0.2 Fourierintegrale und Komposition für Distributionen

In Abschnitt 0.1 haben wir für die periodischen Funktionen der Einfachheit halber stets angenommen, dass die Periodenlänge 2π beträgt. Die Verallgemeinerung auf beliebige Periodenlängen $2L > 0$ ist leicht weiter schwierig. Sei dazu $f(x) = f(x+2L)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Dann suchen wir eine Entwicklung

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi^L \underbrace{e^{i\xi \frac{\pi}{L} x}}_{2L\text{-periodisch}} .$$

Gleichmäßige Konvergenz voraussetzend erhalten wir wie zuvor

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi^L \underbrace{\int_{-L}^{L} e^{i(\xi-k)\frac{\pi}{L}x} dx}_{= 2L\,\delta_{\xi,k}} = 2L c_k^L ,$$

d.h.: $$c_k^L = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx =: \hat{f}^{(L)}(k),$$

und hierauf lassen sich dann $2L$-periodische Probleme behandeln. Nun kann man (als Analytiker/in) auf die Idee verfallen, im Grenzwert $L \to \infty$ eine "Fourierreihe" (oder etwas ähnliches) für nichtperiodische Funktionen zu erhalten. Nehmen wir $f \in L^1(\mathbb{R})$ an und halten $k \in \mathbb{Z}$ fest, so ergibt ein erster naiver Versuch

$$\lim_{L \to \infty} \hat{f}^L(k) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\chi_{(-L,L)}(x)\, f(x)\, e^{-i\frac{k\pi}{L}x}}_{|\ldots| \leq |f(x)|} dx = 0$$

nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz. Ein erster Reparaturversuch der Form

$$\lim_{L\to\infty} 2L\, \hat{f}^{(L)}(k) = \lim_{L\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-L,L)}(x)\, f(x)\, e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

löst das Problem nicht. Das Ergebnis ist zwar von Null verschieden, aber auch unabhängig von $k \in \mathbb{Z}$. Eine Rekonstruktion von f aus den Fourierkoeffizienten ist damit nicht realisierbar.

Ausweg: Bei der Grenzwertbildung $L \to \infty$ hält man nicht k, sondern die zusammengesetzte Größe $\xi := k \cdot \frac{\pi}{L}$ ($\Rightarrow k = \frac{L\xi}{\pi}$) fest. Dann ist

$$\lim_{L\to\infty} 2L\, \hat{f}^{(L)}\left(\frac{\xi L}{\pi}\right) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-ix\xi} dx =: \tilde{f}(\xi).$$

Bis hierher war nur $f \in L^1(\mathbb{R})$ erforderlich. Jetzt nehmen wir $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} f \subset [-L, L]$ an. Dann ist nach dem Satz von Lipschitz für $x \in [-L, L]$:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}^{(L)}(k)\, e^{i\frac{k\pi}{L}x} \underset{\xi = \frac{k\pi}{L}}{=} \sum_{\xi \in \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}} \hat{f}^{(L)}\left(\frac{\xi L}{\pi}\right) \cdot e^{ix\xi}$$

$$= \sum_{\xi \in \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}} \tilde{f}(\xi)\, e^{ix\xi}$$ aufgrund der an f gestellten Trägerbedingung

Jetzt machen wir die Substitution rückgängig und erhalten:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(\underbrace{k\tfrac{\pi}{L}}_{=:\xi_k}) \cdot e^{i\frac{k\pi}{L}x} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{L}}_{\xi_k-\xi_{k-1}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(\xi_k)\, e^{i\xi_k x}(\xi_k - \xi_{k-1}),$$

was die Riemann-Summe (bei äquidistanter Zerlegung) eines uneigentlichen Riemann-Integrals ist. Für $L\to\infty$ ergibt sich also

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi,$$

wenn nur $\tilde{f}(\xi)\to 0$ $(|\xi|\to\infty)$ hinreichend schnell, was für $f\in C_0^2(\mathbb{R})$ $(\Rightarrow \tilde{f}(\xi) \lesssim \langle\xi\rangle^{-2})$ gewährleistet ist. Diese Heuristik lässt die folgende Definition fast von selbst erscheinen. Wir verallgemeinern gleich auf höhere Raumdimensionen und wählen eine etwas andere Normierung:

<u>Def.</u>: Für $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt die Funktion $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definiert durch

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \qquad \left(x\xi = \sum_{i=1}^n x_i\xi_i\right)$$

die <u>Fouriertransformierte</u> von f. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f := \hat{f}$$

heißt die <u>Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$</u>.

Da wir die Definition der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ motiviert haben, ist es nicht erstaunlich, dass einige der grundlegenden Eigenschaften vom periodischen auf den nichtperiodischen Fall vererbt werden:

(i) Auch für $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ gilt das Riemann-Lebesguesche Lemma: $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_{(0)}(\mathbb{R}^n),\ f \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f := \hat{f}$ ist stetig, linear und injektiv.

(Hierbei ist $C_{(0)}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{\xi \to \infty} f(\xi) = 0 \}$.)

(ii) Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt die Fourierinversionsformel

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi .$$

(iii) Bei der Parsevalschen Gleichung ist ein wenig Vorsicht geboten, da $L^2(\mathbb{R}^n) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Aber für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ hat man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi ,$$

speziell ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Die Einschränkung

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\big|_{L^1 \cap L^2} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ist also isometrisch. Das erlaubt eine gleich-

mäßig stetige Fortsetzung

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

für die die Parsevalsche Gleichung gilt. Das Bild von $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n}$ ist daher abgeschlossen und enthält den in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dichten Teilraum $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ (wegen der Fourier-Inversionsformel!). $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n}$ ist also surjektiv und somit ein isometrischer Isomorphismus.

Die Beweise für (i) bis (iii) werden in Kapitel 1 im abstrakten Rahmen nachgeliefert. Das gilt auch für den bisher noch nicht erwähnten

(iv) Faltungssatz: Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$,

der entsprechend auch für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ gilt.

(v) Ebenso wie im periodischen Fall gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\widehat{\nabla^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

vgl. Lemma 3 in Abschnitt 0.1. Der Beweis führt man ganz genauso mit partieller Integration, wobei die Randterme wegfallen. Die Eigenschaft, partielle Ableitungen in die Multiplikation mit der entsprechenden Komponente zu überführen, macht die Fouriertransformation sehr nützlich für die

Eine Eigenschaft, die im periodischen Fall <u>nicht</u> zur Verfügung steht, ist das

(vi) Verhalten der Fouriertransformation bei Skalentransformationen: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und, für $\lambda > 0$, $g(x) = f(\lambda x)$, so gilt

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-ix\xi} dx \qquad y = \lambda x,\ dx = \lambda^{-n} dy$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{\lambda}} dy = \lambda^{-n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

<u>Bsp.</u>: (1) Als bekannt (aus PDG, Abschnitte 3.1 u. 3.2) möchte ich voraussetzen

(i) das <u>eindimensionale</u> Bsp. $\hat{\chi}_{(-1,1)}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}$,

(ii) die Fouriertransformierte von Gaussfunktionen

$$G_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto G_\beta(x) = e^{-\beta \frac{|x|^2}{2}} \quad (\beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\beta > 0).$$

Hierfür ist mit dem Hauptzweig der komplexen Wurzel

$$\hat{G}_\beta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\beta}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{2\beta}}.$$

Insbesondere ist $G_1(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ ein Eigenvektor von $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ zum Eigenwert $\lambda_0 = 1$.

(2) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^{-|x|}$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} .$$

(Hierbei $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ die Gamma-Funktion.)

Bew.: (i) Der Fall $n=1$:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^x e^{-ix\xi} dx + \int_0^\infty e^{-x} e^{-ix\xi} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\xi} e^{x(1-i\xi)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-1-i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \Big|_0^\infty \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} ,$$

was wegen $\Gamma(1) = 0! = 1$ die Behauptung für $n=1$ ist.

(ii) Zur Behandlung des höherdimensionalen Falles zeigen wir die Identität

$$e^{-|t|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-y} \cdot e^{-\frac{t^2}{4y}} \frac{dy}{\sqrt{y}} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

indem wir die Übereinstimmung der Fouriertransformierten beider Seiten nachweisen:

$$\mathcal{F}_t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y} e^{-\frac{t^2}{4y}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y} \mathcal{F}_t\left(e^{-\frac{t^2}{2(2y)}}\right)(\xi) \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

so dass wir Bsp. (1; ii)) mit $\beta = \frac{1}{2y}$ und $n=1$ verwenden können:

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \sqrt{2y} \cdot e^{-y} \cdot e^{-y\xi^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-y(1+\xi^2)} dy \ldots$$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$, wobei im letzten Schritt $t = y(1+\xi^2)$ substituiert wurde. Nach Schritt (i) ist das auch die Fourier-transformierte von $e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$.

(iii) Jetzt führen wir die Rechnung aus (ii) nochmal für höhere Dimensionen durch:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y} \cdot \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2(2y)}}(\xi) \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

Jetzt wieder Bsp. (i), (ii)

$$= \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-y(1+|\xi|^2)} dy.$$

Wir substituieren $t = y(1+|\xi|^2) \rightsquigarrow dt = (1+|\xi|^2) dy$

$\rightsquigarrow y^{\frac{n-1}{2}} dy = (1+|\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}} dt$, also das ganze

$$\ldots = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$\square$

Bem.: Den Trick, die Fouriertransformierte einer Funktion f zu berechnen, indem man f als eine Überlagerung von Gaussfunktionen schreibt, habe ich aus dem Buch "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces" von Elias M. Stein und Guido Weiss gelernt. Stein nennt dieses Argument an anderer Stelle "the subordination principle". Wir werden später noch eine weitere Anwendung sehen.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen dem periodischen und dem nichtperiodischen Fall wird durch die nachstehende "Poissonsche Summationsformel" hergestellt:

Satz 1: Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-n-\delta}$ und $|\hat{f}(\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{-n-\delta}$ $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Dann gelten

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \qquad (1)$$

insbesondere für $x = 0$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)$$

und für $\varphi = \hat{f}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(x + 2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(k) e^{-ikx}. \qquad (2)$$

Bew.: Wir setzen $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi k)$. Da für alle $x \in [-\pi, \pi]^n$ und $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$|f(x - 2\pi k)| \lesssim \langle x - 2\pi k \rangle^{-n-\delta} \lesssim \langle k \rangle^{-n-\delta},$$

konvergiert die Reihe gleichmäßig nach Weierstraß. Da f wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ als stetig angenommen werden kann, gilt dies auch für F. Ferner ist F 2π-periodisch, ebenso wie die rechte Seite von (1). Wegen der Injektivität von $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ reicht es,

$\hat{F}(k) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f}(k)$ zu zeigen. (Hierbei ist $\hat{F}(k)$ der Fourierkoeffizient von F und $\hat{f}(k)$ die Fouriertransformierte von f an der Stelle k!) Nun ist

$$\hat{F}(k) = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{T}^n} F(x) e^{-ikx} dx = (2\pi)^{-n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi\ell) e^{-ikx} dx$$

$$\overset{\text{glm. Konv.}}{=} (2\pi)^{-n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n - 2\pi\ell} f(x) e^{-ikx} dx = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \hat{f}(k).$$

Damit ist (1) gezeigt, die zweite Gleichung ergibt sich für $x = 0$ (und $k \mapsto -k$ auf der linken Seite). Für (2) setzen wir $\psi = \hat{f}$, so dass $\hat{\psi}(x) = \hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Dann geht (1) über in

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(-x + 2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(k) \cdot e^{+ikx},$$

woraus (2) folgt, wenn wir x durch $-x$ ersetzen. $\square$

Es gibt also verschiedene Parallelen und Verbindungen zwischen Fourierreihen und Fourierintegralen. Verbirgt sich dahinter eine allgemeinere Struktur?

Eine Möglichkeit zu einer vereinheitlichten Darstellung bietet die Theorie der <u>temperierten Distributionen</u>. Hierbei behält man den $\mathbb{R}^n$ mit seiner Euklidischen Struktur als gemeinsamen Definitionsbereich aller betrachteten (verallgemeinerten) Funktionen bei.

Ferner erhält man die Eigenschaft der Fouriertransformation, partielle Ableitungen in Multiplikatoren umzuwandeln, die sie für die Behandlung partieller Dglen. so nützlich macht. Also zu den Einzelheiten:

<u>Def.</u>: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $j \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Halbnormen

$$\varrho_j(f) := \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^j |\nabla^\alpha f(x)|.$$

Der Vektorraum

$$S(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \varrho_j(f) < \infty \ \forall j \in \mathbb{N}_0 \}$$

heißt der <u>Schwartz-Raum</u>. Seine Elemente werden als <u>schnell fallende</u> (oder auch als Schwartz-) <u>Funktionen</u> bezeichnet. Durch

$$d_S(f,g) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f-g)}{1+\varrho_j(f-g)}$$

wird eine Metrik auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert.

<u>Bem.</u>: (1) $S(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, der $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ umfasst.

(2) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{n+1} |f(x)|^p \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-n-1} dx$$

$$\lesssim \varrho_{n+1}(f) < \infty \quad \text{(letzteres, wenn } f \in S(\mathbb{R}^n) \text{ ist).}$$

Insbesondere ist $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass Fourier-

transformation und Faltung für $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert sind.

(3) Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ und für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch $S(\mathbb{R}^n)$ ein dichter linearer Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$, sofern $1 \leq p < \infty$ ist.

(4) $(S(\mathbb{R}^n), d_S)$ ist vollständig. (Das ist nicht trivial, aber eine Standardkonstruktion in FunktAna $\rightarrow$.)

Bsp.: (1) Die Gaussfunktionen

$$G_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto G_\beta(x) = e^{-\beta \frac{|x|^2}{2}}$$

gehören zu $S(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{Re} \beta > 0$ ist.

(2) Ist $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und sind $P, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Polynome, so sind auch $Pf \in S(\mathbb{R}^n)$ und $Q(\nabla) f \in S(\mathbb{R}^n)$.

(3) $f, g \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \cdot g \in S(\mathbb{R}^n)$ und $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$.

(4) Nicht zu $S(\mathbb{R}^n)$ gehören z. B.

$f(x) = e^{-|x|}$ (nicht diffbar in $x_0 = 0$) und

$g(x) = \langle x \rangle^{-N}$ (für festes $N \in \mathbb{N}$, fällt nicht schnell genug).

Konvergenz in $S(\mathbb{R}^n)$ und Stetigkeit von Funktionen von $S(\mathbb{R}^n)$ in einen weiteren metrischen Raum sind durch die Angabe der Metrik d_S definiert. Oft ist das nachstehende Kriterium jedoch leichter zu handhaben:

Lemma 1: (1) Eine Folge $(f_k)_k \subset S(\mathbb{R}^n)$ konvergiert genau dann gegen $f \in S(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{k\to\infty} \varrho_j(f_k - f) = 0$.

(2) Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, wenn gilt: $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists N = N(j) \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\varrho_j(Af) \lesssim_j \sum_{i=0}^{N} \varrho_i(f) \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

(3) Es sei $(E, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum. Eine lineare Abbildung $A : S(\mathbb{R}^n) \to E$ ist genau dann stetig, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\| Af \| \lesssim \sum_{j=0}^{N} \varrho_j(f) \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Bem.: Wir können (3) mit $(E, \| \ \|) = (\mathbb{C}, | \ |)$ verwenden, um zu überprüfen, ob ein lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ stetig ist.

Bew. (von (1) und (2), (3) geht wie (2)):

(1) Sei $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ in $S(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$0 = \lim_{k\to\infty} d_S(f_k, f) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f_k - f)}{1 + \varrho_j(f_k - f)}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{k\to\infty} \varrho_j(f_k - f) / 1 + \varrho_j(f_k - f) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{k\to\infty} \varrho_j(f_k - f) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

weil $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ auf $[0,\infty)$ eine stetige Umkehrfunktion besitzt.

Umgekehrt gelte $\lim_{k\to\infty} \varrho_j(f_k - f) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$.

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f_k - f)}{1 + \varrho_j(f_k - f)} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ergibt der Lebesguesche Konvergenzsatz, angewendet auf $\sum_{j=0}^{\infty}$ mit Majorante $(2^{-j})_{j\in\mathbb{N}_0}$, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f_k - f)}{1 + \varrho_j(f_k - f)} = 0.$$

(2) Zuerst sei $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und es gelte die angegebene Abschätzung. Weiter sei $(f_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k = f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (mit Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\varrho_j(A(f_k - f)) \lesssim_j \sum_{i=0}^{N} \varrho_i(f_k - f) \to 0 \ (k\to\infty) \text{ nach (1).}$$

Daraus folgt, ebenfalls nach (1), dass $\lim_{k\to\infty} Af_k = Af$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Umgekehrt sei $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig im Nullpunkt, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(f)}{1 + \varrho_j(f)} < \delta$$

$$\text{gilt, dass } \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\varrho_j(Af)}{1 + \varrho_j(Af)} < \varepsilon.$$

Nun sei ein beliebiger Index $j_0 \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben. Dann existiert zu $\varepsilon = 2^{-j_0 - 1}$ ein $\delta > 0$, so dass

$d_S(Af,0) < 2^{-j_0-1}$, also insbesondere

$$2^{-j_0}\frac{\varrho_{j_0}(Af)}{1+\varrho_{j_0}(Af)} < 2^{-j_0-1}$$

$$\Longrightarrow \varrho_{j_0}(Af) < \frac{1}{2}(1+\varrho_{j_0}(Af)) < 1.$$

Ist dann weiter $\frac{\delta}{2} \leq d_S(f,0) < \delta$, so ist

$$\varrho_{j_0}(Af) < 1 \leq \frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} \leq \frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{N} 2^{-j}\frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} + \frac{1}{2}$$

für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Weiter folgt

$$\varrho_{j_0}(Af) \leq 1 \leq \frac{4}{\delta}\cdot\sum_{j=0}^{N} 2^{-j}\frac{\varrho_j(f)}{1+\varrho_j(f)} \leq \frac{4}{\delta}\sum_{j=0}^{N}\varrho_j(f).$$

Sowert gilt das für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\delta}{2} \leq d_S(f,0) < \delta$.

Ist nun $f \in S(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ beliebig, so wählen wir $\lambda > 0$, so dass $\frac{\delta}{2} \leq d_S(\lambda f,0) < \delta$. Dann ist

$$\varrho_{j_0}(Af) = \frac{1}{\lambda}\varrho_{j_0}(A\lambda f) \lesssim \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{N}\varrho_j(\lambda f) = \sum_{j=0}^{N}\varrho_j(f). \qquad \square$$

Bsp.: (1) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ sei definiert durch $Af(x) = x^\gamma \cdot f(x)$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ fest. Dann ist für $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\varrho_j(Af) = \max_{|\alpha|\leq j}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^j|\nabla^\alpha x^\gamma f(x)|$$

$$\lesssim \max_{|\alpha|\leq j}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^{j+|\gamma|}|\nabla^\alpha f(x)| \leq \varrho_{j+|\gamma|}(f)$$

Lemma 1 ergibt die Stetigkeit von A.

Folgerung: Ist $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ein Polynom und

$M_P: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto M_P f$ def. durch $M_P f(x) = P(x) \cdot f(x)$,

so ist M_P stetig.

(2) $A: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto Af := \nabla^\gamma f$ ($\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ fest)

ist stetig, denn

$$\varrho_j(Af) = \max_{|\alpha| \le j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^j |\nabla^{\alpha+\gamma} f(x)| \le \varrho_{j+|\gamma|}(f).$$

Allgemeiner ist auch jeder lineare Differentialoperator $P(\nabla): S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ mit einem Polynom in n Variablen stetig.

Satz 2: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Bew.: Wir wissen bereits, dass $\widehat{\nabla^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Ferner gilt

$$\widehat{x_j f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

$$= i (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = i \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$$

und also $\widehat{x^\gamma f} = i^{|\gamma|} \nabla_\xi^\gamma \hat{f}$. Daher ist

$$\varrho_j(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f) = \max_{|\alpha| \le j} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^j |\nabla_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|$$

$$\leq \max_{|\alpha|,|\beta|\leq j} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}(x^\alpha \nabla^\beta f)(\xi)|$$

$$\leq \max_{|\alpha|,|\beta|\leq j} \| x^\alpha \nabla^\beta f \|_1 \qquad \text{(Riemann-Lebesgue)}$$

$$\lesssim \max_{|\beta|\leq j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{j+n+1} |\nabla^\beta f(x)| \leq S_{j+n+1}(f).$$

D.h.: Für $f\in S(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}\in S(\mathbb{R}^n)$ und die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}: S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig.

Damit gilt auch die Fourierinversionsformel, die Inverse Abbildung ist gegeben durch

$$\check{f}(x) := \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\,d\xi = \hat{f}(-x).$$

Als Verknüpfung von $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ mit der Reflexion $R\hat{f}(x)=\hat{f}(-x)$ ist diese ebenfalls stetig. $\square$

<u>Beispiele</u> stetiger linearer Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$:

(1) reguläre Distributionen: Es sei $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$

(i) messbar und von moderatem Wachstum, d.h. es existieren $C>0$ und $N\in\mathbb{N}_0$, so dass

$$|g(x)| \leq C\langle x\rangle^N \qquad \text{oder}$$

(ii) $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p\in[1,\infty]$ oder

(iii) $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$.

Dann ist $T_g : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, def. durch $T_g[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx$ ein stetiges lineares Funktional.

Begründung:

(i) $|T_g[f]| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} |g(x)| \langle x \rangle^N |f(x)| dx$

$$\leq C \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^N |f(x)| dx \lesssim_g \varrho_{N+n+1}(f).$$

(ii) Die Hölder'sche Ungleichung ergibt

$$|T_g[f]| \leq \|g\|_p \|f\|_{p'} \leq \|g\|_p \varrho_{n+1}(f)$$

(iii) $|T_g[f]| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) g(x)| dx$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{n+1} |f(x)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-n-1} |g(x)| dx$$

$$= \varrho_{n+1}(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n + 2\pi k} \langle x \rangle^{-n-1} |g(x)| dx$$

$$\lesssim \varrho_{n+1}(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-n-1} \int_{\mathbb{T}^n} |g(x)| dx \leq \varrho_{n+1}(f) \|g\|_1$$

Bem.: Sind T_{g_1} und T_{g_2} stetige lineare Funktionale, so auch $T_{g_1} + T_{g_2} = T_{g_1+g_2}$. Insofern umfasst Bsp. (1) z.B. auch die folgende Situation: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ messbar, $\exists R > 0$, so dass $g \cdot \chi_{B_R(0)} \in L^1$, $g(x) \chi_{B_R(0)^c}(x) \lesssim \langle x \rangle^N$.

(2) Es sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ ein Maß mit der Eigenschaft, dass ein $N \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} \, d\mu(x) < \infty.$$

Dann wird durch $T_\mu[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$ ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R}^n)$ definiert, da

$$|T_\mu[f]| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-N} \, d\mu(x) \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^N |f(x)|.$$

Bem.: (1) Hier kann man auch komplexe Maße der Form $\mu = \mu_+ - \mu_- + i(\nu_+ - \nu_-)$ zulassen, wenn $\mu_\pm$ und $\nu_\pm$ endliche Maße sind.

(2) Bei den Beispielen (1) und (2) unterscheidet man im praktischen Gebrauch nicht mehr zwischen Funktion g bzw. Maß μ einerseits und den dadurch induzierten linearen Funktionalen T_g bzw. T_μ andererseits. Insbes. ist die Bez. $\mu[f]$ anstelle von $T_\mu[f]$ gebräuchlich.

Spezialfälle von (2):

(i) Endliche Borelmaße, insbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^n$ (mit $P(\mathbb{R}^n) = 1$) und Dirac-Maße $\delta_{x_0}[f] := f(x_0)$ mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Reihen von Dirac-Maßen, z. B. der Form $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \delta_k$, sofern die Koeffizienten einer Wachstumsbedingung $|c_k| \lesssim (k)^N$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ genügen.

(iii) Auf k-dim. Hyperflächen S konzentrierte "Flächenmaße", als Funktionale der Form

$$\sigma_\varrho[f] = \int_S f(x)\,\varrho(x)\,d\sigma_x \qquad (d\sigma_x = \sqrt{g(t)}\,dt),$$

Gramsche Det.

sofern Flächenmaß und die stetige Dichtefunktion $\varrho : S \to [0,\infty)$ der o.g. Wachstumsbedingung genügen.

(3) Lineare Funktionale, bei denen Ableitungen involviert sind, etwa

(i) $T : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto T[f] := \nabla^\gamma f(x_0)$ (mit festen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$). Hierfür ist $|T[f]| \leq S_{|\gamma|}(f)$.

(ii) Der Cauchy-sche Hauptwert von $\frac{1}{x}$ ($n = 1$!):

$$\underbrace{\text{P.V.}\frac{1}{x}}_{T}[f] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

Auch hierdurch wird ein stetiges lineares Funktional auf $S(\mathbb{R})$ definiert, denn

$$|T[f]| \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)}{x}\,dx \right| + \int_{|x|>1} |f(x)|\,dx =: I_\varepsilon + II$$

mit $II \leq S_2(f)$ und

$$I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx \right| \leq 2 \sup_{|\eta|\leq 1} |f'(\eta)|$$

$$\leq S_1(f)$$

(4) Keine (stetigen) linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ sind:

(i) T_g für Funktionen, die zu schnell wachsen, wie z.B. $g(x) = e^{|x|}$ oder $g(x) = e^{|x|^2}$

(ii) Reihen wie in (2), (ii), also $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k \delta_k$ mit z.B. $\delta_k = e^{|k|}$.

(Diese sind gar nicht für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert!)

Def.: Den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $S(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir mit $S'(\mathbb{R}^n)$. Seine Elemente heißen <u>temperierte</u> <u>Distributionen</u>.

Der Zusatz "temperiert" = gemäßigt dient zur Unterscheidung von der etwas größeren Klasse der <u>Distributionen</u> (ohne weiteren Zusatz, vgl. EPDG), das sind stetige Linearformen auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist ein lineares Funktional $T: C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ stetig genau dann, wenn gilt:

$\forall$ Kompakta $K \subset \mathbb{R}^n$ existieren $C_K > 0$, $N_K \in \mathbb{N}$, so dass $|T[f]| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq N_K} \|\nabla^\alpha f\|_\infty$ $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset K$.

(Die linearen Funktionale in Bsp. (4) sind also Distributionen, aber nicht temperiert.)

Def.: Eine Folge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S'(\mathbb{R}^n)$ heißt konvergent in $S'(\mathbb{R}^n)$ gegen $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, wenn für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} T_k[f] = T[f].$$

Bem.: (1) Man schreibt $S'\text{-}\lim_{k\to\infty} T_k = T$, $T_k \xrightarrow[S']{} T$, oder, wenn der Zusammenhang es erlaubt, $\lim_{k\to\infty} T_k = T$.

(2) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, denn aus $T[f] = \lim_{k\to\infty} T_k[f] = \tilde{T}[f]$ $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$ folgt $T = \tilde{T}$.

(3) Diese Form der Konvergenz im linearen Dualraum wird als "schwach-*-Konvergenz" bezeichnet. (Andere Konvergenzbegriffe auf $S'(\mathbb{R}^n)$ werden wir in dieser Vorlesung nicht in Betracht ziehen.)

Dieser Form der Konvergenz angepasst ist die folgende Definition der Stetigkeit linearer Abbildungen in $S'(\mathbb{R}^n)$:

Def.: Eine lineare Abbildung $A: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ heißt stetig, wenn für jede Nullfolge $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $S'(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $S'\text{-}\lim_{k\to\infty} AT_k = 0$.

Bem.: Genauer gesprochen sollte man A "schwach-*-stetig" nennen. Da wir hier jedoch keinen stärkeren Stetigkeitsbegriff auf $S'(\mathbb{R}^n)$ einführen, erübrigt sich dieser Zusatz.

<u>Lemma 2</u>: Es sei $A_0 : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ eine lineare Abbildung und $A : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$AT[f] := T[A_0 f].$$

Dann ist A linear und stetig.

Bew.: Die Linearität ergibt sich unmittelbar aus der Definition. Für die Stetigkeit sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $S'(\mathbb{R}^n)$, d.h. es gelte $\lim_{k\to\infty} T_k[f] = 0 \ \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Dann ist $\lim_{k\to\infty} AT_k[f] = \lim_{k\to\infty} T_k[A_0 f] = 0 \ \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Mit diesem schlichten Lemma steht uns eine Konstruktion zur Verfügung, mit der wir eine ganze Reihe linearer Abbildungen $A_0 : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ zu stetigen linearen Abbildungen $A : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können. Dabei wird der Definitionsbereich (von A_0) jeweils erheblich erweitert. Dennoch unterscheidet man in der Praxis dann nicht mehr zwischen A und A_0.

(1) Die Distributionsableitung: Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Dann definiert man

$$\nabla^\gamma : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n),\ T \mapsto \nabla^\gamma T$$

durch die Regel der partiellen Integration, d.h.

$$\nabla^\gamma T[f] := (-1)^{|\gamma|} T[\nabla^\gamma f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Auf diese Weise erreicht man, dass jede Distribution unendlich oft differenzierbar ist.

(2) Multiplikation mit einer Funktion $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ moderaten Wachstums, d.h. mit

$$|a(x)| \lesssim \langle x \rangle^N \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}_0 .$$

Für solche Funktionen ist der Multiplikator

$$M_a : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n),\ f \mapsto M_a f \quad \text{mit } M_a f(x) = a(x) f(x)$$

wohldefiniert und linear. Die Abbildung

$$M_a : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n),\ T \mapsto M_a T \quad \text{mit } M_a T[f] = T[a \cdot f]$$

ist linear und stetig (nach Lemma 2). Für die Ableitung eines solchen Produkts gilt die Produktregel.

(3) Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ sind Translationen und lineare Bijektionen definiert durch

$$\tau_b f(x) = f(x-b) \quad (b \in \mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad Af(x) = f(Ax),\ A \in GL(n).$$

Dabei handelt es sich um stetige lineare Abbildungen von $S(\mathbb{R})$ nach $S(\mathbb{R})$. Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ setzt man

$$\tau_b T[f] := T[\tau_{-b} f], \quad AT[f] := \frac{1}{|\det A|} T[A^{-1} f]$$

und erhält nach Lemma 2 stetige lineare Abbildungen

gen in $S'(\mathbb{R}^n)$. Die Inversen bzw. der Vorfaktor $\frac{1}{|\det A|}$ sind so gewählt, um Konsistenz mit den regulären Distributionen zu erreichen; z. B.:

$$A T_g[f] \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{|\det A|} T_g[A^{-1} f] \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{|\det A|} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \cdot f(A^{-1}x)\, dx$$

und mit der Transformation $y = A^{-1}x \rightsquigarrow dx = |\det A|\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(Ay) f(y)\, dy = T_{Ag}[f].$$

Bem.: Die Verknüpfung von $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit einer nichtlinearen Transformation $\psi: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ lässt sich im Allgemeinen nicht in sinnvoller Weise definieren (auch nicht, wenn ψ diffeomorph ist).

(4) Faltung von $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ mit $g \in S(\mathbb{R}^n)$: man setzt $Rg(x) := g(-x)$ und $T * g[f] := T[Rg * f]$ $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann ist bei festem $g \in S(\mathbb{R}^n)$ die Abbildung

$$* g : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n),\ T \mapsto T * g$$

linear und stetig nach Lemma 2. Die Reflexion R wird eingefügt, um Übereinstimmung für die regulären Distributionen zu erzielen. Dazu sei h eine messbare Funktion mit moderatem Wachstum. Dann haben wir

$$T_h * g\,[f] \underset{\text{Def.}}{=} T_h\,[R_g * f] \underset{\text{Def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, R_g * f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) f(y)\, dy\, dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) h(x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g * h(y)\, dy = T_{g*h}\,[f].$$

(5) Die Fouriertransformation temperierter Distributionen

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad T \longmapsto \mathcal{F}T = \hat{T}$$

wird definiert durch $\hat{T}[f] = T[\hat{f}]$ $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wobei wie bisher

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Hierbei handelt es sich um eine Fortsetzung der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Um dies einzusehen, seien $T = T_g$ mit einer Fkt. $g \in L^1 \cap L^2$ und $h = \bar{\hat{g}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und h die[1] Parseval-Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \bar{h}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, \bar{\hat{h}}(\xi)\, d\xi.$$

Nun ist $\bar{h} = \hat{g}$ und

---

1) bereits erwähnte aber noch zu beweisende

$$\hat{h}(\xi) = \hat{\bar{\hat{g}}}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \bar{\hat{g}}(x)\,dx = (2\pi)^{-n/2} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{g}(x)\,dx} = \bar{g}(\xi),$$

also $\bar{\hat{h}}(\xi) = g(\xi)$ und damit

$$\hat{T}_g[f] \underset{\text{Def.}}{=} T_g[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{h}}(\xi)\,d\xi$$

$$\underset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{\hat{g}}(x)\,dx = T_{\hat{g}}[f].$$

Die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als „Transponierte" der FT auf $S(\mathbb{R}^n)$ und somit linear und stetig nach Lemma 2. Weiter setzen wir für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\check{T}[f] := T[\check{f}],$$

wobei $\check{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)\,d\xi$ die inverse Fouriertransformation auf $S(\mathbb{R}^n)$ ist. Dann gilt

$$\check{\hat{T}}[f] = \hat{T}[\check{f}] = T[\hat{\check{f}}] = T[f] \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

D.h. die Transformation $T \mapsto \check{T}$ ist links zur Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{R}^n)$ und aus denselben Gründen stetig. Damit ist gezeigt:

<u>Satz</u> 3: Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Isomorphismus.

Durch die Definition werden wesentliche Eigenschaften (nicht alle!) von der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $S(\mathbb{R}^n)$ an die distributionelle FT weitergegeben.

Lemma 3: Es seien $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gelten:

(1) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T} = (ix)^\alpha \hat{T}$ und (2) $\widehat{\xi^\alpha T} = (i\nabla_x)^\alpha \hat{T}$.

Bew.: (1) $\widehat{\nabla_\xi^\alpha T}[f] = \nabla_\xi^\alpha T[\hat{f}] = (-1)^{|\alpha|} T[\nabla_\xi^\alpha \hat{f}]$

$\underset{T \in S(\mathbb{R}^n)}{\overset{(2) \text{ für}}{=}} i^{|\alpha|} T[\widehat{x^\alpha f}] = i^{|\alpha|} \hat{T}[x^\alpha f] = (ix)^\alpha \hat{T}[f]$.

(2) $\widehat{\xi^\alpha T}[f] = T[\xi^\alpha \hat{f}] \overset{(1) \text{ für } T \in S(\mathbb{R}^n)}{=} (-i)^{|\alpha|} T[\widehat{\nabla_x^\alpha f}]$

$= (-i)^{|\alpha|} \hat{T}[\nabla_x^\alpha f] = (i\nabla_x)^\alpha \hat{T}[f]$. $\square$

Auch den "Faltungssatz" können wir von $L^1(\mathbb{R}^n)$ bzw. $S(\mathbb{R}^n)$ auf $S'(\mathbb{R}^n)$ hochziehen:

Lemma 4: Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ gelten:

(1) $\widehat{f * T} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{T}$ (2) $\widehat{f \cdot T} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}$.

Bew.: Wir gehen davon aus, dass (1) für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $T \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt[1], und benutzen dies zum Beweis von (2):

---

1) Was im abstrakten Rahmen im nächsten Kapitel nachgeholt wird.

$$\widehat{f\cdot T}[g] = f\cdot T[\hat{g}] = T[f\cdot\hat{g}] = T[\hat{\check{f}}\cdot\hat{g}]$$

$$\underset{(1)}{=} (2\pi)^{-n/2}\, T[\widehat{\check{f}*g}] = (2\pi)^{-n/2}\,\hat{T}[(Rf)*g] = (2\pi)^{-n/2} f*\hat{T}[g]$$

Damit jetzt der Beweis von (1):

$$\widehat{f*T}[g] = f*T[\hat{g}] = T[Rf*\hat{g}] = T[\hat{\check{f}}*\hat{g}]$$

$$\underset{(2)}{=} (2\pi)^{n/2}\, T[\widehat{\hat{f}\cdot g}] = (2\pi)^{n/2}\,\hat{T}[\hat{f}\cdot g] = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\,\hat{T}[g]. \quad \square$$

Bsp.:

(1) Eine reguläre Distribution: Für $\lambda \in (0,n)$ sei

$$g_\lambda(x) := |x|^{-\lambda}.$$

Dann ist $g_\lambda \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ $(x\to\infty)$ und $g_\lambda \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ $(x\to\infty$ oder $x\to 0)$, so dass wir g_λ als Distribution auffassen müssen, um die Fouriertransformierte zu berechnen. Es gilt jedoch $g_\lambda = g_\lambda \chi_{B_1(0)} + g_\lambda \chi_{B_1(0)^c} \in L^1 + L^\infty$, so dass durch

$$T_{g_\lambda}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda(x) f(x)\,dx \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$$

eine reguläre Distribution definiert wird.

Satz 4: $$\hat{g}_\lambda(\xi) = 2^{\frac{n}{2}-\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \cdot g_{n-\lambda}(\xi)$$

(Hierbei $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$.)

Zum Beweis berechnen wir das Integral

$$I := \int_0^\infty e^{-t\frac{|x|^2}{2}}\, t^{\frac{\lambda}{2}-1}\, dt.$$

Wir substituieren

$$s = t\frac{|x|^2}{2} \rightsquigarrow dt = \frac{2}{|x|^2}\, ds \rightsquigarrow t^{\frac{\lambda}{2}-1}\, dt = \left(\frac{2}{|x|^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} s^{\frac{\lambda}{2}-1}\, ds$$

und erhalten

$$I = 2^{\frac{\lambda}{2}} |x|^{-\lambda} \cdot \int_0^\infty s^{\frac{\lambda}{2}-1} e^{-s}\, ds = 2^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma\left(\tfrac{\lambda}{2}\right) |x|^{-\lambda}$$

bzw.

$$g_\lambda(x) = |x|^{-\lambda} = 2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \cdot \int_0^\infty e^{-t\frac{|x|^2}{2}}\, t^{\frac{\lambda}{2}-1}\, dt. \quad (*)$$

Wir stellen fest, dass die Abbildung

$$(x,t) \longmapsto e^{-t\frac{|x|^2}{2}}\, t^{\frac{\lambda}{2}-1} \cdot \hat{f}(x) \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ fest})$$

in $L^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ liegt, da

Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty)} e^{-t\frac{|x|^2}{2}}\, t^{\frac{\lambda}{2}-1} |\hat{f}(x)|\, dx\, dt \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\lambda} |\hat{f}(x)|\, dx < \infty$$

Jetzt wenden wir auf beide Seiten von (*) die Fouriertransformation an und vertauschen hingenehmerweise $\mathcal{F}$ und $\int_0^\infty \cdots dt$:

$$\mathcal{F} g_\lambda(\xi) = \mathcal{F}\left(2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \cdot \int_0^\infty e^{-t\frac{|\cdot|^2}{2}}\, t^{\frac{\lambda}{2}-1}\, dt\right)(\xi)$$

$$\underset{(!)}{=} 2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_0^\infty \mathcal{F}\left(e^{-t\frac{|\cdot|^2}{2}}\right)(\xi)\, t^{\frac{\lambda}{2}-1}\, dt,$$

wobei (!) noch zu verifizieren bleibt. Für die Gaussfunktion (31)

$G_t(x) = e^{-t\frac{|x|^2}{2}}$ wissen wir, dass $\hat{G}_t(\xi) = t^{-n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{2t}}$, so dass

$$\mathcal{F} g_\lambda(\xi) = 2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{|\xi|^2}{2t}} t^{\frac{\lambda-n}{2}-1} dt .$$

Jetzt führt die Substitution $s = \frac{1}{t}$ (mit $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s}$) auf

$$\ldots = 2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \int_0^\infty e^{-s\frac{|\xi|^2}{2}} s^{\frac{n-\lambda}{2}-1} ds$$

$$\underset{(*)}{=} 2^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \Gamma\left(\tfrac{n-\lambda}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n-\lambda}{2}} \cdot |\xi|^{\lambda-n}$$

$$= 2^{\frac{n}{2}-\lambda} \frac{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \cdot g_{n-\lambda}(\xi),$$ wie behauptet.

Für (!) greifen wir auf die Def. der FT auf $S'(\mathbb{R}^n)$ zurück. Mit $C_\lambda = \frac{2^{-\frac{\lambda}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}$ ergibt sich dann

$$\hat{T}_{g_\lambda}[f] = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\lambda} \hat{f}(x)\,dx \overset{(*)}{=} C_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-t\frac{|x|^2}{2}} t^{\frac{\lambda}{2}-1} dt\, \hat{f}(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} C_\lambda \cdot \int_0^\infty t^{\frac{\lambda}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t\frac{|x|^2}{2}} \hat{f}(x)\,dx\,dt$$

$$\underset{\text{in } S'(\mathbb{R}^n)}{\overset{\text{Def}}{=}} C_\lambda \cdot \int_0^\infty t^{\frac{\lambda}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{G}_t(\xi) \cdot f(\xi)\,d\xi\,dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(C_\lambda \int_0^\infty t^{\frac{\lambda}{2}-1} \hat{G}_t(\xi)\,dt \right) f(\xi)\,d\xi = T_{\hat{g}_\lambda}[f],$$

so dass wir $\hat{g}_\lambda(\xi) = C_\lambda \int_0^\infty t^{\frac{\lambda}{2}-1} \hat{G}_t(\xi)\,dt$ ablesen können, und das ist (!). $\square$

(2) Endliche Maße μ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: Sei T_μ die hier-durch induzierte Distribution und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\hat{T}_\mu[f] = T_\mu[\hat{f}] = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi)\, d\xi \; d\mu(x)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, d\mu(x) \; f(\xi)\, d\xi$$

$$= T_{\hat{\mu}}[f]$$

für die gleichmäßig stetige[1] Funktion $\hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\mu$.

Speziell für ein in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konzentriertes Dirac-Maß:

$$\hat{\delta}_{x_0}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\, d\delta_{x_0}(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ix_0\xi},$$

insbesondere $\hat{\delta}_0(\xi) = (2\pi)^{-n/2}$ (konstante Funktion bzw. die dadurch induzierte Distribution.) Wir stellen fest: (i) Die Fourier-transformierte eines endlichen Maßes $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ ist eine glm. stetige, beschränkte Funktion, aber im Gg.s. zu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt i. allg. nicht, dass $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{\mu}(\xi) = 0$.

(ii) $\delta_0 = \hat{\hat{\delta}}_0 = (2\pi)^{-n/2}$, also $1 = (2\pi)^{n/2} \cdot \delta_0$.

1) Weil $|\hat{\mu}(\xi+h) - \hat{\mu}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int |e^{-ixh} - 1|\, |e^{-ix\xi}|\, d\mu(x)$

$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ixh} - 1|\, d\mu(x) \to 0$ nach Lebesgue, und $h \to 0$ das unabhängig von ξ.

(3) Fouriertransformation periodischer Distributionen:

Def.: Eine Distribution $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ heißt 2π-periodisch in jeder Koordinatenrichtung, kurz: periodisch, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt $\tau_{2\pi k} T = T$.

Die Fouriertransformierte einer solchen Distribution ist eine Reihe von Dirac-Maßen δ_k mit $k \in \mathbb{Z}^n$. Um das präzisieren zu können, fixieren wir eine Funktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - 2\pi k) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Konstruktion einer solchen Funktion: Man startet mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, für die gilt:

(i) $\operatorname{supp} \varphi \subset [-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon]^n$,

(ii) $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in (-\pi-\varepsilon, \pi+\varepsilon)^n$,

(iii) $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in [-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]^n$.

Dann setzt man $\phi(x) := \dfrac{\varphi(x)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x - 2\pi k)}$.

Satz 5: Es sei $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ periodisch. Dann gilt mit Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \delta_k, \quad \text{wobei } c_k = (2\pi)^{-n/2} T[\phi \cdot e^{-ik\cdot}]$$

...

Ist speziell $T = T_f$ mit einem $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, so gelten – ebenfalls mit Konvergenz in $S'(\mathbb{R}^n)$ –

$$\hat{T_f} = (2\pi)^{n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\, \delta_k \quad \text{und} \quad T_f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \cdot e^{+ik\cdot}.$$

Bew.: Es seien $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ periodisch und $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\hat{T}[\psi] = T[\hat{\psi}] = T[\hat{\psi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{2\pi k} \phi] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T[\hat{\psi}\, \tau_{2\pi k} \phi]$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{-2\pi k} T[\tau_{-2\pi k}(\hat{\psi}\, \tau_{2\pi k} \phi)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T[(\tau_{-2\pi k} \hat{\psi}) \phi]$$

$$= T[(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{-2\pi k} \hat{\psi}) \cdot \phi].$$

Jetzt verwenden wir die Poissonsche Summationsformel in der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(x + 2\pi k) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(k) \cdot e^{-ikx}$$

bzw.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tau_{-2\pi k} \hat{\psi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(k)\, e_{-k} \quad (e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ikx}).$$

Dann wird

$$\hat{T}[\psi] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \psi(k)\, T[\phi e_{-k}] = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \psi(k)$$

bzw., wenn wir auf ψ verzichten:

$$\hat{T} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k \delta_k, \quad \text{wie behauptet.}$$

Ist $T = T_f$ für ein $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, so erhalten wir für die Koeffizienten

$$c_k = T_f[\phi \cdot e_{-k}] = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n + 2\pi\ell} \phi(x) f(x) e^{-ikx} dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\pi,\pi]^n} \phi(x + 2\pi\ell) f(x) e^{-ikx} dx$$

nur endlich viele Summanden $\neq 0$

$$= (2\pi)^{-n/2} \cdot \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx = (2\pi)^{n/2} \cdot \hat{f}(k),$$

wobei der erste Zusatz gezeigt ist. Schließlich haben wir

stetig

$$T_f = \check{\hat{T}}_f = (2\pi)^{n/2} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \delta_k \Big)^{\vee} = (2\pi)^{n/2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \check{\delta}_k$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \cdot e^{+ikx},$$

letzteres, da nach Bsp. (2) $\hat{\delta}_k(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ik\xi}$ und $\check{\delta}_k = \hat{\delta}_{-k}$. $\square$

Damit erweist sich die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{T}^n)$, also $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : L^1(\mathbb{T}^n) \to c_0(\mathbb{Z}^n)$, $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ als Einschränkung von $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ auf $L^1(\mathbb{T}^n)$, wenn wir $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \delta_k$ identifizieren (und die Normierungskonstante anpassen).