Kap 1: Fourier-Analysis auf lokal-kompakten Abelschen (LCA) Gruppen. (Grundlagen)

1.1 Vorbereitungen

1.1.1 Topologische Räume

Def.: Es sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine Topologie auf X, falls gilt

(T1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$,

(T2) $U_i \in \tau \ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ (I bel. Indexmenge),

(T3) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.

Ein Paar (X, τ), bestehend aus einer Menge X und einer Topologie τ, wird als topologischer Raum bezeichnet. Die Elemente von τ heißen offen, ihre Komplemente abgeschlossen.

Bsp.: $\tau = \{\emptyset, X\}$, metrische Räume, darunter $\tau = \mathcal{P}(X)$.

Def. Sei (X, τ) ein top. Raum. Für $M \subset X$ heißen

$$\overset{\circ}{M} := \bigcup_{\substack{U \subset M \\ U \in \tau}} U$$ der offene Kern, ← Elemente heißen innere Punkte

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A^c \in \tau}} A$$ die abgeschlossene Hülle und

$$\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$$ der Rand von M. ← Elemente heißen Randpunkte

Def. $M \subset (X, \tau)$ heißt dicht, wenn $\overline{M} = X$ ist. Besitzt M eine abzählbare dichte Teilmenge, so nennt man X separabel.

<u>Def.</u>: $M \subset (X,\tau)$ heißt eine <u>Umgebung</u> von $x \in X$, falls $x \in \overset{\circ}{M}$ gilt. Ein top. Raum heißt <u>Hausdorff'sch</u> (oder: ein Hausdorff-Raum), wenn er die folgende Trennungseigenschaft hat:

Zu jedem Punktepaar $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ existieren Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2, so dass $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ist.

<u>Bem.</u>: Jeder metrische Raum ist ~~H~~Hausdorff'sch. Alle top. Räume in dieser Vorlesung werden Hausdorff-Räume sein.

<u>Def.</u>: $x \in (X,\tau)$ heißt ein <u>isolierter Punkt</u> von (X,τ), wenn $\{x\}$ offen ist. Ein top. Raum, der nur aus isolierten Punkten besteht, heißt <u>diskret</u>.

(Etwa: $(X, \mathcal{P}(X))$, in dieser Vorlesung mit $X = \mathbb{Z}^n$.)

<u>Def.</u> $\tau_0 \subset \tau$ heißt eine <u>Basis der Topologie</u> τ, wenn jedes $\Omega \in \tau$ sich als Vereinigung von Mengen in τ_0 darstellen lässt.

$\tau_x \subset \tau$ heißt eine <u>Umgebungsbasis</u> von $x \in (X,\tau)$, falls jede Umgebung von x ein Element von τ_x (als Teilmenge) enthält.

<u>Def.</u> Ist $M \subset (X,\tau)$, so heißt $\tau_M := \{\Omega \cap M : \Omega \in \tau\}$ die von ~~X~~ in ~~M~~ induzierte Relativtopologie. (M, τ_M) ist ein top. Raum.

<u>Def.</u>: $K \subset (X,\tau)$ heißt <u>kompakt</u>, wenn gilt:

Ist $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \tau$ $\forall i \in I$ (bel. Indexmenge), so existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$, für die bereits $K \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$. (Heine-Borelsche Überdeckungseigenschaft)

<u>Bem.</u>: • In metrischen Räumen ist diese Eigenschaft äquivalent zur Folgenkompaktheit (Jede Folge in K besitzt eine in K konvergente Teilfolge.).

- Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten top. Raumes ist kompakt.
- In einem Hausdorff-Raum ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen.

<u>Def.</u>: Ein top. Raum (X,τ) heißt <u>lokal kompakt</u>, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

<u>Bem.</u>: • Jeder Punkt $x \in X$ in einem lokal kompakten Hausdorff-top. Raum (X,τ) besitzt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen. (Nicht trivial. Benötigt Urysohn's Lemma, s.u., vgl. Deitmar-Echterhoff, Cor. A8.2)

- Jeder topologische Raum (X,τ) kann durch Hinzunahme eines weiteren Elements $\infty \notin X$ „kompaktifiziert" werden. Dazu definiert man eine Teilmenge $\Omega \subset X_\infty := X \cup \{\infty\}$ als offen, wenn $\Omega \in \tau$ ist oder wenn $\infty \in \Omega$ liegt und $X_\infty \setminus \Omega \subset X$ kompakt ist. So entsteht ein kompakter top. Raum (X_∞, τ_∞), der Hausdorffsch ist, falls (X,τ) lokal kompakt ist. („Ein-Punkt-Kompaktifizierung (nach Alexandrov)", Details dazu ggf. in den $\to$ Übungen)

Für Abbildungen zwischen top. Räumen können wir den Begriff der Stetigkeit erklären:

Def.: Es seien (X, τ) und (Y, σ) top. Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt

- stetig in $x \in X$ $:\Longleftrightarrow$ $\forall$ Umgebungen V von $f(x) \in Y$ existiert eine Umgebung U von x, so dass
$$f(U) \subset V,$$
- stetig (in X) $:\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(V) \in \tau \quad \forall V \in \sigma$.

Bem.:
- f ist genau dann stetig (in X), wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist,
- durch Übergang zu den Komplementen sieht man: f ist genau dann stetig (in X), wenn $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist (in (X, τ)) für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset (Y, \sigma)$.
- Ist $K \subset X$ kompakt in (X, τ) und $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt in (Y, σ).

Def.: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen top. Räumen (X, τ) und (Y, σ) heißt offen $:\Longleftrightarrow$ $f(U) \in \sigma$ für alle $U \in \tau$.

Bem.: Ist f bijektiv, so ist die Offenheit von f gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Umkehrabbildung.
Eine Bijektion zwischen top. Räumen, die sowohl stetig als auch offen ist, nennt man einen Homöomorphismus.

Schwache Topologien:

Def.: Gegeben sei eine Menge X, auf der zwei Topologien τ_1 und τ_2 definiert sind. Man sagt τ_1 ist schwächer als τ_2, wenn $\tau_1 \subset \tau_2$ ist.

Bem.: • In derselben Situation nennt man auch τ_2 feiner als τ_1.

• Gleichheit ist zugelassen bei dieser Sprechweise.

• Im allgemeinen muß keine "$\subset$"-Relation zwischen Topologien auf derselben Menge X bestehen.

Die naheliegende Betrachtungsweise für Funktionen

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

zwischen top. Räumen ist diejenige, die Topologien τ und σ als gegeben anzusehen und konkrete Funktionen f auf Stetigkeit zu untersuchen, oder Stetigkeitskriterien (für gegebene τ und σ) herzuleiten. Eine teilweise Umkehrung der Betrachtung führt auf die sog. schwachen Topologien: Sind die Topologie σ des Zielraums Y und eine Funktionenfamilie

$$F = \{ f_i : X \to Y,\ i \in I \}$$

gegeben, so definiert man eine Topologie τ_F auf X als die schwächste Topologie, so dass alle $f_i \in F$ stetig sind. Als Basis muß (nach der obigen Definition der Stetigkeit) τ_F das Mengensystem

$$\tau_0 := \{ f^{-1}(V) : f \in F, V \in \sigma \}$$ enthalten.

τ_F heißt dann die (von F und σ) auf X erzeugte schwache Topologie. Eine solche schwache Topologie ist Hausdorffsch, wenn σ Hausdorffsch ist und wenn die Familie F die Punkte von X trennt. Letzteres bedeutet:

Def.: Eine Familie F von Funktionen $f: X \to Y$ trennt die Punkte von X, wenn gilt: Sind $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so existiert ein $f \in F$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Begründung, dass unter diesen Voraussetzungen τ_F Hausdorffsch ist:

Sind $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so existiert $f \in F$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Da σ Hausdorffsch ist existieren Umgebungen V_1 von $f(x_1)$ und V_2 von $f(x_2)$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann sind $f^{-1}(V_1)$ und $f^{-1}(V_2)$ disjunkte (offene) Umgebungen von x_1 bzw. x_2.

<u>Banachräume stetiger Funktionen:</u> Sei (X, τ) ein top. Raum. Man setzt

- $C(X) := \{ f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ ist stetig und beschränkt} \}$,
- $C_0(X) := \{ f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ ist stetig und } \lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \}$

  <u>hierbei</u>: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subset X$ kompakt, so dass $|f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in K^c$.
- $C_c(X) = \{ f : X \to \mathbb{C},\ f \text{ ist stetig und } supp(f) \text{ kompakt} \}$

  hierbei: $supp(f) := \overline{\{ x \in X : f(x) \neq 0 \}}$ der Träger (engl.: support) von f.

Offenbar gilt: $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C(X)$, mit Gleichheit, falls X kompakt ist.

Es handelt sich hierbei um Vektorräume - Addition und skalare
Multiplikation werden punktweise definiert. Durch die Festlegung

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

erhält man die normierten Räume $(C(X), \|\ \|_\infty)$, $(C_0(X), \|\ \|_\infty)$ und $(C_c(X), \|\ \|_\infty)$.(*) Da gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen stetig und $\mathbb{C}$ vollständig sind, ist $(C(X), \|\ \|_\infty)$ vollständig, also ein Banachraum. $(C_0(X), \|\ \|_\infty)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $(C(X), \|\ \|_\infty)$ und daher ebenfalls ein Banachraum.

Lemma 1: Ist (X,τ) ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, so ist $C_c(X)$ ein dichter Teilraum von $C_0(X)$.

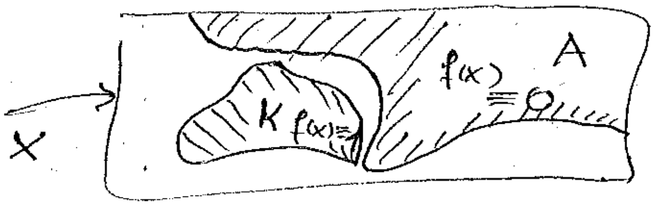
Diese Aussage läßt sich leicht einsehen mit Hilfe des Lemmas von Urysohn, was auch im weiteren benötigt wird.

Lemma (Urysohn): Sei (X,τ) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $K \subset X$ kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und $K \cap A = \emptyset$. Dann gibt es

(a) $U \in \tau$ mit $\overline{U}$ kompakt, so dass $K \subset U \subset \overline{U} \subset A^c$, und

(b) eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit $f(x) = 1\ \forall x \in K$ und $f(x) = 0\ \forall x \in A$, sowie $f(x) \in [0,1]\ \forall x \in X$.

(Bew.: Rudin: Real and Complex Analysis, Thm. 2.7, Lemma 2.12)



Funktioniert immer - egal wie nah A an K herankommt. Man sollte f als stetige Approximation von χ_K auffassen.

(*) Wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, verzichtet man auf die Paarschreibweise. C(X) bezeichnet dann bereits den normierten VR.

Bew. von Lemma 1: Sei $f \in C_0(X)$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein kompaktes $K \subset X$, sodass $|f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in K^c$. Wähle eine Funktion $f_K \in C_c(X)$ mit $f_K(x) = 1 \ \forall x \in K$ gemäß Teil (b) des Urysohn-Lemmas. Dann ist $f_K \cdot f \in C_c(X)$ und

$$\|f - f_K f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)(1 - f_K(x))| = \sup_{x \in K^c} |f(x)(1 - f_K(x))|$$

$$\leq \sup_{x \in K^c} |f(x)| < \varepsilon. \qquad \Rightarrow \text{Beh.}$$

Auf den Vektorräumen $C(X)$, $C_0(X)$, $C_c(X)$ ist ferner eine Multiplikation (punktweise) definiert, die nicht aus diesen Räumen herausführt. Es handelt sich somit um Algebren. Weiter gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$, (gilt nicht für jede Norm, auch wenn eine $\cdot$ definiert ist!) das macht diese Räume zu normierten Algebren. Wie überlegt, sind $C(X)$ und $C_0(X)$ Banachräume, und damit einfache Beispiele für Banachalgebren.

Ein starkes Dichtheitskriterium liefert der

Satz von Stone-Weierstraß: Es sei (X, τ) ein lokal kompakter Hausdorff-Raum und A eine Teilalgebra von $C_0(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) A trennt die Punkte von X,

(ii) $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$ ("A ist selbstadjungiert"),

(iii) Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $f \in A$, sodass $f(x) \neq 0$.

Dann ist A ein dichter Teilraum von $C_0(X)$.

(Beweis: Deitmar/Echterhoff: Principles of harmonic analysis; Appendix A 10)

Bem. Weierstraß'scher Approximationssatz für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

Topologische Produkte

Sei I eine beliebige Indexmenge und $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Auf dem kartesischen Produkt

$$X := \mathop{\times}_{i\in I} X_i = \{ (x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i \}$$

definiert man die Projektionen $\pi_i : X \to X_i$, $(x_j)_{j\in I} \mapsto x_i$.

Unter der Produkttopologie ist diejenige schwache Topologie zu verstehen, die vom Funktionensystem $P = \{\pi_i : i \in I\}$ erzeugt wird. Genauer: Eine Basis der Produkttopologie ist gegeben durch

$$\tau_0 := \{ \prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i,\ U_i \neq X_i \text{ nur für endlich viele Indizes } i \in I \},$$

die Topologie selbst durch

$$\tau := \{ U \subset X : U \text{ ist eine Vereinigung von Mengen aus } \tau_0 \}.$$

In diesem Zusammenhang gilt der (tiefliegende)

Satz von Tychonoff: (X,τ) ist genau dann kompakt, wenn (X_i, τ_i) für alle $i \in I$ kompakt ist.

Die Richtung "$\Rightarrow$" ist klar, da τ so eingerichtet ist, dass alle Projektionen stetig sind, und Bilder kompakter Räume unter stetigen Abbildungen sind kompakt. Für die andere Richtung muß man etwas tun, siehe z.B.: Deimling / Eckhoff, a.a.O., Appendix A.7.

Bem.: In dieser Vorl.: Endlich viele Faktoren. Tychonoff wird dadurch nicht einfacher.

Gruppenstruktur

Def.: Ein Paar $(G,+)$, bestehend aus einer Menge G und einer inneren Verknüpfung $+ : G\times G \to G$ heißt eine Gruppe, falls

- $x+(y+z) = (x+y)+z \quad \forall x,y,z\in G$
- $\exists\, 0\in G$, sodass $x+0 = x \quad \forall x\in G$
- $\forall x\in G\ \exists -x\in G$, sodass $x+(-x)=0$

$(G,+)$ heißt abelsch $:\iff x+y = y+x \quad \forall x,y\in G$

Bem.: Bei allgemeinen Überlegungen schreibe ich G additiv, weil die relevantesten Bsp.: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n = \left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right)^n$ additiv sind. Es kommen aber gelegentlich auch multiplikative Gruppen vor, etwa $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

Bezeichnungen für Operationen auf Teilmengen:

- $A+B := \{a+b : a\in A,\ b\in B\}$
- $-A := \{-a : a\in A\}$, $A-B := A+(-B)$

speziell für $B=\{x\}$

- $A+x := A+\{x\}$ Verschiebung (oder Translation von A um x)

Topologischer Raum

Def.: Eine Gruppe $(G,+)$, die zugleich ein topologischer Raum (G,τ) ist, heißt eine topologische Gruppe, falls

(i) $+ : G\times G \to G$, $(x,y)\mapsto x+y$ und

(ii) $- : G\to G$, $x\mapsto -x$

stetig sind.

$\rightsquigarrow$ (i) und (ii) sind äquivalent dazu, dass

$$G\times G \to G,\quad (x,y)\mapsto x-y$$

stetig ist

$\rightsquigarrow$ Aus (i) folgt insbes., dass für jedes feste $x\in G$ die Translation $\tau_x : y\mapsto x+y$ stetig ist

A offen, B beliebig $\Rightarrow A+B = \bigcup_{x\in B} A+x$ ist offen

A und B kompakt $\Rightarrow A\times B$ ($(G\times G, \tau\times\tau)$) ist kompakt $\Rightarrow A+B = +(A\times B)$ ist kompakt.

Bilden die Grundlagen der Untersuchungen in Kap 1 ∇ →

Local kompakte abelsche (LCA) Gruppe

= Abelsche top. Gruppe, deren Top. lokal kompakt ist (jedes $x\in G$ besitzt kompakte

Gruppenstruktur

Untergruppen

Def. Eine Teilmenge $H \subset G$ einer Gruppe $(G,+)$, die selbst eine Gruppe ist, heißt eine Untergruppe.

Bem.: • $\Longleftrightarrow$ $H - H \subset H$,

• $H \neq G$: echte UG, $H = \{0\}$: triviale UG

Top. Raum

Wird mit der Relativtopologie $\tau_H = \{U \cap H : U \in \tau\}$ (s.o.) versehen, (H, τ_H) ist top. Gruppe

H Untergruppe einer top. Gruppe

$\Rightarrow$ $\overline{H}$ ist eine Untergruppe

H abgeschlossene UG einer LCA-Gruppe

$\Rightarrow$ H ist auch eine LCA-Gruppe.

Morphismen

Def.: Eine Abbildung $\phi : G \to G'$ zwischen Gruppen $(G,+)$ und $(G',+)$ heißt ein (Gruppen-) Homomorphismus, falls $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$.

Ist ϕ darüber hinaus bijektiv, spricht man von einem (Gruppen-) Isomorphismus.

(Der Kern $\phi^{-1}(\{0\})$ eines Homomorphismus ist stets eine Untergruppe.)

Homomorphismus topologischer Gruppen $\phi : (G,+,\tau) \to (G',+,\tau')$:

= stetiger Gruppenhomomorphismus

Isomorphismus top. Gruppen:

= stetiger Gruppenisomorphismus mit stetiger Inverser

Quotientengruppen

$(G,+)$ abelsche Gruppe, H Untergruppe. Objekte der Form $x + H$ mit $x \in G$ heißen Nebenklassen* (engl.: cosets)

Es gilt $x + H = y + H \Longleftrightarrow x - y \in H$.

---

* Da $(G,+)$ abelsch ist, muß man nicht zwischen Rechts- und Linksnebenklassen unterscheiden.

noch: Quotienten

Gruppenstruktur

Def.: $G/H := \{x+H : x \in G\}$

Die Addition von Nebenklassen wird definiert durch $(x+H)+(y+H) := (x+y)+H$

Natürlicher Homomorphismus: $q: G \to G/H$, $x \mapsto x+H$, wird auch als Quotientenabb. bezeichnet, daher: q.

Wichtiger Satz: Ist (G,τ) eine LCA-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe von G, so ist $(G/H, \tau_q)$ auch eine LCA-Gruppe.

(Bew.: Rudin, Appendix B6)

top. Struktur

Topologie auf G/H: τ_q, def. durch

$V \subset G/H$ ist offen $:\Leftrightarrow q^{-1}(V) \in \tau$ (also offen in (G,τ))

so gewählt, dass $q: (G,\tau) \to (G/H, \tau_q)$ stetig ist.

Es gilt: $\tau_q = \{q(U) : U \in \tau\}$, denn:

- Ist $V \in \tau_q \Rightarrow q^{-1}(V) \in \tau \Rightarrow V = q(\underbrace{q^{-1}(V)}_{\in \tau}) \in \ldots$
  $\ldots \{q(U) : U \in \tau\}$.
- Umgekehrt: Ist $V \in \{q(U) : U \in \tau\}$
  $\Rightarrow q^{-1}(V) = q^{-1}(q(U)) = q^{-1}(\{x+H : x \in U\})$
  $= U + H \in \tau$ (s.o.), da $U \in \tau$.

τ_q wird als Quotiententopologie bezeichnet. $q: (G,\tau) \to (G/H, \tau_q)$ ist offen!

Direkte Produkte

Def.: G_i, $1 \le i \le n$, seien Gruppen. Auf dem kartesischen Produkt $G := \bigtimes_{i=1}^{n} G_i = \{(x_i)_{i=1}^{n} : x_i \in G_i\}$ definiert man die Verknüpfung komponentenweise, also für $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ und $y = (y_i)_{i=1}^{n}$:

$$x + y := (x_i + y_i)_{i=1}^{n}$$

Dann ist $(G,+)$ eine Gruppe, die genau dann abelsch ist, wenn alle G_i abelsch sind. Bez.: $\prod_{i=1}^{n} G_i$.

Sind alle $G_i = G_1$: $\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1^n$.

Sind für $1 \le i \le n$ (G_i, τ_i) top. Gruppen, stattet man $\prod_{i=1}^{n} G_i$ mit der Produkttopologie $\tilde{\tau}$ aus. Dann gilt:

Satz: Sind alle (G_i, τ_i) (lokal) kompakte abelsche Gruppen, so ist auch $\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, \tilde{\tau}\right)$ eine (lokal) kompakte abelsche Gruppe.

(Folgt aus Tychonoff.)

Konkretisierung im Fall metrischer Gruppen (d.h.: Die Topologien auf G bzw. den G_i werden von Metriken d bzw. d_i erzeugt.): 1.12 (a)

Direkte Produkte: Für $1 \leq i \leq n$ seien die (G_i, τ_i) top. Gruppen, deren Topologien von Metriken $d_i : G_i \times G_i \to [0, \infty)$ erzeugt werden. Dann wird die Produkttopologie τ erzeugt von der Produktmetrik

$$d : \left(\prod_{i=1}^{n} G_i\right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} G_i\right) \longrightarrow [0,\infty), \quad d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$

Alternativ: $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$; $d(x,y) = \max_{i=1}^{n} d_i$.

Quotienten: (G, τ) sei eine top. Gruppe, deren Top. τ von einer Metrik $d : G \times G \to [0,\infty)$ stammt. Wir nehmen zusätzlich an, d sei ebenfalls translationsinvariant, d.h. es gelte $d(x,y) = d(x+t, y+t)$ $\forall x,y,t \in G$ ($\Rightarrow d(x,y) = d(x-y, 0)$).
H sei eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann wird die oben eingeführte Quotiententopologie erzeugt von der Quotientenmetrik d_q, definiert durch

$$d_q(x+H, y+H) := \inf_{t \in H} d(x+t, y) = \inf_{t \in H} d(x-y, t).$$

Dann ist $q : (G, d) \longrightarrow (G/_H, d_q)$ sowohl stetig als auch offen, denn es gilt

$$\begin{aligned} q(B_\varepsilon(0)) &= \{x+H : d(x,0) < \varepsilon\} = \{x+H : \exists t \in H \text{ mit } d(x+t,0) < \varepsilon\} \\ &= \{x+H : \inf_{t\in H} d(x+t,0) < \varepsilon\} = \{x+H : d_q(x+H, H) < \varepsilon\} \\ &= B_\varepsilon(q(0)) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

Für die Fourierreihen relevantes

Beispiel zu Quotienten und Morphismen:

$(G,+)=(\mathbb{R},+)$, versehen mit der Metrik $d(x,y)=|x-y|$ und, dadurch erzeugt, der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, also dem üblichen System offener Mengen auf $\mathbb{R}$.

Untergruppe: $(H,+)=(2\pi\mathbb{Z},+)$, $2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.

Dies ist eine abgeschlossene Untergruppe.

Wir bilden den Quotienten:

$$\mathbb{T}:=G/H:=(\{x+2\pi\mathbb{Z} : x\in\mathbb{R}\},+)\text{, dabei}$$

$$x+2\pi\mathbb{Z}=y+2\pi\mathbb{Z}\iff x-y\in 2\pi\mathbb{Z}$$ und die Add. ist def. durch

$$(x+2\pi\mathbb{Z})+(y+2\pi\mathbb{Z}):=(x+y)+2\pi\mathbb{Z},$$ was man meist mit Vertretern $\hat{x},\hat{y}$ und $\widehat{x+y}$ in $(-\pi,\pi]$ ausdrückt

$$\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y},\ \text{wenn}\ \widehat{x+y}\in\hat{x}+\hat{y}+2\pi\mathbb{Z}\ \text{und}\ \widehat{x+y}\in(-\pi,\pi].$$

mod (2π) oder mod $(2\pi\mathbb{Z})$ (z.B.: $\pi+\pi=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$)

$\mathbb{T}$ wird als die eindimensionale Torusgruppe bezeichnet.

Funktionen auf $\mathbb{T}$ können als 2π-periodische Fkt. auf $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden.

Sei $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$, so definieren wir für $t\in\mathbb{R}$:

$$g(t)=f(x+2\pi\mathbb{Z}),\ \text{falls}\ t\in x+2\pi\mathbb{Z}.$$

Dann ist $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine wohldef., 2π-periodische Funktion.

Umgekehrt: Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-periodisch. Dann setzen wir

$$f:\mathbb{T}\to\mathbb{C},\quad x+2\pi\mathbb{Z}\mapsto f(x+2\pi\mathbb{Z}):=g(x).$$

Da g 2π-periodisch ist, ist auch dies wohldefiniert.

Metrik (und damit Topologie) auf $\mathbb{T}$:

$$d_{\mathbb{T}}(x+2\pi\mathbb{Z},y+2\pi\mathbb{Z})=\inf_{k\in\mathbb{Z}}|x+2\pi k-y|=\min_{k\in\mathbb{Z}}|x-y+2\pi k|.$$

s. 1.12 (a)

Wir setzen für $x+2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$: $\exp(x+2\pi\mathbb{Z}) := e^{ix} \in S^1$

Damit erhalten wir eine Bijektion

$$\exp : (\mathbb{T},+) \longrightarrow (S^1,\cdot),$$

die die algebraische Struktur erhält, da

$$\exp\big((x+2\pi\mathbb{Z}) + (y+2\pi\mathbb{Z})\big) \underset{\text{Def + auf } \mathbb{T}}{=} \exp\big((x+y)+2\pi\mathbb{Z}\big) \underset{\text{Def exp}}{=} e^{i(x+y)} \underset{\text{Funktionalgleichung.}}{=} e^{ix}\cdot e^{iy}$$

Definieren wir $d_{S^1}(e^{ix}, e^{iy}) = \min_{k\in\mathbb{Z}} |x-y+2\pi k|$,(*) so wird exp eine Isometrie und damit ein <u>Isomorphismus der topologischen Gruppen $(\mathbb{T},+)$ und $(S^1,\cdot)$.</u>

Folgerung daraus: Wir werden im weiteren also nicht mehr unterscheiden zwischen

- Funktionen auf $\mathbb{T}$,
- 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$,
- Funktionen auf dem Kreis(rand) S^1,

sondern können uns eine problemangepasste Interpretation aussuchen.

(*) geometrisch: Länge des kürzeren Kreisbogenstücks von x nach y.
$|e^{ix}-e^{iy}| \le d_{S^1}(e^{ix},e^{iy}) \le \frac{\pi}{2}|e^{ix}-e^{iy}|$, also eine äquivalente Metrik (zu $|\;|$ auf $\mathbb{C}$)

noch zu: Topologische Gruppen:

Die Topologie auf einer topologischen Gruppe ist translationsinvariant, da die Abb. $\tau_y : G \to G,\ x \mapsto \tau_y(x) := x+y$ und damit auch $\tau_y^{-1} = \tau_{-y}$ stetig. Das erlaubt es, den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion

$$f : (G,\tau) \longrightarrow \mathbb{C}$$ (allgemeiner: in einem metrischen Raum (X,d).)

zu definieren: Sei (G,τ) eine topologische Gruppe.

<u>Def.</u>: $f : (G,\tau) \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt:

zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Neutralumgebung (= Umgebung des neutralen Elements von G) U, so dass für alle $x, y \in G$ mit $x-y \in U$ gilt: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Mit dieser Definition gelten dann auch wieder die bekannten Aussagen über stetige Funktionen auf kompaktem Definitionsbereich:

<u>Satz</u> (1) Ist (G,τ) eine top. Gruppe, $K \subset G$ kompakt und $f : K \to G$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

(2) Ist (G,τ) eine top. Gruppe und $f \in C_0(G)$, so ist f glm. stetig.

Bew. von (1): Rudin, Appendix B 9;

(2) gilt natürlich insbes. für $f \in C_c(G)$.

1.1.3 Maßtheorie

Def.: X sei eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine <u>σ-Algebra</u>, wenn gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$; (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$; (iii) $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Def. Ein <u>Maß</u> μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

mit den Eigenschaften (i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A_n \in \mathcal{A}, A_n \cap A_m = \emptyset\ \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

(sog. σ-Additivität, hierbei: $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$ = disjunkte Vereinigung)

Bez.: $(X, \mathcal{A})$: meßbarer Raum

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Maßraum

Ein Maßraum heißt <u>σ-endlich</u>, falls eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ existiert, so dass

(i) $\mu(A_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Bsp.: $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$: Lebesgue-meßbare Mengen, λ: Lebesgue-Maß

$A_N = B_N(0)$

Def.: Gegeben sei eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$. Dann bezeichnet $\sigma(\mathcal{A}_0)$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}_0$ umfaßt. Diese wird ~~als~~ die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra genannt.

Bem.: Existiert immer. $\sigma(\mathcal{A}_0) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}, \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}$
Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{A}_0$ umfaßt, ist dieser Durchschnitt nicht leer.

Diese Form der Abschlußbildung wird in der Maß-
theorie häufig verwendet, z. B. zur Def. der:

1. Produkt-σ-Algebra: Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ σ-Algebren, so bildet man zunächst das System

$$\mathcal{A} \square \mathcal{C} := \{ A \times C : A \in \mathcal{A} \text{ und } C \in \mathcal{C} \}$$

der sogenannten Rechteckmengen. Dann heißt

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} := \sigma(\mathcal{A} \square \mathcal{C})$$

die Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$.

Sind nun $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, so gibt es genau ein (ebenfalls σ-endliches) Maß $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$, was auf den Rechteckmengen durch

$$\mu \times \nu (A \times C) = \mu(A) \nu(C) \quad \overbrace{\forall A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}}^{\text{mit } \mu(A) < \infty \text{ und } \nu(C) < \infty}$$

festgelegt ist. Dieses wird als das Produktmaß von μ und ν bezeichnet.

Bem.: Die Voraussetzung der σ-Endlichkeit ist wesentlich für die Eindeutigkeit des Produktmaßes.

2. Borel-σ-Algebra: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, so heißt

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$$

die Borel-σ-Algebra auf X (die von den offenen Mengen der Topologie erzeugte σ-Algebra). Ihre Elemente nennt man Borel-Mengen.

Gebräuchliche Abkürzungen: $\mathbb{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B}_n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; beides ist auf die Standardtopologie bezogen. Es gilt: $\mathbb{B}_n = \mathbb{B}^n \; (= \underbrace{\mathbb{B} \times \ldots \times \mathbb{B}}_{n\text{-mal}})$ (Übung in Maßtheorie!)

<u>Def.</u>: Ein Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$ heißt lokal endlich, wenn zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x existiert mit $\mu(U_x) < \infty$. Ein solches Maß heißt ein <u>Borel-Maß</u>.

<u>Folgerungen</u>: (i) Ist μ ein Borel-Maß auf $\mathcal{B}(X)$ und $K \subset X$ kompakt, so ist $\mu(K) < \infty$.

(ii) Ist (X, τ) lokal kompakt und μ ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$ mit $\mu(K) < \infty$ für jedes kompakte $K \subset X$, so ist μ lokal endlich (und damit ein Borel-Maß.)

<u>Begründung</u>: (i) Sei $K \subset X$ kompakt und – für $x \in K$ – U_x die Umgebung endlichen Maßes von x. Dann ist $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$, da K kompakt bereits $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$ und damit $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(U_{x_i}) < \infty$.

(ii) Da (X, τ) lokal kompakt ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x. Nach Voraussetzung ist hierfür $\mu(K_x) < \infty$.

(D.h.: Für Maße auf den Borel-Mengen eines lokal kompakten Hausdorff-Raumes sind lokal-Endlichkeit und Endlichkeit für Kompakta gleichwertig.)

Def. Sei (X,τ) ein Hausdorff-Raum und $\mathcal{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra auf X. Dann heißt ein Borelmaß μ auf $\mathcal{B}(X)$:

(a) von innen regulär (bzw. ein inneres Radon-Maß), falls für alle $E \in \mathcal{B}(X)$ gilt

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ und } K \text{ kompakt}\}; \qquad (1)$$

(b) von außen regulär, wenn für alle $E \in \mathcal{B}(X)$ gilt

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U \text{ und } U \in \tau\}; \qquad (2)$$

(c) ein äußeres Radon-Maß, wenn es von außen regulär ist, und wenn (1) für alle $E \in \tau$ gilt;

(d) regulär bzw. ein Radon-Maß, falls (1) und (2) gelten.

Bem.: (i) Def. nach Deitmar-Echterhoff, "Principles...". Selbst in der Lehrbuch-Literatur ist der Sprachgebrauch uneinheitlich. (Rudin vereinfacht an dieser Stelle unzulässig.)

(ii) Ist (X,τ) ein lokal-kompakter, σ-kompakter Hausdorff-Raum, so ist jedes äußere Radon-Maß auf $\mathcal{B}(X)$ bereits regulär, also ein Radon-Maß. Hierbei heißt (X,τ) σ-kompakt, wenn es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Kompakta in X gibt, so dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. (Bew. von (ii): Rudin, Real and complex analysis, Thm. 2.17.) Das ist die relevante Situation in Kap. 1 dieser Vorlesung.

Der nächste Schritt ist, aus den endlichen (regulären) Borel- 1.1
Maßen einen normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum zu bauen, der vollständig, also ein Banachraum ist.

Def.: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Eine σ-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt ein komplexes Maß. Für $E \in \mathcal{A}$ setzt man

disjunkte Vereinigung

$$|\mu|(E) := \sup \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)| : E = \sum_{n\in\mathbb{N}} E_n \}.$$

Dann ist $|\mu|$ ein Maß auf $\mathcal{A}$ und wird die Totalvariation von μ genannt.

Man definiert die Vektorraumoperationen

$$(\mu+\nu)(E) := \mu(E) + \nu(E), \quad (\lambda\mu)(E) = \lambda\mu(E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, E \in \mathcal{A}$$

und die Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Dann bilden die komplexen Maße endlicher Totalvariation auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ einen normierten VR.

Nun sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum.

Def.: Ein komplexes Maß $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ heißt ein reguläres komplexes Borel-Maß (auf $\mathcal{B}(X)$), wenn die Totalvariation $|\mu|$ ein reguläres Borelmaß ist. Wir setzen

$$M(X) := \{ \mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C},\ \mu \text{ ist ein reguläres komplexes Borel-Maß mit } \|\mu\| < \infty \}$$

Dann ist $M(X)$ ein Banach-Raum.

(Mehr dazu: Rudin, Real and Complex... Kap. 6; Elstrodt, Maßtheorie, Kap VIII.)

Integration nach einem (positiven) Maß (Wdh.)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein beliebiger Maßraum.

Def.: $f: X \to \mathbb{R}$ heißt $\mathcal{A}$-meßbar, wenn $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ für alle $E \in \mathcal{B}$. $f: X \to \mathbb{C}$ heißt $\mathcal{A}$-meßbar, wenn $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ $\mathcal{A}$-meßbar sind.

Hinreichend im reellwertigen Fall: $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ $\forall$ offenen Intervalle I.

Def.: Eine Funktion der Gestalt $t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ heißt eine Treppenfunktion. Diese bilden einen $\mathbb{C}$-VR: $\mathcal{T}(X)$.

Satz: Jede nichtnegative meßbare Funktion f auf X kann monoton durch eine Folge in $\mathcal{T}(X)$ approximiert werden. Ist f beschränkt, so kann gleichmäßige Konvergenz erreicht werden.

Damit: Sukzessive Definition des Integrals nach μ:

(i) Für $t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$: $\mu[t] := \int t \, d\mu := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$,

(ii) für $f = \lim_{n \to \infty} t_n$ (mit $t_n \in \mathcal{T}(X)$ und $t_n \nearrow f$):

$$\mu[f] := \lim_{n \to \infty} \mu[t_n] \qquad \text{(wohldef.!)} \quad (\in [0, \infty])$$

(iii) für integrierbare Funktionen $f = \underbrace{f_+ - f_-}_{\text{beide meßbar}}$, wobei $\mu[f_\pm] < \infty$ gefordert ist:

$$\mu[f] := \mu[f_+] - \mu[f_-]$$

Diese Def. zieht nach sich:

(i) f ist integrierbar nach $\mu \Leftrightarrow f$ ist $\mathcal{A}$-meßbar und $|f|$ ist integrierbar nach μ,

sowie den wichtigen Konvergenzsatz von Beppo-Levi:

(ii) Ist $(f_n)_n$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ und $\sup \mu[f_n] < \infty$. Dann ist auch f μ-integrierbar und es gilt

$$\mu[f] = \lim_{n\to\infty} \mu[f_n]. \qquad (*)$$

Mit Hilfe dieses "Satzes von der monotonen Konvergenz" kann man schließlich den "Satz von der Majorisierten Konvergenz beweisen", kurz:

Lebesgue'scher Konvergenzsatz: Es seien $(f_n)_n$ μ-integrierbar und es gelte

(a) $f_n \longrightarrow f : X \to \mathbb{R}$ punktweise

(b) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : X \to [0,\infty)$, so dass $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Dann ist f integrierbar und es gilt $(*)$.

In beiden Sätzen können die punktweisen Voraussetzungen abgeschwächt werden, indem man μ-Nullmengen ausnimmt, also die pktweise Konvergenz nur μ-f.ü. voraussetzt und die Ungleichung $|f_n(x)| \leq g(x)$ nur für μ-fast alle $x \in X$ verlangt.

Das Integral nach einem komplexen Maß kann mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym hierauf zurückgeführt werden. 1.2

Dazu zunächst eine

Def.: Ein (komplexes) Maß ν auf $\mathcal{A}$ heißt absolut stetig bzgl. μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Satz (Radon-Nikodym): Ist $\nu \ll \mu$, so gibt es eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion g (eine sogenannte μ-Dichte), so dass

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Hierbei ist:

- $g \geq 0$, falls ν ein positives Maß ist. In diesem Fall ist g integrierbar genau dann, wenn ν endlich ist.
- $g : X \to \mathbb{C}$ μ-integrierbar, wenn ν ein komplexes Maß ist. (Für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen sind Meßbarkeit und Integrierbarkeit dadurch erklärt, dass Real- und Imaginärteil meßbar bzw. integrierbar sind.) In diesem Fall gilt:

$$\|\nu\| = \int |g| \, d\mu$$

Nun gilt für jedes komplexe Maß ν, dass $\nu \ll |\nu|$ (absolut stetig bezüglich seiner Totalvariation). Man erhält also für ν eine $|\nu|$-Dichte $g : X \to \mathbb{C}$, von der man $|g(x)| = 1$ $|\nu|$-fast überall zeigen kann. Damit gilt dann

$$\nu[f] = \int f \cdot g \, d|\nu|.$$

Für die Integration nach dem Produktmaß ist der Satz von Fubini das wesentliche Hilfsmittel. Die Standardversion lautet: 1.2.

<u>Satz</u> (Fubini): Es seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{C},\nu)$ σ-endliche Maßräume sowie $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$-meßbar. Dann gelten:

(a) Ist $f\geq 0$, so definieren die Teilintegrale

$$\int f(x,y)\,d\mu(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \int f(x,y)\,d\nu(y)$$

$\mathcal{C}$- bzw. $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen (mit Werten in $[0,\infty]$) und es gilt die "Fubini-Formel":

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\times\nu(x,y) = \int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)$$

$$= \int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\;;$$

(b) ist f komplex-wertig und eines der beiden iterierten Integrale

$$\int_Y\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x)\,d\nu(y) \quad \text{bzw.} \quad \int_X\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y)\,d\mu(x)$$

ist endlich, so ist f $\mu\times\nu$-integrierbar und die Fubini-Formel gilt.

<u>Bem.</u>: Teil (a) wird auch als Satz von Fubini-Tonelli oder als Satz von Fubini für nichtnegative meßbare Funktionen bezeichnet. Hierbei ist "∞" als Wert der Integrale in der Fubini-Formel zugelassen. (Bew. und Diskussion: Rudin, Real and Complex..., Thm. 7.8.)

Äußere Radon-Maße sind i. allgemeinen nicht σ-end- 1.23
lich, dennoch lässt sich der Satz von Fubini im wesentlichen retten. Es gilt:

Sind (X,τ) und (Y,σ) lokal kompakte Hausdorff-Räume und μ und ν äußere Radon-Maße auf $\mathcal{B}(X)$ bzw. $\mathcal{B}(Y)$, so existiert ebenfalls ein eindeutig bestimmtes Produktmaß $\mu\times\nu$ auf $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y)$ (mit $\mu\times\nu(A\times C)=\mu(A)\nu(C)$).
Teil (b) des Satzes von Fubini gilt dann noch unter gewissen Zusatzvoraussetzungen, z. B.

(i) wenn $f: X\times Y\to\mathbb{C}$ $\mu\times\nu$-integrierbar ist,

oder

(ii) wenn $\{(x,y)\in X\times Y: f(x,y)\neq 0\}$ σ-endlich ist bzgl. $\mu\times\nu$.

(Einzelheiten s.: Deitmar-Echterhoff, "Principles...", Appendix B. 3)

L^p-Räume: $(X,\mathcal{A},\mu)$ sei ein zunächst beliebiger Maßraum.
Für eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $f: X\to\mathbb{C}$ und $1\le p<\infty$ setzt man

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

und $\|f\|_\infty := \inf\{c>0: \mu(\{|f|>c\})=0\}$.

Man definiert für $1\le p\le\infty$ die Vektorräume

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} : f\ \mathcal{A}\text{-meßbar und } \|f\|_p < \infty \}.$$

Dann ist $\|f\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ eine Halbnorm. Um hieraus einen normierten Vektorraum zu erzeugen setzt man

$$N := \{ f : X \to \mathbb{C} : f\ \mathcal{A}\text{-meßbar und } \mu\{f(x) \neq 0\} = 0 \},$$

den Untervektorraum der sogenannten <u>Nullfunktionen</u>. Anschließend bildet man den Quotienten

$$L^p(X,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) / N$$

und stattet diesen mit $\|f+N\|_p := \|f\|_p$ aus. (Das ist jedenfalls die formale Definition – niemand rechnet tatsächlich mit diesen Äquivalenzklassen, sondern mit der oben definierten Halbnorm!)

Kurzschreibweisen: $L^p(\mu)$; $L^p(X)$, wenn auf X eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Maß μ ausgezeichnet sind.

Bemerkungen:

(i) Für $1<p<\infty$ ist der Beweis der Δ-Ungleichung leicht straight-forward. Man benötigt die <u>Hölder-sche Ungleichung</u>

$$\|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad 1\leq p,p' \leq \infty,$$

allgemeiner

$$\|f\cdot g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_r, \quad \frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}, \quad p,q,r \geq 1.$$

(ii) Die Funktionenräume $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ sind für $1 \le p \le \infty$ vollständig, also Banachräume (<u>Satz von Fischer-Riesz</u>). 1.25

Der Beweis dieses Satzes zeigt:

Ist $(f_n)_n$ eine Folge in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ die bezüglich $\| \ \|_p$ gegen ein $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, für die $\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ μ-fast überall gilt. Mehr als die Konvergenz einer Teilfolge kann man an dieser Stelle nicht erreichen.

(iii) Mit der Konstruktion des Integrals als Grenzwert von Treppenfunktionen erreicht man, dass die <u>Treppenfunktionen</u> einen <u>dichten Teilraum</u> von $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ bilden. Falls $1 \le p < \infty$ ist, handelt es sich um solche $t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$, für die $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt.

(Brauchbarere dichte Teilräume – etwa $C_c(X)$ – erfordern mehr Struktur, z.B. eine Topologie auf X; dazu später.)

1.1.4 Darstellungssätze

Zunächst einige Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis:

Seien E und F normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $A: E \to F$ linear, so heißt A <u>beschränkt</u>, wenn

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < \infty.$$

Äquivalent hierzu sind die Aussagen:

- A ist stetig in $x_0 = 0$;
- A ist stetig;
- A ist gleichmäßig stetig.

Man definiert den normierten Vektorraum

$$L(E,F) := \{A: E \to F,\ A \text{ ist beschränkt}\}$$

mit der oben definierten Norm, der sog. "Operator-Norm". Es gilt: Ist F vollständig, so ist auch $L(E,F)$ vollständig, also ein Banachraum.

Ist $E = F$, so schreibt man kurz $L(E)$ statt $L(E,E)$. Die Operatornorm ist submultiplikativ, d.h. für $A, B \in L(E)$ haben wir $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, die Multiplikation ist hier die Komposition der linearen Abbildungen. Es gilt also:

$L(E)$ ist eine normierte Algebra, falls E vollständig ist, eine Banach-Algebra.

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist der Raum

$$E' := L(E, \mathbb{K}) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } = \mathbb{C})$$

aller stetigen linearen Funktionale $y : E \to \mathbb{K}$. Dieser wird als (topologischer) Dualraum von E bezeichnet (im Ggs. zum "algebraischen Dualraum", der auch unstetige Linearformen umfassen kann). Norm auf E' also

$$\|y\|_{E'} := \sup\{\, |y(x)| : x \in E,\ \|x\| \le 1 \}.$$

Bei den folgenden Darstellungssätzen, die im wesentlichen auf ~~Marcel~~ Fredric Riesz zurückgehen, geht es darum, gut handhabbare Darstellungen aller stetigen linearen Funktionale auf den Räumen $L^p(\mu)$ und $C_0(X)$ zu bestimmen.

1. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 < p < \infty$. Dann ist die lineare Abbildung $\varphi : L^{p'}(\mu) \longrightarrow (L^p(\mu))'$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, def. durch $\varphi(g)[f] := \int f \cdot g \, d\mu$ ein isometrischer Isomorphismus.

   D.h. im wesentlichen: Jedes stetige lineare Funktional $y : L^p(\mu) \to \mathbb{K}$ besitzt eine Darstellung $y[f] = \varphi(g)[f]$ wie oben definiert und es gilt $\|y\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^{p'}}$. (Kurz: $(L^p(\mu))' = L^{p'}(\mu)$)

2. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann gilt im selben Sinne wie oben: $(L^1(\mu))' = L^\infty(\mu)$.
   (Elstrodt: Maßtheorie, Kap VII, Satz 3.2.)

3. Sei (X,τ) ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum.

Dann ist $\varphi : M(X) \longrightarrow (C_0(X))'$, def. durch

$$\varphi(\mu)[f] := \int f \, d\mu$$

ein isometrischer Isomorphismus.

(Insbesondere gilt: $\|\mu\| = \sup\{|\int f \, d\mu| : f \in C_0(X), \|f\|_\infty \leq 1$

(Rudin: Real and complex..., Thm. 6.19. Sog. Riesz'scher Darstellungssatz, in dieser Allgemeinheit zuerst bewiesen von Kakutani (1941)).

4. Sei (X,τ) ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum.

Ein lineares Funktional I auf $C_c(X)$ heißt positiv, wenn $I(f) \geq 0$ ist für alle $f \in C_c(X)$ mit $f(x) \geq 0 \ \forall x \in X$.

Bem.: I ist i. allg. nicht stetig!

Satz: Zu jedem positiven linearen Funktional I auf $C_c(X)$ existiert genau ein äußeres Radon-Maß μ auf $\mathcal{B}(X)$, sodass $I(f) = \int f \, d\mu$.

(μ ist ein positives Maß.)

Dieser Satz wird ebenfalls als Riesz'scher Darstellungssatz bezeichnet F. Riesz (1909).