Einführung: Klassische Fourieranalysis

Fourieranalysis im engeren Sinn ist die Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale. In beiden Fällen geht es darum eine gegebene Funktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x)$, allgemeiner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x)$

in elementare Bausteine des Typs

$x \longmapsto c_\xi e^{ix\xi}$ ($x, \xi \in \mathbb{R}$ oder $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, dann ist $x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$)

zu zerlegen (Fourier-Analyse) bzw., wenn hinreichende Bedingungen erfüllt sind, die Funktion f aus diesen Bausteinen durch Integration

$$f(x) = \int c_\xi e^{ix\xi} \, dH(\xi)$$

zu rekonstruieren (Fourier-Synthese). Hierbei ist H ein translationsinvariantes reguläres Borelmaß, das sogenannte Haar-Maß. (Das Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist ein Bsp., mehr dazu später.)

Harmonische Analysis ist verallgemeinerte oder abstrakte Fourieranalysis – und die Untersuchung einer Vielzahl von Fragestellungen, die daran anschließen. Es handelt sich um ein aktives, weit verzweigtes Forschungsgebiet mit

vielen Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik, z.B.: Maßtheorie, PDG, Wahrscheinlichkeitstheorie, analytische Zahlentheorie, ...

In den Grundvorlesungen zur Analysis habe ich die Fourieranalysis nur sporadisch behandelt. Daher sollen der abstrakten Theorie zwei relativ elementare Abschnitte über Fourieranalysis vorangestellt werden.

0.1 Fourierreihen

Zunächst die Grundbegriffe:

Def.: Eine Funktion $P: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto P(x)$ der Gestalt

$$P(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx} \qquad (k \in \mathbb{Z}, c_k \in \mathbb{C})$$

heißt ein trigonometrisches Polynom. Ist hierbei $c_N \neq 0$ oder $c_{-N} \neq 0$, nennt man N den Grad des Polynoms.

Bem.: (1) Es handelt sich um ein Polynom in der komplexen Variablen $z = e^{ix} \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\bar{z} = z^{-1}$ (da $|z| = 1$ ist).

(2) Die Bezeichnung trigonometrisches Polynom ist naheliegend, wenn man mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$$

schreibt

$$P(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cos(kx) + i \sum_{k=-N}^{N} c_k \sin(kx)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k + c_{-k}) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} i(c_k - c_{-k}) \sin(kx)$$

$$=: \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx).$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $x \mapsto \cos(kx)$ und $x \mapsto \sin(kx)$ gilt das letzte "=" genau dann, wenn $a_0 = c_0$ und, für $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad \text{und} \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Letzteres kann man umschreiben zu

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k) \quad (k \in \{1, \dots, N\}); \quad c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k}) \quad (k \in \{-N, \dots, -1\})$$

Die Verwendung der trigonometrischen Funktionen $\cos(k\cdot)$ und $\sin(k\cdot)$ ist in manchen Rechnungen von Vorteil, in der Regel jedoch umständlicher als die Benutzung von $e_k := e^{ik\cdot}$.

(3) Bspe.:

(3.1) Die Folge $(D_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$ der trigonometrischen Polynome

$$D_N(x) := \sum_{|k|\le N} e^{ikx}$$

wird als der <u>Dirichlet-Kern</u> bezeichnet. Mit Hilfe der geometrischen Summenformel können wir hierfür eine geschlossene Darstellung gewinnen. Dazu setzen wir $\omega = e^{ix}$ und erhalten

$$D_N(x) = \sum_{|k|\le N} \omega^k = \omega^{-N}\cdot\sum_{k=0}^{2N}\omega^k = \omega^{-N}\,\frac{\omega^{2N+1}-1}{\omega-1}$$

$$= \frac{\omega^{N+\frac12}-\omega^{-N-\frac12}}{\omega^{\frac12}-\omega^{-\frac12}} = \frac{e^{i(N+\frac12)x}-e^{-i(N+\frac12)x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin((N+\frac12)x)}{\sin(\frac{x}{2})}\,.$$

(3.2) Bildet man arithmetische Mittelwerte der D_N, gelangt man zum sogenannten <u>Fejér-Kern</u>

$$F_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j(x)\,.$$

Auch hierfür gibt es eine geschlossene Darstellung:

$$F_N(x) = \sum_{|k|\le N}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)e^{ikx} = \frac{1}{N}\,\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}\,,$$

letzteres unter der Voraussetzung $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$. (In diesem Fall hat man $F_N(2\pi k)=N$.) – Mit dem Fejér-Kern werden wir uns in den Übungen etwas genauer befassen.

(4) Etwas allgemeiner betrachtet man auch trigonometrische Polynome $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$x \longmapsto P(x) := \sum_{|k|_\infty \leq N} c_k e^{ikx}$$

in mehreren Variablen. Hierbei ist $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $|k|_\infty := \max_{j=1}^{n} |k_j|$ (dann wird über einen achsenparallelen Würfel in $\mathbb{Z}^n$ summiert), $kx = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$. Beispiele sind hier die mehrdimensionalen Dirichlet- bzw. Fejér-Kerne, das sind

$$D_N^{(n)}(x) := \prod_{j=1}^{n} D_N(x_j) \quad \text{und} \quad F_N^{(n)}(x) := \prod_{j=1}^{n} F_N(x_j).$$

<u>Def.</u>: Eine Reihe der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{ikx} \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ c_k \in \mathbb{C})$$

wird als eine <u>trigonometrische Reihe</u> bezeichnet.

<u>Bem.</u>: (1) Für $n \geq 2$ fügt man ggf. "in mehreren Variablen" hinzu.

(2) Über die Konvergenz einer solchen Reihe ist noch nichts ausgesagt! Zunächst ist nur die (Funktionen-) folge $(S_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen

$$S_N(x) := \sum_{|k|_\infty \leq N} c_k e^{ikx}$$

gemeint. In höheren Dimensionen ($n \geq 2$) sind

die Folgen

$$\tilde{S}_N(x) = \sum_{\sum |k_j| \leq N} c_k e^{ikx} \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{S}}_N(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx}$$

von S_N verschieden. Die Konvergenz einer solchen Reihe kann im Prinzip davon abhängen, welche dieser Partialsummenfolgen man betrachtet.

(3) Falls eine solche Reihe punktweise konvergiert, so ist die Grenzfunktion 2π-periodisch in jeder Koordinatenrichtung. Klassen von Funktionen mit dieser Eigenschaft werden mit $L^p(\mathbb{T}^n)$, $C^k(\mathbb{T}^n)$ usw. bezeichnet. Hierbei ist

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{\hat{x} := x + 2\pi\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

der sogenannte "eindimensionale Torus". Seine Elemente sind Äquivalenzklassen reeller Zahlen, die sich um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden. Setzt man für $\hat{x} = x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$ und $\hat{y} = y + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$

$$d_{\mathbb{T}}(\hat{x}, \hat{y}) := \inf\{|x - y + 2\pi l| \mid l \in \mathbb{Z}\},$$

so wird $(\mathbb{T}, d_{\mathbb{T}})$ zu einem metrischen Raum. Dieser wird durch

$$\mathrm{Exp} : \mathbb{T} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \hat{x} = x + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \mathrm{Exp}(\hat{x}) := e^{ix}$$

homöomorph auf den Kreis(rand) S^1 abgebildet.

(Man kann Funktionen auf $\mathbb{T}$ also auffassen als Funktionen auf dem Kreisrand oder als 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

Ein grobes hinreichendes Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer trigonometrischen Reihe liefert das

<u>Konvergenzkriterium von Weierstraß</u>: Es sei $(f_k)_{k\in I}$ eine Folge von Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \supset M \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass für $\|f_k\|_\infty := \sup_{x\in M} |f_k(x)|$ die Reihe

$$\sum_{k\in I} \|f_k\|_\infty < \infty$$

ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\in I} f_k(x)$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$.

(Bekannt aus Ana I oder Ana II. Hierbei ist I eine abzählbare Indexmenge, für die $\sum_{k\in I} \ldots$ bzw. $\lim_{k\in I} \ldots$ in sinnvoller Weise erklärt sind.)

Ebenfalls bekannt sind die nachstehenden Aussagen über Folgen $(f_k)_{k\in I}$ von Funktionen $f_k : \mathbb{R}^n \supset M \to \mathbb{C}$, die <u>gleichmäßig</u> gegen eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergieren:

(1) Sind alle Funktionen f_k stetig (bzw. gleichmäßig stetig), so ist auch die Grenzfunktion f stetig (bzw. gleichmäßig stetig).

(2) Ist M Lebesgue-messbar mit $\lambda^n(M) < \infty$ und sind die f_k über M integrierbar, so ist auch f über M integrierbar und es gilt

$$\int_M f(x)\,dx = \lim_{k\in I} \int_M f_k(x)\,dx .$$

Dies ist ein Spezialfall des Lebesgueschen Konvergenzsatzes.

(3) Gilt $f_k = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$ für eine Funktionenfolge $(F_k)_{k\in I}$ in $C^1(M)$, die punktweise gegen $F: M \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist auch F stetig nach x_j differenzierbar und es gilt $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \lim_{k\in I} f_k(x)$.

Bem.: Die Aussage (3) oben wird oft verwendet, um zu zeigen, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises beliebig oft gliedweise differenziert werden können. Das ist bei trigonometrischen Reihen i. Allg. nicht der Fall, wie das folgende Bsp. zeigt:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ konvergiert aufgrund des verallgemeinerten Leibniz-Kriteriums für alle $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf allen Intervallen der Form $[2\pi\ell + \varepsilon, 2\pi(\ell+1) - \varepsilon]$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ und $0 < \varepsilon < \pi$ ($\to$ Übungen). Die Folge $(ie^{inx})_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen der Summanden ist aber keine Nullfolge, die Reihe der Ableitungen also divergent.

Wenden wir das Weierstraß-Kriterium nun auch auf die Funktionenfolge $f_k(x) = c_k \cdot e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}^n$ und $\|f_k\|_\infty = |c_k|$, so erhalten wir:

Lemma 1: Es sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, für die

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k| < \infty \qquad (*_0)$$

ist, so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ikx}$$

absolut und gleichmäßig gegen eine gleichmäßig stetige und in jeder Komponente 2π-periodische Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Diese ist unabhängig von der Summationsreihenfolge. Gilt darüber hinaus für eine natürliche Zahl ℓ, dass

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^\ell |c_k| < \infty, \qquad (*_\ell)$$

so ist $f \in C^\ell(\mathbb{T}^n)$ und kann ℓ-mal gliedweise differenziert werden.

Bem.: (1) "decay" (= Abfall, schnelle Konvergenz gegen Null) der Koeffizienten impliziert also über die Konvergenz der trig. Reihe hinaus sogar die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion.

(2) $(*_\ell)$ ist erfüllt, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$|c_k| \lesssim_\varepsilon \langle k\rangle^{-n-\ell-\varepsilon}.$$

Hierbei ist $\langle k\rangle = (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}$ ("japanese brackets"), $A \lesssim B$ bedeutet: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so

dass $A \leq CB$. $\lesssim_\varepsilon$ heißt, dass die implizite Konstante von ε abhängen kann. $A \sim B$ bedeutet wiederum $A \lesssim B$ und $B \lesssim A$. Den Beweis der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-n-\varepsilon}$$

diskutieren wir in den Übungen.

Nehmen wir nun an, es sei

$$f(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell \, e^{i\ell x} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz. Dann können wir die Summation und die Integration über den Würfel $[-\pi,\pi]^n$ vertauschen und erhalten

$$\int_{[-\pi,\pi]^n} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c_\ell \int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\ell-k)x} dx =: (*)$$

Nun ist für $n=1$ (und $\ell, k \in \mathbb{Z}$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x} dx = \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi, & \text{wenn } \ell = k \\ \frac{1}{i(\ell-k)} e^{i(\ell-k)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{wenn } \ell \neq k \end{array} \right\} = 2\pi \delta_{k\ell}$$

und aufgrund des Satzes von Fubini ($\ell, k \in \mathbb{Z}^n$)

$$\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{i(\ell-k)x} dx = (2\pi)^n \cdot \delta_{\ell_1,k_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{\ell_n,k_n} = (2\pi)^n \delta_{k,\ell}$$

Das bedeutet zum einen

Lemma 2: Die Funktionenfolge $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$, def. durch

$$e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ikx}$$

ist ein Orthonormalsystem (ONS) im Hilbertraum $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Zum anderen können wir unsere Rechnung fortsetzen und erhalten

$$(*) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} c_\ell \cdot (2\pi)^n \delta_{k,\ell} = (2\pi)^n \cdot c_k .$$

Will man also eine gegebene Funktion $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ in eine trigonometrische Reihe entwickeln, so sind

$$c_k = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{[-\pi,\pi]^n} f(x) \cdot e^{-ikx}\, dx$$

die einzig sinnvollen Kandidaten. Im folgenden schreiben wir stets $\int_{\mathbb{T}^n} \ldots dx$ statt $\int_{[-\pi,\pi]^n} \ldots dx$!

Def.: Es seien $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann heißt

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

der <u>k-te Fourierkoeffizient</u> von f und die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

die <u>Fourierreihe</u> von f. Die Folge $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ der Fourierkoeffizienten von $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ wird als

Fouriertransformierte von f bezeichnet und die Abbildung

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}: L^1(\mathbb{T}^n) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^n),\ f \mapsto \mathcal{F}f := (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$$

heißt Fouriertransformation.

Bem.: (1) $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist der Vektorraum aller beschränkten Folgen auf $\mathbb{Z}^n$. Die Beschränktheit von $\mathcal{F}f$ ergibt sich aus

$$|\hat{f}(k)| = (2\pi)^{-n}\left|\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ikx}dx\right| \le (2\pi)^{-n}\|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

(2) Ebenso wie oben bei den trigonometrischen Reihen wird mit der Definition der Fourierreihen nicht deren Konvergenz behauptet. Es handelt sich also zunächst noch um die Funktionenfolge $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen

$$S_N f(x) := \sum_{|k|_\infty \le N} \hat{f}(k)e^{ikx}$$

mit $|k|_\infty = \max_{j=1}^{n} |k_j|$, so dass über achsenparallele Würfel der Kantenlänge $2N$ im $\mathbb{Z}^n$ summiert wird.

Das Problem der Konvergenz von Fourierreihen ist vielschichtig und hat die Analytiker seit Einführung der Fourierreihen seit 1820 bis in die 1960er Jahre immer wieder beschäftigt. Dazu drei Anmerkungen.

(1) Anders als bei den trigonometrischen Reihen kann man versuchen, Eigenschaften der Funktion f zu finden, die die Konvergenz der Fourierreihe implizieren. Damit sind insbesondere Regularitätseigenschaften gemeint.

(2) Dass etwas schiefgehen kann, zeigen die beiden folgenden Ergebnisse:

- 1873 zeigte <u>Du Bois-Reymond</u> die Existenz einer Funktion $f \in C(\mathbb{T})$, deren Fourierreihe in einem Punkt divergiert. (Später in dieser Vorlesung)
- 1923 / 1926 konstruierte <u>Kolmogorov</u> eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$, deren Fourierreihe λ^1-fast überall bzw. überall divergiert. (→ Grafakos, Classical Fourier Analysis, 3. Aufl. (2014), Abschnitt 4.2.1)

(3) Vielschichtig wird die Fragestellung durch die Verwendung verschiedener Konvergenzbegriffe: Konvergiert eine Fourierreihe gleichmäßig, punktweise, punktweise f.ü., in der L^p-Norm oder in einem anderen Sinne? Außerdem ist zu klären, ob die Reihe im Konvergenzfall gegen die Funktion f konvergiert. (Für die Taylorreihe ist ja bekannt, dass es Funktionen mit konvergenter Taylorreihe gibt, die nicht gegen die Funktion konvergiert, z. B. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ mit Entwicklungspkt $x_0 = 0$.)

Beginnen wir mit einem groben Argument, das zeigt, wie man durch Differenzierbarkeitsbedingungen an f die Konvergenz der Fourierreihe von f erzwingen kann:

Lemma 3: Es seien $\ell \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\ell(\mathbb{T}^n)$. Dann gilt für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ der Länge $|\alpha| \leq \ell$, dass

$$\widehat{\nabla^\alpha f}(k) = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}(k) \qquad \left(\nabla^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},\ k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdots k_n^{\alpha_n} \right).$$

Weiter ist

$$|\hat{f}(k)| \lesssim \langle k \rangle^{-\ell} \sum_{|\alpha| \leq \ell} \| \nabla^\alpha f \|_\infty$$

und für $\ell > n$ konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig.

Bew.: Es ist $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-ikx} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j \right) dx' \qquad \left(\begin{array}{l} x' = x \text{ ohne die} \\ j\text{-te Komponente} \end{array} \right)$$

Partielle Integration im inneren Integral ergibt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j = e^{-ikx} f(x) \Big|_{x_j = -\pi}^{x_j = \pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ikx} \right) f(x)\, dx_j$$

$$= i k_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\, dx_j ,$$

und Einsetzen liefert $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) = i k_j \hat{f}(k)$. Das kann man ℓ-mal mit beliebigen Variablen x_j durchführen und erhält

$$\widehat{\nabla^\alpha f}(k) = i^{|\alpha|} k^\alpha \cdot \hat{f}(k).$$

Hieraus folgen

$$|\hat{f}(k)k_j| \leq \left|\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| = \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_\infty ;$$

$$|\hat{f}(k)|\left(1+\sum_{j=1}^n |k_j|\right) \leq \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_\infty ;$$

$$|\hat{f}(k)|\,|k|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_\infty \quad \text{usw.}$$

und damit die behauptete Abschätzung. Der Zusatz über die Konvergenz der Fourierreihe ergibt sich jetzt aus Lemma 1. □

Die Schlußweise des Lemmas

Regularität von f $\Longrightarrow$ decay der Folge $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ $\Longrightarrow$ Konvergenz der Fourierreihe

ist nicht geeignet, um scharfe Ergebnisse zu erzielen. Bei der Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ikx}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|$$

wird das oszillierende Verhalten der Faktoren e^{ikx} achtlos ausgelenkt. Um die Voraussetzungen für die Konvergenz von Fourierreihen abschwächen zu können, muss ich für Funktionen auf dem $\mathbb{T}^n$ zwei Konzepte einführen, die in der harmonischen Analysis in allgemeiner Form eine fundamentale Rolle spielen. Das erste ist die Faltung, die wir für Funktionen $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ bereits in Aufg. III kennengelernt haben:

<u>Def.</u>: Für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ heißt die durch

$$f*g(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

definierte Funktion $f*g$ die <u>Faltung</u> <u>von</u> f <u>und</u> g.

Die Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{T}^n) \times L^1(\mathbb{T}^n) \to L^1(\mathbb{T}^n),\ (f,g) \mapsto f*g$$

heißt die <u>Faltung</u> (oder: <u>das Faltungsprodukt</u>) auf $L^1(\mathbb{T}^n)$.

<u>Bem.</u>: (1) Für $f, g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ haben wir nach Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy\,dx \leq \int_{\mathbb{T}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(x-y)|\,dx\right)dy$$

$$\leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

woraus wir schließen können, dass das Faltungsintegral für λ^n-fast alle $x \in \mathbb{T}^n$ existiert. Ferner ist

$$f*g(x+2\pi k_j e_j) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x+2\pi k_j e_j - y)g(y)\,dy$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x-y)g(y)\,dy = f*g(x),$$

so dass $f*g$ periodisch und also $\in L^1(\mathbb{T}^n)$ ist, wie in der Definition behauptet.

(2) Die Faltung ist assoziativ und kommutativ und verhält sich distributiv zur Addition von Funktionen. Diese und weitere Eigenschaften der Faltung werden wir im nächsten Kapitel in

einen abstrakten Rahmen diskutieren. Ohne Beweis sei an dieser Stelle lediglich festgestellt:

$(L^1(\mathbb{T}^n), +, *)$ ist ein kommutativer Ring ohne Einselement. Da $L^1(\mathbb{T}^n)$ mit

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|\,dx$$

zudem ein vollständiger normierter Vektorraum (also ein Banachraum) ist, und wir über die Ungleichung

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad (s.(1))$$

verfügen, handelt es sich hierbei ferner um eine kommutative Banach-Algebra (ohne Einselement).

Um einzusehen, wie die Faltung bei der Untersuchung der Konvergenz von Fourierreihen nützlich sein kann, stellen wir die Partialsummen $S_N f$ als Faltungen dar:

$$S_N f(x) = \sum_{|k|_\infty \leq N} \hat{f}(k) \cdot e^{ikx} = \sum_{|k|_\infty \leq N} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(y) e^{-iky} dy \, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|k|_\infty \leq N} e^{ik(x-y)} f(y)\,dy \underset{\frac{1}{(2\pi)^n}}{=} D_N^{(n)} * f(x)$$

mit dem Dirichlet-Kern

$$D_N^n(x) = D_N(x_1) \cdot \ldots \cdot D_N(x_n)$$

bei n Variablen.

Das zweite grundlegende Konzept, das uns in der Frage der Konvergenz von Fourierreihen weiterhilft ist das der "approximativen Einheit", auch "Dirac-Folge" genannt. Dazu sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Indexmenge und $i_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass der $\lim_{i \to i_0} \ldots$ für $i \in I$ in sinnvoller Weise erklärt ist (z.B. $I = \mathbb{N}, i_0 = \infty$, $I = (0,\infty), i_0 = 0$).

Def. Eine Familie $(K_i)_{i \in I}$ von Funktionen $K_i \in L^1(\mathbb{T}^n)$ heißt eine <u>approximative Einheit</u> auf $\mathbb{T}^n$, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften aufweist:

(1) Für alle $i \in I$ gilt $(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} K_i(x)\,dx = 1$.

(2) Es gibt ein $M > 0$, sodass für alle $i \in I$ $\int_{\mathbb{T}^n} |K_i(x)|\,dx \leq M$.

(3) Für alle $\delta > 0$ ist $\lim_{i \to i_0} \int_{\mathbb{T}^n \setminus B_\delta(0)} |K_i(x)|\,dx = 0$.

Den folgenden Satz über approximative Einheiten werden wir im nächsten Kapitel der Vorlesung im allgemeineren Rahmen beweisen:

<u>Satz</u> 1: Es sei $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $(K_i)_{i \in I}$ eine approximative Einheit auf $\mathbb{T}^n$. Dann gelten:

(a) $f \in C(\mathbb{T}^n)$ impliziert $\lim_{i \to i_0} K_i * f = f$ mit gleichmäßiger Konvergenz.

(b) Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ und $x \in \mathbb{T}^n$ ein Stetigkeitspunkt von f, so hat man $\lim_{i \to i_0} K_i * f(x) = f(x)$.

(c) Sind $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, so folgt

$$\lim_{i \to i_0} \| K_i * f - f \|_p = 0.$$

Bsp.: (1) Der Dirichlet-Kern $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ verfehlt knapp die definierenden Eigenschaften einer approximativen Einheit. Es gilt zwar

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x)\,dx = \sum_{|k|\le N} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

aber bereits die zweite Eigenschaft trifft nicht zu, es gilt

$$\| D_N \|_1 \sim \ln(N) \longrightarrow \infty \quad (N \to \infty),$$

wie sie in den Übungen zeigen werden. Auch die dritte Bedingung ist nicht erfüllt, denn

$$\int_{\mathbb{T}\setminus(-\delta,\delta)} |D_N(x)|\,dx = 2\cdot \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})x)|}{\sin(\frac{x}{2})}\,dx$$

$$\gtrsim \int_{\delta}^{\pi} |\sin((N+\tfrac{1}{2})x)| \frac{dx}{x} = \int_{\delta(N+\frac{1}{2})}^{\pi(N+\frac{1}{2})} |\sin(y)| \frac{dy}{y}$$

$$\ge \sum_{k=\lceil N\delta\rceil}^{N} \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(y)|\,dy \sim \ln(N) - \ln(\delta N)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

(2) Unabhängig voneinander sind Cesaro und Fejér auf die Idee gekommen, diesen Mangel zu beheben, indem sie arithmetische Mittel gebildet haben. In einer Dimension setzt man

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} S_j f(x) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{D_j}_{\frac{1}{2\pi}} * f(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j\right)}_{\frac{1}{2\pi}} * f(x) = \underbrace{F_N}_{\frac{1}{2\pi}} * f(x)$$

mit dem oben eingeführten Fejér-Kern $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Für höhere Raumdimensionen ($n \geq 2$) definiert man

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} F_N^{(n)} * f(x).$$

In den Übungen werden Sie zeigen, dass $(F_N^{(n)})_{N\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit auf dem $\mathbb{T}^n$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar als Folgerung der

<u>Satz von Fejér:</u> Es sei $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\sigma_N f = \frac{1}{(2\pi)^n} F_N^{(n)} * f$ die Faltung von f mit dem Fejér-Kern. Dann gelten:

(a) Aus $f \in C(\mathbb{T}^n)$ folgt $\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty = 0$.

(b) Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ und stetig in $x \in \mathbb{T}^n$, so hat man

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = f(x).$$

(c) $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ implizieren

$$\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_p = 0.$$

Mit Hilfe des Satzes von Fejér können wir unsere bisherigen Ergebnisse zur Konvergenz von Fourierreihen deutlich verbessern. Dazu führen wir die folgenden Klassen global <u>Hölder</u>-<u>stetiger</u> Funktionen ein:

Def.: Für $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in (0,1]$ seien

$$[f]_\alpha := \sup\left\{ \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha} : x \in \mathbb{T}^n, h \in \mathbb{T}^n \setminus \{0\} \right\}$$

und $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n) := \{ f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C} : [f]_\alpha < \infty \}$.

Bem.: $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ ist ein linearer Teilraum von $C(\mathbb{T}^n)$ und $[\cdot]_\alpha$ eine Halbnorm auf $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Genau dann ist $[f]_\alpha = 0$, wenn f konstant ist, so dass

$$\|f\|_{0,\alpha} := \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$

eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n)$ ist.

Satz 2: Es sei $\alpha \in (0,1]$ und $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^n)$. Dann konvergiert $(S_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

Bew.: (1) Zuerst stellen wir fest, dass für $N \geq |k|_\infty$ und $f_k(x) = e^{ikx}$ gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^n} D_N^{(n)} * f_k(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|\ell|_\infty \leq N} e^{i\ell(x-y)} e^{iky}\, dy$$

$$= (2\pi)^{-n} \sum_{|\ell|_\infty \leq N} e^{i\ell x} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k-\ell)y}\, dy$$

$$= \sum_{|\ell|_\infty \leq N} e^{i\ell x} \cdot \delta_{k,\ell} = e^{ikx} = f_k(x).$$

Hieraus folgt, dass für jedes trigonometrische Polynom der Form

$$P(x) = \sum_{|\ell|_\infty \leq N} c_\ell e^{i\ell x}$$

gilt $\frac{1}{(2\pi)^n} D_N^{(n)} * P = P$.[1] Insbesondere ist $\frac{1}{(2\pi)^n} D_N^{(n)} * F_N^{(n)} = F_N^{(n)}$ und daher $S_N \sigma_N f = \sigma_N f$, so dass wir schreiben können

$$S_N f - f = S_N f - \sigma_N f + \sigma_N f - f = S_N(f - \sigma_N f) + \sigma_N f - f. \qquad (*)$$

(2) In der Übung haben Sie für den eindimensionalen Fejér-Kern die Identität

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$$

gezeigt. Für $0 < |x| \leq \pi$ ist $|\sin(\frac{x}{2})| \sim |x|$, $\sin^2(\frac{Nx}{2}) \leq 1$ und $\frac{|\sin(\frac{Nx}{2})|}{|\sin(\frac{x}{2})|} \lesssim N$, so dass sich die Abschätzung

$$F_N(x) \lesssim \min\left(N, \frac{1}{Nx^2}\right) \leq N^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{Nx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|x|} \qquad (**)$$

ergibt.

(3) Abschätzung der Differenz

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{T}^n} |f(x-y) - f(x)| \, F_N^{(n)}(y) \, dy.$$

Wir zerlegen $\mathbb{T}^n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, wobei die C_k gelte $|y_k| = \max_{j=1}^{n} |y_j|$.

Dann verfügen wir in C_k über die Abschätzung

$$|f(x-y) - f(x)| \leq C |y_k|^\alpha \qquad \forall y \in C_k.$$

(Die Konstante C ist zwar größer geworden, aber nach wie vor unabhängig von x!)

---

[1] Speziell gilt $\frac{1}{(2\pi)^n} D_N^{(n)} * D_N^{(n)} = D_N^{(n)}$, also $S_N(S_N f) = S_N^2 f = S_N f$. S_N ist also eine lineare Abbildung mit $S_N^2 = S_N$, d.h. eine Projektion (oder Projektionsoperator).

Wenn wir nun $k=n$ annehmen und $y=(y',y_n)$ schreiben, so können wir den Beitrag von C_n kontrollieren durch

$$\int_{C_n} |f(x-y)-f(x)|\, F_N^{(n)}(y)\,dy \lesssim \int_{\mathbb{T}^n} |y_n|^\alpha F_N^{(n-1)}(y')\, F_N(y_n)\,dy$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{T}} |y|^\alpha F_N(y)\,dy \underset{(**)}{\lesssim} \int_0^{\frac{1}{N}} y^{\alpha-1}\,dy + \frac{1}{N}\int_{\frac{1}{N}}^{\pi} y^{\alpha-2}\,dy$$

$$\lesssim N^{-\alpha} + \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha-1} \sim N^{-\alpha}.$$

Ebenso für die anderen C_k, alles unabhängig von $x\in\mathbb{T}^n$, so dass insgesamt

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n} |\sigma_N f(x) - f(x)| \lesssim C N^{-\alpha}.$$

(4) Mit (*) erhalten wir

$$\|S_N f - f\|_\infty \le \|S_N(\sigma_N f - f)\|_\infty + \|\sigma_N f - f\|_\infty$$

$$\underset{\frac{1}{(2\pi)^n}}{=} \|D_N^{(n)} * (\sigma_N f - f)\|_\infty + \|\sigma_N f - f\|_\infty \underset{(3)}{\lesssim} (\|D_N^{(n)}\|_1 + 1)\, N^{-\alpha},$$

denn allgemein ist $|g*h(x)| \le \int_{\mathbb{T}^n} |g(x-y)||h(y)|\,dy \le \|g\|_\infty \|h\|_1$.

Nun greifen wir erneut auf die Übungen zurück, wo Sie gezeigt haben, dass

$$\|D_N\|_1 \lesssim \ln(N), \quad \text{somit} \quad \|D_N^{(n)}\|_1 \lesssim \ln(N)^n.$$

Damit ergibt sich

$$\|S_N f - f\|_\infty \lesssim (\ln(N)^n + 1)\, N^{-\alpha} \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty).$$

$\square$

Darüber hinaus impliziert der Satz von Fejér eine Reihe wichtiger Approximationsaussagen – wir müssen lediglich beachten, dass die Partialsummen

$$S_N f(x) = \sum_{|k|_\infty \leq N} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

und damit auch die $\sigma_N f$ trigonometrische Polynome sind. Teil (a) des Satzes von Fejér ergibt also:

<u>Weierstraßscher Approximationssatz für periodische Funktionen:</u> Jede <u>stetige</u> Funktion $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ lässt sich <u>gleichmäßig</u> durch trigonometrische Polynome approximieren.

In ähnlicher Weise können wir den Teil (c) des Satzes von Fejer umformulieren zu einem

Approximationssatz für $L^p(\mathbb{T}^n)$: Es sei $1 \leq p < \infty$. Dann bilden die trigonometrischen Polynome einen dichten linearen Teilraum von $L^p(\mathbb{T}^n)$.

Von besonderem Interesse ist hierbei der Fall $p=2$, in dem erst $L^2(\mathbb{T}^n)$ ein <u>Hilbertraum</u> vorliegt. Ein Hilbertraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt abstammt. (Ein normierter Vektorraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt

kommt, heißt ein <u>Prähilbertraum</u>. Hierfür muss die Vollständigkeitseigenschaft nicht erfüllt sein.) Das Skalarprodukt auf $L^2(\Pi^n)$ ist gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Pi^n} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx .$$

Die grundlegenden Tatsachen über Hilberträume lernt man in der Vorlesung "Einführung in die Funktionalanalysis". Ein wichtiges Strukturelement eines Prähilbertraums sind seine Orthonormalbasen. Üblicherweise definiert man:

<u>Def.</u>: Ein Orthonormalsystem (ONS) $(e_k)_{k\in I}$ in einem Prähilbertraum H heißt <u>vollständig</u> oder eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB), wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

(1) $H = \overline{\langle e_k \rangle_{k\in I}}$, d.h. die lineare Hülle des Systems $(e_k)_{k\in I}$ ist dicht in H.

(2) Für jedes $x \in H$ gilt $x = \sum_{k\in I} \langle x, e_k \rangle e_k$ mit Konvergenz in H.

(3) Für jedes $x \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in I} |\langle x, e_k \rangle|^2 .$$

Wenn H zudem vollständig, also ein Hilbertraum ist, ist die Aussage

(4) $\langle e_k \rangle_{k\in I}^{\perp} = \{0\}$, d.h. $x \perp e_k \ \forall k \in I \Rightarrow x = 0$

ebenfalls äquivalent zu (1)–(3). Dieser Zusatz gilt nicht ohne die Vollständigkeitsvoraussetzung.

Für den Beweis der Äquivalenzen sei auf die Vorlesung FA oder die Lehrbuchliteratur (z.B. Meise / Vogt: Einführung in die FA, § 12) verwiesen.

Konkretisierung für den Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{T}^n)$:
Hierfür ist das Funktionensystem $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $e_k(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{ikx}$ ein ONS, da

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \underbrace{e^{ikx} \cdot \overline{e^{i\ell x}}}_{= e^{i(k-\ell)x}} dx = \delta_{k,\ell},$$

wie wir oben gesehen haben. Die lineare Hülle dieses ONS sind die trigonometrischen Polynome, die nach Teil (c) des Satzes von Fejér in $L^2(\mathbb{T}^n)$ dicht liegen.
Nun ist für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$

$$\langle f, e_k \rangle = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \cdot e^{-ikx} dx = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(k)$$

und daher

$$S_N f(x) = \sum_{|k|_\infty \le N} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{|k|_\infty \le N} (2\pi)^{n/2} \hat{f}(k) \cdot (2\pi)^{-n/2} e^{ikx} = \sum_{|k|_\infty \le N} \langle f, e_k \rangle e_k .$$

Nach Teil (2) der obigen Definition gilt also mit

Konvergenz in $H = L^2(\mathbb{T}^n)$ die Identität

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, e_k\rangle e_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|_\infty \le N} \langle f, e_k\rangle e_k = \lim_{N\to\infty} S_N f,$$

also die <u>Konvergenz der Fourierreihe</u> von f <u>gegen f in der L^2-Norm</u>. Der Teil (3) der Definition einer ONB liefert

$$\langle f, f\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = (2\pi)^n \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)|^2 =: (\hat{f}, \hat{f}),$$

wobei $(x,y) := (2\pi)\cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} x_k \overline{y_k}$ ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ist. Diese Gleichung verallgemeinern wir, indem wir sie polarisieren, d.h. wir wenden sie an auf $f+g$ und $if+g$:

$$\langle f, f\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle = \langle f+g, f+g\rangle$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} (\hat{f}+\hat{g}, \hat{f}+\hat{g}) = (\hat{f}, \hat{f}) + 2\,\mathrm{Re}(\hat{f}, \hat{g}) + (\hat{g}, \hat{g})$$

Das ergibt $\mathrm{Re}\langle f, g\rangle = \mathrm{Re}(\hat{f}, \hat{g})$ und (mit if statt f)

$$\mathrm{Im}\langle f, g\rangle = \mathrm{Re}(i\langle f, g\rangle) = \mathrm{Re}\langle if, g\rangle = \mathrm{Re}(i\hat{f}, \hat{g}) = \mathrm{Im}(\hat{f}, \hat{g}),$$

also insgesamt $\langle f, g\rangle = (\hat{f}, \hat{g})$ bzw. ausgeschrieben

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{T}^n),$$

was als Parsevalsche Gleichung bezeichnet wird. Damit ist uns das folgende Ergebnis nahezu in den Schoß gefallen:

<u>Satz 3</u>: Es sei $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f in $L^2(\mathbb{T}^n)$ gegen f, d.h. es gilt

$$\lim_{N \to \infty} \| f - S_N f \|_2 = 0.$$

Ist auch $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$, so gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)}.$$

<u>Bem.</u>: Die Konvergenzaussage gilt auch in $L^p(\mathbb{T}^n)$, sofern $p \in (1, \infty)$ ist. (Marcel Riesz 1927, für $n = 1$) Der Beweis ist erheblich schwieriger für $p \neq 2$, ich hoffe, wir schaffen das zum Ende des Semesters.

Auch aus der Teilaussage $\lim_{N \to \infty} \| \sigma_N f - f \|_1 = 0$ des Satzes von Fejér ergeben sich einige interessante Folgerungen:

<u>Lemma</u> <u>von</u> <u>Riemann-Lebesgue</u>: Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : L^1(\mathbb{T}^n) \to c_0(\mathbb{Z}^n), \quad f \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f := (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

ist linear, stetig und injektiv. Hierbei ist

$$c_0(\mathbb{Z}^n) := \{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} : \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \}$$

der Vektorraum aller Nullfolgen auf $\mathbb{Z}^n$, ausgestattet mit der Norm $\| (x_k)_k \|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |x_k|$.

<u>Bem.</u>: $c_0(\mathbb{Z}^n)$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ und somit ein Banachraum.

Bew.: Die Linearität ergibt sich aus der Definition

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx$$

und der Linearität des Integrals. Die Stetigkeitsabschätzung

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(k)| = (2\pi)^{-n} \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq (2\pi)^{-n} \|f\|_1$$

haben wir an früherer Stelle bereits gesehen. Um $\lim_{k \to \infty} \hat{f}(k) = 0$ zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \geq N_0$ $\|\sigma_N f - f\|_1 < \varepsilon$. Für $|k|_\infty > N$ haben wir $\widehat{\sigma_N f}(k) = 0$ und daher

$$|\hat{f}(k)| = |\hat{f}(k) - \widehat{\sigma_N f}(k)| \leq (2\pi)^{-n} \|f - \sigma_N f\|_1 < \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n}.$$

Schließlich sei $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$, d.h. $\hat{f}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $\sigma_N f = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und daher

$$0 = \lim_{N \to \infty} \|\sigma_N f - f\|_1 = \|f\|_1,$$

d.h. $f = 0 \in L^1(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Die Aussage $\lim_{k \to \infty} \hat{f}(k) = 0$ können wir wiederum zum Beweis eines Satzes über die <u>punktweise</u> Konvergenz von Fourierreihen heranziehen:

<u>Satz</u> 4 (Dini (1872) für $n=1$, Tonelli (?) für $n \geq 2$): Es sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und $a \in \mathbb{T}^n$, so dass

$$\int_{\mathbb{T}^n} \frac{|f(x+a) - f(a)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} dx < \infty.$$

Dann gilt $\lim_{N\to\infty} S_N f(a) = f(a)$, d.h. die Fourierreihe von f konvergiert im Punkt a gegen $f(a)$.

Bew.: O.E. können wir $f(a)=0$ und $a=0$ annehmen.

Dann ist

$$S_N f(0) = (2\pi)^{-n} D_N^{(n)} * f(0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x_j)}{\sin(\frac{x_j}{2})} \right) f(-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\mathbb{T}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \sin((N+\tfrac{1}{2})x_j) \right) \cdot \frac{f(-x)}{\prod_{j=1}^{n} \sin(\frac{x_j}{2})}\,dx,$$

und die Funktion $g(x) = \dfrac{f(-x)}{\prod_{j=1}^{n} \sin(\frac{x_j}{2})}$ liegt nach Voraussetzung in $L^1(\mathbb{T}^n)$. Nun ist aufgrund des Riemann-Lebesgueschen Lemmas für jedes $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} e^{ikx} g(x)\,dx = 0,$$

damit auch für jedes feste $\delta \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k+\delta)x} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} e^{ikx} \cdot (e^{i\delta x} g(x))\,dx = 0$$

und folglich (wähle $k = \pm(N+\frac{1}{2}), \dots, \pm(N+\frac{1}{2})$) $+\delta$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \sin((N+\tfrac{1}{2})x_j) \cdot g(x)\,dx = 0.$$

Zusammenfassung ergibt

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(0) = 0 = f(0)$$

und damit die Beh.. $\square$

Hieraus ergeben sich zwei wichtige Folgerungen. Zum einen der

<u>Lokalisierungssatz von Riemann:</u> Es sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{T}^n$ offen und $f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Dann gilt

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Bew.: Die Vor. des Satzes von Dini/Tonelli sind für jedes $a \in \Omega$ erfüllt.

<u>Bemerkenswert:</u> Obwohl zur Berechnung der Fourierkoeffizienten die Funktionswerte auf dem <u>gesamten</u> $\mathbb{T}^n$ herangezogen werden, hängen das Konvergenzverhalten (und ggf. der Grenzwert) der Fourierreihe in einem Punkt $a \in \mathbb{T}^n$ nur von den Funktionswerten in einer (beliebig kleinen) Umgebung $B_\varepsilon(a)$ ab!

<u>Satz</u> 5 (für $n=1$: Lipschitz (1864)): Es sei $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ und genüge in $a \in \mathbb{T}^n$ der folgenden lokalen Hölderbedingung zum Exponenten $\alpha > 0$:

$$\exists\, C > 0,\ \varepsilon > 0 \quad \forall h \in B_\varepsilon(a) : |f(a+h) - f(a)| \leq C \prod_{j=1}^{n} |h_j|^\alpha.$$

Dann gilt $\lim_{N \to \infty} S_N f(a) = f(a)$.

Bew.: Wir haben

$$\int_{\Pi^n} \frac{|f(x+a)-f(a)|}{|x_1|\cdot\ldots\cdot|x_n|}\,dx \lesssim \int_{B_\varepsilon(0)} |x_1|^{\alpha-1}\cdot\ldots\cdot|x_n|^{\alpha-1}\,dx + \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(0)^c} |f(x+a)-f(a)|\,dx < \infty.$$

Auch hier ist also die Voraussetzung des Satzes von Dini-Tonelli erfüllt. $\square$

Damit haben wir die klassischen Ergebnisse des 19. Jahrhunderts zur gleichmäßigen, punktweisen und L^2-Konvergenz von Fourierreihen im wesentlichen zusammengestellt, hier gleich in ihren mehrdimensionalen Formulierungen, was in den meisten Lehrbüchern vernachlässigt wird (Ausnahme: Stein-Weiss, Grafakos). Eine weitere Konvergenzaussage möchte ich noch ohne Beweis angeben, das ist der Satz von Dirichlet-Jordan und seine Verallgemeinerung durch Wiener und Young. Meines Wissens sind diese Ergebnisse auf <u>eine Dimension</u> beschränkt.

Um den Satz von Dirichlet-Jordan formulieren zu können, muss ich die Klasse der Funktionen beschränkter Schwankung einführen:

Def.: Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt von beschränkter Variation oder von beschränkter Schwankung, wenn

$$V_a^b[f] := \sup_Z \sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$$

ist. Hierbei wird das Supremum über alle Zerlegungen $Z = \{a = x_0 < \dots < x_N = b\}$ von $[a,b]$ gebildet.

Bem.: (1) Die Funktionen beschränkter Schwankung bilden einen Vektorraum, der mit $BV([a,b])$ bezeichnet wird. Durch $V_a^b[f]$ wird eine Halbnorm auf $BV([a,b])$ definiert. Es gilt $V_a^b[f] = 0$ genau dann, wenn f konstant ist, so dass $BV([a,b])$ (z.B.) durch

$$\|f\|_{V^1([a,b])} := \|f\|_\infty + V_a^b[f]$$

normiert wird.

(2) Diese Funktionenklasse ist nicht nur analytisch, sondern auch geometrisch von Interesse. Denn bei den stetigen Funktionen beschränkter Variation handelt es sich genau um diejenigen ebenen Kurven, deren Bogenlänge durch Polygone approximierbar sind. Solche Kurven nennt man rektifizierbar. (Mehr darüber finden Sie z.B. in: Kaballo: Einführung in die Analysis I, Abschnitt 23.)

(3) Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Schwankung auf $[a,b]$, wenn es monoton steigende Funktionen $f_{1,2}:[a,b]\to\mathbb{R}$ gibt, so dass $f=f_1-f_2$. (Jordanscher Zerlegungssatz; zu seinem Beweis setzt man

$$f_1(x):=V_a^x[f] \quad , \quad f_2(x)=V_a^x[f]-f(x)$$

und zeigt, dass diese Funktionen monoton steigend sind.)

(4) Für $f\in BV([a,b])$ existieren alle einseitigen Grenzwerte $f(x_\pm)=\lim\limits_{h\to 0,\, h>0} f(x\pm h)$. In diesem Fall setzt man

$$f^*(x)=\frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right).$$

Für die Fourierreihen der Funktionen beschränkter Schwankung gilt der folgende

<u>Satz von Dirichlet-Jordan</u> (Dirichlet (1829), Jordan (1881))

Es sei $f\in L^1(\mathbb{T})$, so dass $f|_{[-\pi,\pi]}\in BV([-\pi,\pi])$ ist.

Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x)=f^*(x).$$

Ist zudem $f\in C(\mathbb{T})$, so ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{T}$.

Der Beweis dieses Satzes ist elementar aber anspruchsvoll. Er besteht aus zwei Schritten: Im ersten wird gezeigt

$$f \in BV([-\pi,\pi]) \Rightarrow \exists C>0 : |\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|}.$$

Diesen Teil sollen Sie für monotone Funktionen in einer der kommenden Aufgaben erledigen. Der zweite Teil des Arguments besteht in folgendem Schluss:

Ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x)$ eine Funktionenreihe, für die die Cesàro-Mittel

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|k|\leq n} a_k(x)$$

(gleichmäßig) konvergieren, und gilt $\|a_k\|_\infty \lesssim \frac{1}{|k|}$, so konvergiert auch $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ (gleichmäßig) gegen denselben Grenzwert.

Dies ist dann anwendbar auf $a_k(x) = e^{ikx}\cdot\hat{f}(k)$, $S_n(x) = S_n f(x)$ (die Partialsummen der Fourierreihe) und $\sigma_N(x) = \sigma_N f(x)$, die nach einer Variante des Satzes von Fejér gegen $f^*(x)$ konvergieren. Für einen Beweis dieses zweiten Schritts sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Kaballo, Einführung in die Analysis I, Satz 38.18.

Die Überlegung von Dirichlet und Jordan, über eine <u>Bedingung an die Variation</u> einer Funktion die Konvergenz ihrer Fourierreihe zu erzwingen, ist in den 1920er und 1930er Jahren weiter verfolgt worden.

1924 führte Norbert Wiener für $p \in [1,\infty)$ die Funktionenklassen $V^p([a,b])$ ein (Funktionen beschränkter p-Variation), die durch die Norm

$$\|f\|_{V^p([a,b])} = \|f\|_\infty + \sup_Z \left(\sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert werden. Es gilt $V^1([a,b]) = BV([a,b])$.
Wiener konnte zeigen:

Ist $f \in V^p([-\pi,\pi])$ für ein $p \in [1,2]$, so gilt $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$. Ist f zudem stetig auf $\mathbb{T}$, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

1937 hat W. H. Young diese Aussage auf $p \in (2,\infty)$ ausgedehnt. (W. H. Young wird uns später wegen einer wichtigen nach ihm benannten Ungleichung für Faltungen noch einmal begegnen.)

Zum Abschluss dieses Abschnitts noch das angekündigte

Bsp.: Eine Funktion $f \in C(\mathbb{T})$, deren Fourierreihe in $x_0 = 0$ divergiert.

Wir starten die Konstruktion einer solchen Funktion mit zwei Folgen $(P_N)_N$ und $(Q_N)_N$ trigonometrischer Polynome

$$P_N(x) = \sum_{1 \le |k| \le N} \frac{e^{ikx}}{k} \quad \text{und} \quad Q_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{ikx}}{k}$$

Für die Q_N gilt $Q_N(0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln(N)$, während die P_N gleichmäßig beschränkt bleiben:

Beh.: $S := \sup_{|x| \leq \pi, N \in \mathbb{N}} |P_N(x)| < \infty$.

Bew.: Sei $N \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann ist für $|x| \leq \frac{2}{N}$:

$$|P_N(x)| = 2 \cdot \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{k|x|}{k} \leq \frac{4}{N} \cdot N = 4.$$

Für $\frac{2}{N} \leq |x| \leq \pi$ schätzen wir folgendermaßen ab:

$$|P_N(x)| \leq 2 \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \right| + 2 \cdot \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} \right| =: I + II$$

Aus der Übung wissen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & 0 < x \leq \pi \\ \frac{x - \pi}{2}, & -\pi \leq x < 0 \end{cases},$$

so dass $I \leq \pi$. Die Abschätzung für den Reihenrest liefert verallgemeinerte Leibniz-Kriterium, das ist – für eine monoton fallende Nullfolge $(a_k)_k$:

$$\left| \sum_{k=M}^{\infty} a_k z^k \right| \leq a_M \cdot \frac{2}{|1-z|} \qquad (z \in S^1 \setminus \{1\})$$

ergibt für $a_k = \frac{1}{k}$, $z = e^{ix}$, $\frac{2}{N} \leq |x| \leq \pi$

$$II \leq 2 \cdot \frac{1}{N+1} \frac{1}{|1 - e^{ix}|} = \frac{4}{N+1} \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{4N}{N+1} \leq 4.$$

Damit ist die "Beh." gezeigt, wobei $S \leq 4 + \pi$.

Nun definieren wir

$$f_N(x) := e^{i2Nx} \cdot P_N(x) = \sum_{1 \le |k| \le N} \frac{e^{i(k+2N)x}}{k} = \sum_{\substack{k=N \\ k \neq 2N}}^{3N} \frac{e^{ikx}}{k-2N},$$

und stellen für $S_M = \frac{1}{2\pi} D_M *$ fest, dass

$$S_M f_N(x) = \sum_{\substack{k=N \\ k \neq 2N}}^{\min(M,3N)} \frac{e^{ikx}}{k-2N} = \begin{cases} f_N(x) & : M \ge 3N \\ f_N(x) - e^{i2Nx} Q_N(x) & : M = 2N \\ 0 & : M < N. \end{cases}$$

Jetzt wählen wir für $j \in \mathbb{N}$ eine Indexfolge $N_j = 3^{2^j}$, sodass

$$N_{j+1} = 3^{2^{j+1}} = 3^{2^j \cdot 2} = (3^{2^j})^2 = N_j^2 > N_j.$$

und setzen

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} f_{N_j}(x).$$

Es gilt $|f_{N_j}(x)| = |P_{N_j}(x)| \le S$, so dass diese Funktionenreihe nach Weierstraß gleichmäßig konvergiert. Hieraus folgt $f \in C(\mathbb{T})$. Andererseits ist für $m \in \mathbb{N}$

$$S_{2N_m} f(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} S_{2N_m} f_{N_j}(0)$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} f_{N_j}(0) + \frac{1}{m^2} f_{N_m}(0) - \frac{1}{m^2} \cdot e^{i2N_m x} Q_{N_m}(0)$$

$$\Rightarrow |S_{2N_m} f(0)| \ge \frac{1}{m^2} \underbrace{|Q_{N_m}(0)|}_{\sim \ln(N_m)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2} |f_{N_j}(0)|}_{\le C}$$

$$\gtrsim \frac{2^m}{m^2} - C \longrightarrow \infty \quad (m \to \infty).$$

Also besitzt $(S_N f(0))_{N \in \mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge und ist daher selbst divergent.