-f_n)*g\|_\infty + \|f_n*(g-g_n)\|_\infty$$

$$\le \|f-f_n\|_p\,\|g\|_{p'} + \underbrace{\|f_n\|_p}_{\le C}\,\|g_n-g\|_{p'} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D.h. wir haben $\lim_{n\to\infty} f_n*g_n = f*g$ mit gleichmäßiger Konvergenz. Da $(C_0(G),\|\ \|_\infty)$ vollständig ist, folgt $f*g\in C_0(G)$.

(e) Nach Voraussetzung sind $f, g \in L^1(G)$. Zunächst müssen wir überlegen, dass die Abbildung

$$h : G \times G \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto f(x-y) \cdot g(y)$$

$\mathcal{B}(G \times G)$-meßbar ist. Dazu schreiben wir $\tilde{f} = f \circ \pi$ mit

$$\tilde{f} : G \times G \to \mathbb{C}, \quad (x,y) \mapsto f(x-y), \text{ also}$$

$$\pi : G \times G \to G \quad (x,y) \mapsto x-y.$$

$\tilde{f}$ ist dann die Verknüpfung der meßbaren Funktion f mit der stetigen linearen Funktion π und also meßbar. Ebenso sieht man: $\tilde{g} : (x,y) \mapsto g(y)$ ist meßbar. Da ein Produkt meßbarer Funktionen ebenfalls meßbar ist, folgt diese Eigenschaft für h.

Weiter gilt nach Fubini-Tonelli

$$\int_{G \times G} |f(x-y)\,g(y)|\,dH(x)\,dH(y) = \int_G \int_G |f(x-y)|\,dH(x)\,|g(y)|\,dH(y)$$

$$\overset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \|f\|_1 \, \|g\|_1 .$$

Das zeigt: $h \in L^1(G \times G)$ und $f * g(x)$ existiert für H-fast alle $x \in G$. Dreiecksungleichung und Fubini-Tonelli ergeben $\left| \int_G f*g(x)\,dH(x) \right|$

$$\leq \int_G |f*g(x)|\,dH(x) \leq \int_G \int_G |f(x-y)|\,dH(x)\,|g(y)|\,dH(y)$$

$$= \|f\|_1 \, \|g_1\|$$

wobei für $f, g \geq 0$ überall Gleichheit gilt.

(f) Die Assoziativität der Faltung in $L^1(G)$ ergibt sich ebenfalls mit Hilfe des Satzes von Fubini, dessen Anwendung wir in (e) gerechtfertigt haben. Genauer:

$$f*(g*h)(x) = \int_G f(x-z)\, g*h(z)\, dH(z) \qquad \text{Def.}$$

$$= \int_G f(x-z) \int_G g(z-y)\, h(y)\, dH(y)\, dH(z) \qquad \text{Def.}$$

$$\rightarrow = \int_G \underbrace{\int_G f(x-z)\, g(\underbrace{z-y}_{z'})\, dH(z)}\; h(y)\, dH(y) \qquad \text{Fubini}$$

$$\overset{TI}{=} \int_G f(x-y-z')\, g(z')\, dH(z') = f*g(x-y)$$

also

$$\ldots = \int_G f*g(x-y)\cdot h(y)\, dH(y) = (f*g)*h(x). \quad \square$$

Bem. zu "$\rightarrow$": Dort haben wir nachgerechnet, dass

$$f*\tau_y g(x) = f*g(x-y) = \tau_y(f*g)(x)$$

bzw. ohne Argument x: $f*\tau_y g = \tau_y(f*g)$.

Betrachten wir für festes f die lineare Abbildung $T_f: g \mapsto T_f g := f*g$, so bedeutet dies: $T_f \circ \tau_y = \tau_y \circ T_f$. D.h. jeder Faltungsoperator dieses Typs kommutiert (vertauscht) mit allen Translationen, vgl. Problem 4. Faltungsoperatoren dieses Typs treten häufig auf bei der Lösung von Rand- und Anfangswertproblemen für partielle Dgln.

Folgerung: Für jede LCA-Gruppe G ist $(L^1(G), +, *)$ eine kommutative Banachalgebra. Ist G diskret, besitzt $L^1(G)$ ein Einselement.

Bew. Ist eine komm. B-Algebra:
- Kommutativität von $*$: Satz 3, (a);
- Assoziativität " $*$: Satz 3, (f),
- Distributivgesetz $f*(g+h) = f*g + f*h$ und die Gleichung $(\lambda f)*g = \lambda(f*g) = f*(\lambda g)$ folgen aus der Linearität des Integrals;
- $*: L^1(G)\times L^1(G) \to L^1(G)$ und die Submultiplikativität der Norm: Satz 3, (e)
- Vollständigkeit: Satz von Fischer-Riesz

Zusatz:
- Ist G diskret, so gilt $H(\{e\}) > 0$ (e das neutrale Element von G) und wir können $H(\{e\}) = 1$ annehmen. Setzen wir $\delta_e(x) = \chi_{\{e\}}(x)$ (ist tatsächlich das Kronecker-δ, da G diskret ist), so folgt $\delta_e * f(x) = \int f(x-y)\chi_{\{e\}}(y)\,dH(y)$
$$= \sum_{x\in G} f(x-y)\,\delta_e(y) = f(x-e) = f(x)$$
(weil: $e=0$, wenn man die Gruppe additiv schreibt.)

Ist G nicht diskret, so besitzt $L^1(G)$ keine Einheit. Das werden wir bald sehen, indem wir $L^1(G)$ in $M(G)$ (= komplexe Radonmaße) einbetten, wo wir ein eindeutig bestimmtes Einselement finden, das nicht zu $L^1(G)$ gehört.

Was es hingegen stets gibt, sind <u>approximative Einheiten</u>, die für die Analysis oft interessanter sind, als echte Einselemente

(Vorbereitende) <u>Def.</u>: Eine (Index-) Menge I heißt <u>gerichtet</u>, wenn eine Teilordnung "$\leq$" auf I existiert, so dass es zu $i_1, i_2 \in I$ stets ein $j \in I$ gibt mit $i_1 \leq j$ und $i_2 \leq j$. Ist dies der Fall, schreiben wir $\lim_{i \in I} x_i = x$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, i_0 = i_0(\varepsilon) \in I, \text{ so dass } \forall i \geq i_0 : |x_i - x| < \varepsilon .$$

(Dies ist entsprechend zu verallgemeinern, wenn x und die x_i zu einem metrischen Raum gehören.)

<u>Bsp.</u>: (i) $\underbrace{(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{R}, \leq)}_{\text{gerichtet nach } \infty}$; $\underbrace{((\xi_0, \infty), \geq)}_{\text{gerichtet nach } \xi_0}$ u.ä., total geordnet;

(ii) (X, τ) ein lokal kompakter top. Raum mit $x_0 \in X$ und $I = \{U \subset X : x_0 \in \mathring{U}\}$, mit $\supset$ als Teilordnung, also $A \leq B$, wenn $A \supset B$. Gerichtet auf $\{x_0\}$ in dem Sinne, dass $\bigcap_{U \in I} U = \{x_0\}$.

<u>Def.</u>: Sei G eine LCA-Gruppe mit Haar-Maß H und I eine gerichtete Indexmenge. Eine Familie $(k_i)_{i \in I}$ in $L^1(G)$ heißt eine <u>approximative Einheit</u>(**) auf G, falls gilt:

(i) Für alle $i \in I$ ist $\int_G k_i(x)\, dH(x) = 1$;

(ii) Es gibt ein $M \geq 0$, so dass für alle $i \in I$ gilt

$$\int_G |k_i(x)|\, dH(x) \leq M$$

(iii) Für alle Neutralumgebungen(*) $V \subset G$ ist

$$\lim_{i \in I} \int_{G \setminus V} |k_i(x)|\, dH(x) = 0 .$$

(*) = Umgebungen des neutralen Elements von G

(**) Manchmal auch: Dirac-Schar, oder, falls $I = \mathbb{N}$: Dirac-Folge; engl.: "good kernel"

<u>Bem.</u>: (1) Bed. (iii) lautet ausführlich: $\forall \varepsilon > 0$ und $\forall$ Neutralumgebungen $V \subset G$ $\exists\, i_0 = i_0(\varepsilon, V)$ $\forall i \geq i_0$ gilt

$$\int_{G\setminus V} |k_i(x)|\, dH(x) < \varepsilon .$$

(2) Ist $I = (\mathbb{N}, \leq)$, schreiben wir in (iii) wie üblich $\lim_{i\to\infty}$. Entsprechend $\lim_{i\to j_0}$, falls $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, dabei ist $j_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ möglich.

(3) Sind alle $k_i \geq 0$, so ist (ii) mit (i) bereits erfüllt.

<u>Lemma</u> 4: Auf jeder LCA-Gruppe G gibt es eine approximative Einheit $(k_i)_{i\in I}$, bestehend aus stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

<u>Bew.</u>: Als Indexmenge wählen wir $I = \{U \in \mathcal{T} : e \in U\}$. Da $\{e\}$ kompakt ist, existieren nach dem Lemma von Urysohn Funktionen $f_U \in C_c(G)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $f_U(e) = 1$, • $0 \leq f_U(x) \leq 1$ $\forall x \in G$, • $\operatorname{supp}(f_U) \subset U$.

Nach Lemma 1 ist $\int_G f_U(x)\, dH(x) =: C_U > 0$ und wir definieren $k_U := \frac{1}{C_U} \cdot f_U$, so dass (i) und (ii) erfüllt sind. Ist V eine beliebige Neutralumgebung, so gilt für jedes $U \subset \mathring{V}$, dass

$$\int_{G\setminus V} k_U(x)\, dH(x) = 0,$$

und damit ist auch (iii) erfüllt. $\square$

(1) Verzichtet man auf die Stetigkeit der k_n, kann man in der Konstruktion im Bew. von Lemma 4 auch die charakteristischen Funktionen einer Umgebungsbasis von e verwenden. Wenn G mit einer Metrik ausgestattet ist, kann man z.B.

$$k_\varepsilon := \frac{1}{H(B_\varepsilon(e))} \cdot \chi_{B_\varepsilon(e)} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{k}_n := k_{\frac{1}{n}}$$

wählen.

(2) Approximative Einheiten auf $\mathbb{R}^n$: Sei $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $c_k := \int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx \neq 0$, so setzt man

$$k_1(x) := \frac{1}{c_k} k(x) \quad \text{und} \quad k_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} k_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon > 0,$$

um eine approximative Einheit zu erhalten. In der Tat ist aufgrund der Transformationsformel (mit $y = \frac{x}{\varepsilon}$, so dass symbolisch "$dx = \varepsilon^n dy$")

- $\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)dx = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} k_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} k_1(y)dy = 1,$

- $\int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(x)|dx = \ldots = \int_{\mathbb{R}^n} |k_1(y)|\,dy = \|k_1\|_1 =: M$ und

- $\int_{|x|>\delta} |k_\varepsilon(x)|dx = \ldots = \int_{|x|>\frac{\delta}{\varepsilon}} |k_1(y)|dy \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0).$

Die Wahl der Funktion k kann dann problemangepasst erfolgen, vorteilhaft ist die Wahl unendlich oft differenzierbarer, schnell fallender Funktionen, denn die Regularität bleibt bei der Faltung mit L^1-Funktionen erhalten. Konkret:

$$(i)\quad k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} , & |x|<1 \\ 0 , & |x|\geq 1 \end{cases}$$

Dies ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $\mathrm{supp}(k) = \overline{B_1(0)}$, also mit kompaktem Träger, kurz: $k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass auch $k_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)\ \forall \varepsilon > 0$. Diese Funktionenfamilie wird als "Friedrich's mollifier" bezeichnet. (Mollifier = Glätter, Glättungsfunktion)

(ii) $k(x) = e^{-|x|^2/2}$ (Gaussfunktion). Die daraus gewonnene approx. Einheit hat Anwendungen

(a) in der Wahrscheinlichkeitstheorie, da k die Dichte (bis auf Normierung) der Normalverteilung ist,

(b) bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t)$. Wählt man in der Skalierung oben (Übergang $k_1 \rightsquigarrow k_\varepsilon$) nämlich $\varepsilon = \sqrt{2t}$, erhält man eine Lösung dieser Gleichung. Bei Faltung mit einer lediglich meßbaren und beschränkten Funktion bleibt diese Eigenschaft erhalten, was es erlaubt, das Cauchy Problem $u(x,0) = u_0(x)$ für vorgegebenes $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu lösen.

(iii) $k(x) = (1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$. $(k_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ heißt "Poisson-Kern für den oberen Halbraum". Geeignet zur Lösung des Dirichlet-Problems: $u(x,0) = u_0(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, u_0 vorgegeben) für die Laplace-Gleichung $\Delta u(x,x_n) = 0$. Hierbei $\Delta = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

(3) Eine ähnliche Konstruktion wie in (2) ist auch für 1.50 die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ möglich. → Übungen.

(4) Sind G_1 und G_2 LCA-Gruppen und $(k_i^{(1)})_{i\in I}$ sowie $(k_j^{(2)})_{j\in J}$ approximative Einheiten auf G_1 bzw. G_2, so ist mit $k_{(i,j)}(x) := k_i^{(1)}(x_1)\cdot k_j^{(2)}(x_2)$ eine approximative Einheit $(k_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$ auf $G := G_1\times G_2$ gegeben. Dies ergibt sich aus wiederholter Anwendung des Satzes von Fubini.

Diese Konstruktion ist auch auf endlich viele Faktoren anwendbar und liefert sofort approx. Einheiten z.B. für $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{T}^n$, wenn man mit solchen auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{T}$ startet.

(5) Es sei $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ und es gebe ein $\varepsilon>0$ sowie ein $c>0$, so dass $|f(x)|\le c\langle x\rangle^{-n-\varepsilon}$, dabei $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$. Für $x\in[-\pi,\pi]^n$ und $k\in\mathbb{Z}^n$ ist dann

$$|f(x+2\pi k)| \lesssim \langle x+2\pi k\rangle^{-n-\varepsilon} \lesssim \langle k\rangle^{-n-\varepsilon}$$

und wir haben

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{-n-\varepsilon} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^{-n-\varepsilon}\,dx < \infty$$

Also konvergiert nach Weierstraß

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi k) =: F(x)$$

absolut und gleichmäßig gegen eine in jeder Koordinatenrichtung 2π-periodische Funktion F.

Es gilt dann $F \in L^1(\mathbb{T}^n)$, denn

$$\int_{\mathbb{T}^n} F(x) \underbrace{dx}_{=c\,d\,H(x)} = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+2\pi k)\,dx$$

$$\underset{\text{glm. konverg.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x+2\pi k)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n+2\pi k} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

desgl. mit $\le$ für $|f|$ und $|F|$. Ist nun $(k_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine approximative Einheit und $K_\varepsilon(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} k_\varepsilon(x+2\pi k)$ die oben besprochene Periodisierung, so gelten (bis auf evtl. Normierung!)

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x)\,dx = 1$$

$$\int_{\mathbb{T}^n} |K_\varepsilon(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(x)|\,dx \le M \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\delta(0)} |K_\varepsilon(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(0)} |k_\varepsilon(x)|\,dx \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0) \quad \forall \delta > 0.$$

D.h.: Durch die oben angegebene Periodisierung kann man aus hinreichend schnell fallenden approximativen Einheiten auf $\mathbb{R}^n$ solche auf $\mathbb{T}^n$ gewinnen.(*)

(6) Zwei spezielle Faltungskerne im Zusammenhang mit Fourierreihen: Die Partialsummen $S_N f(x)$ einer Fourierreihe können als Faltung geschrieben werden:

$$S_N f(x) = \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{|k|\le N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky}\,dy\, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cdot \sum_{|k|\le N} e^{ik(x-y)} = \underbrace{f * D_N(x)}_{\text{Faltung in } L^1(\mathbb{T})}$$

mit dem sogenannten "Dirichlet-Kern"

(*) Anwendung: Wärmeleitung in einem Ring (etwa: einem kreisförmig gebogenen Metalldraht). Der Gauss-Kern erfüllt offensichtlich die Bed. $\lesssim \langle x\rangle^{-n-\varepsilon}$!

$D_N(x) = \sum_{|k|\le N} e^{ikx}$. Hierfür gelten die Darstellung

$$D_N(x) = \begin{cases} 2N+1, & \text{falls } x\in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin((2N+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{falls } x\notin 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

die Gleichung $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$, aber auch

$$\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \sim \ln(N) \qquad (N\to\infty). \qquad \text{(Übung)}$$

Letzteres zeigt, dass die definierende Eigenschaft (ii) einer approximativen Einheit "knapp verfehlt" wird. Hierin kann man auf einer etwas tieferen analytischen Ebene den Grund dafür sehen, dass die Frage der Konvergenz von Fourierreihen so kompliziert zu behandeln ist.

Diesen Mangel des Dirichlet-Kerns kann man ausgleichen durch die Bildung von Mittelwerten, am einfachsten durch die Bildung arithmetischer Mittelwerte, die(*) auch als Cesàro-Mittel bezeichnet werden. Man setzt

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n * f =: F_N * f(x)$$

und den Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$. Auch hierfür gibt es eine geschlossene Darstellung. Für $x\in 2\pi\mathbb{Z}$ ist $F_N(x)=N$, sonst gilt

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

Der Fejér-Kern bildet tatsächlich eine approximative Einheit, was wir ebenfalls in den Übungen besprechen.

(*) in diesem Zusammenhang

Satz 4: Sei G eine LCA-Gruppe und $(k_i)_{i\in I}$ eine approximative Einheit auf G. Dann gelten:

(a) Ist f beschränkt und

(i) gleichmäßig stetig auf G, so gilt

$$\lim_{i\in I} \sup_{x\in G} |k_i * f(x) - f(x)| = 0,$$

d.h. $k_i * f$ konvergiert gleichm. auf G gegen f;

(ii) stetig in $x \in G$, so ist $\lim_{i\in I} k_i * f(x) = f(x)$;

(iii) stetig auf einer offenen Teilmenge $U \subset G$ und $K \subset U$ kompakt, so gilt

$$\lim_{i\in I} \sup_{x\in K} |k_i * f(x) - f(x)| = 0.$$

(b) Ist $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(G)$, so gilt

$$\lim_{i\in I} \| k_i * f - f \|_p = 0.$$

Bew.: Zu (a), (i): Sei $V \subset G$ eine Neutralumgebung. Dann ist

$$|k_i * f(x) - f(x)| = \left| \int_G f(x-y)\, k_i(y)\, dH(y) - f(x) \right|$$

Eigenschaft (i) einer approx. Einheit

$$= \left| \int_G (f(x-y) - f(y))\, k_i(y)\, dH(y) \right|$$

ΔS-Ungl. + Add. des Integrals

$$\leq \int_{G\setminus V} + \int_V |f(x-y) - f(x)|\, |k_i(y)|\, dH(y) = I + II$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und M die Schranke aus Eigenschaft (ii) der approx. Einheit. Dann gibt es aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f eine Nullumgebung V (abhängig von ε aber nicht von x), so dass

$$|f(x-y)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall x \in G,\ y \in V.$$

Dann ist

$$II \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_V |k_i(y)|\,dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen $i_0 = i_0(\varepsilon, V) \in I$, so dass $\forall i \in I,\ i \geq i_0$

$$\int_{G\setminus V} |k_i(y)|\,dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}.$$

Dann ist

$$I \leq 2\|f\|_\infty \cdot \int_{G\setminus V} |k_i(y)|\,dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$|f(x) - k_i * f(x)| \leq \varepsilon$$

$\forall i \in I$ mit $i \geq i_0$, wobei i_0 unabhängig von x ist,

d.h. $\lim\limits_{i\in I} \sup\limits_{x\in G} |k_i * f(x) - f(x)| = 0$, wie behauptet.

(ii), das ist die punktweise Konvergenz in einem Stetigkeitspunkt $x \in G$ zeigt man genauso, wobei dann allerdings die Nullumgebung V und damit der Index i_0 von diesem Punkt $x \in G$ abhängen.

zu (iii) Hier ist vorausgesetzt, dass f auf einer offenen 1.5 Teilmenge $U \subset G$ stetig ist, und behauptet wird die glm. Konvergenz $k_i * f \to f$ auf einem beliebigen Kompaktum $K \subset U$. Seien also U und K fixiert.

Nach dem Lemma von Urysohn gibt es ein weiteres Kompaktum L mit

$$K \subset \overset{\circ}{L} \subset L \subset U$$

und eine Funktion $\varphi \in C_c(G)$, für die gilt

- $0 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in G$
- $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in K$ und $\varphi(x) = 0 \ \forall x \in (\overset{\circ}{L})^c$.

Nun ist φ gleichmäßig stetig, also existiert eine Neutralumgebung $V_0 \subset G$, so dass

$$\varphi(x+y) > \frac{1}{2} \quad \forall x \in K, y \in V_0,$$

was bedeutet, dass $K + V_0 \subset \overset{\circ}{L}$ ist.

Jetzt sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da f auf L glm. stetig ist, existiert eine weitere Neutralumgebung $V_1 = V_1(\varepsilon)$, so dass für alle $x \in K$ und $y \in V_1$ mit $x+y \in L$ gilt: $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ (M aus Bed. (ii) der Def.)

Wir setzen $V_\varepsilon := V_0 \cap V_1(\varepsilon)$. Dann gilt für alle $x \in K$ und $y \in V_\varepsilon$, dass $x-y \in L$ und damit

$$|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad , \text{ so dass}$$

$$\int_{V_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)|\, |k_i(y)|\, dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Wie in (i) wählen wir $i_0 = i_0(\varepsilon, V_\varepsilon)$, so dass $\forall i \geq i_0$ gilt

$$\int_{G\setminus V_\varepsilon} |k_i(y)|\, dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$$

und haben damit

$$\int_{G\setminus V_\varepsilon} |f(x-y)-f(x)|\, |k_i(y)|\, dH(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammenfassung: $\sup_{x\in K} |k_i * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall i \geq i_0.$

(b) Mit der Minkowski-Ungleichung für Integrale erhalten wir

$$\|k_i * f - f\|_p = \left\| \int_G k_i(y)(\tau_y f - f)\, dH(y) \right\|_{L^p_x}$$

$$\leq \int_G |k_i(y)|\, \|\tau_y f - f\|_{L^p_x}\, dH(y)$$

Nun ist bei festem f die Abb.: $G \to L^p(G)$, $y \mapsto \tau_y f$ nach Satz 2 gleichmäßig stetig, also insbes. stetig in e. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir also eine Neutralumgebung V_ε mit $\|\tau_y f - f\|_{L^p_x} < \frac{\varepsilon}{2M}$ $\forall y \in V_\varepsilon$, so dass

$$\int_{V_\varepsilon} |k_i(y)|\, \|\tau_y f - f\|_{L^p_x}\, dH(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun wählen wir weiter $i_0 = i_0(\varepsilon, V_\varepsilon)$, so dass $\forall i \geq i_0$

$$\int_{G\setminus V_\varepsilon} |k_i(y)|\, dH(y) < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_p}.$$

Dann ergibt sich für alle $i \geq i_0(\varepsilon, V_\varepsilon)$

$$\|k_i * f - f\|_p \leq \varepsilon$$

und damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Folgerung zum Thema Fourierreihen:

Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ sei $\sigma_N f = F_N * f$ mit dem Fejér-Kern $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$,

die gegeben ist durch $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \ldots$

$\ldots = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|k| \leq N} e^{ikx}$. In den Übungen werden wir

zeigen, dass $(F_N)_{N \in \mathbb{N}}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}$ ist.

Dann gelten:

- Ist $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{T})$: $\lim_{N \to \infty} \| \sigma_N f - f \|_p = 0$.
- Ist $f \in C(\mathbb{T})$: $\lim_{N \to \infty} \| \sigma_N f - f \|_\infty = 0$

Da $\sigma_N f$ ein trigonometrisches Polynom ist, gilt insbes.:

Satz von Weierstraß für periodische Funktionen: Jede stetige, 2π-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ läßt sich gleichmäßig durch trigonometrische Funktionen approximieren.

(Dies ist ein spezieller Fall des Satzes von Stone-Weierstraß, s. Abschnitt 1.1.1).