Einführung: Was ist harmonische Analysis?

Harmonische Analysis ist verallgemeinerte Fourier-Analysis – und die Untersuchung einer Vielzahl von Fragestellungen, die daran anschließen. Tatsächlich handelt es sich um ein aktives, weit verzweigtes Forschungsgebiet mit vielen Verbindungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik – nicht nur der Analysis. (Daher ist eine knappe und präzise Beantwortung der Eingangsfrage geradezu unmöglich.) Was ist also Fourieranalysis, und worin besteht die Verallgemeinerung?

Fourieranalysis – im klassischen Sinn – ist die Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale. In beiden Fällen geht es darum, eine gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x)$$

in elementare Bausteine des Typs

$$x \mapsto c_\xi e^{i\xi x}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

zu zerlegen (eigentliche "Fourieranalyse") und anschließend die Funktion f aus diesen Bausteinen durch Integration

$$f(x) = \int c_\xi e^{i\xi x} \, dH(\xi)$$

zu rekonstruieren ("Fouriersynthese"). Hierbei ist H ein ~~[illegible]~~ translationsinvariantes, reguläres

Borel-Maß, das sogenannte <u>Haar-Maß</u> (mehr dazu später). ②

<u>Fourierreihen:</u> Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, so gelingt diese Rekonstruktion unter geeigneten Voraussetzungen in Form einer unendlichen Reihe:

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi e^{i\xi x} = \lim_{N \to \infty} \sum_{|\xi| \leq N} c_\xi e^{i\xi x}. \qquad (1)$$

Hier ist das Haar-Maß H einfach das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$, also $\int \varphi(\xi)\, dH(\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \varphi(\xi)$.

Die Reihe in (1) nennt man eine <u>trigonometrische Reihe.</u> Sie wird – wie üblich – aufgefaßt als Grenzfunktion der Partialsummenfolge $(S_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$, wobei

$$S_N(x) = \sum_{|\xi| \leq N} c_\xi e^{ix\xi} \qquad (2)$$

ein <u>trigonometrisches Polynom</u> ist, d.h. ein Polynom in den Variablen $z = e^{ix} \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\bar{z} (= z^{-1})$. Die Bezeichnungen "trigonometrische Reihe" bzw. "trigonometrisches Polynom" sind verständlich, wenn man sich überlegt, dass bei geeigneter Koeffizientenwahl das Polynom in (2) mit Hilfe der Sinus- u. Cosinusfunktionen geschrieben werden kann als

$$S_N(x) = \sum_{\xi=0}^{N} a_\xi \cos(\xi x) + \sum_{\xi=1}^{N} b_\xi \sin(\xi x).$$

(Entsprechendes gilt für die Reihe in (1) durch Grenzübergang $N \to \infty$.)

Bei der Reihe in (1) handelt es sich um eine Funktionenreihe. Die Existenz des Grenzwerts hängt also wesentlich vom verwendeten Konvergenzbegriff ab. Sinnvolle Betrachtungsweisen sind:

- punktweise Konvergenz (λ - f.ü.) Lebesgue-Maß
- gleichmäßige Konvergenz (= bezügl. Sup-Norm)
- Konvergenz im p-ten Mittel, $1 \le p < \infty$
  (= Konvergenz in $\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$)

und ggf. weitere (schwächere).

Nehmen wir jetzt einmal an, dass für eine gegebene 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die auf $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist, eine Darstellung wie in (1) existiert, und zwar mit gleichmäßiger Konvergenz. Dann lassen sich die Koeffizienten c_ξ mit der folgenden einfachen Überlegung bestimmen: Wir multiplizieren (1) mit e^{-ikx} $(x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$ und integrieren anschließend von $-\pi$ bis π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi e^{ix\xi} e^{-ixk} dx$$

$$\underset{\substack{\text{bei glm.}\\ \text{Konvergenz}}}{=} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\xi - k)x} dx}_{= 2\pi \delta_{\xi, k}} = 2\pi c_k ,$$

$$\text{also} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

(Das sind also unsere Kandidaten für die Koeffizienten in (1).)

Das führt auf die folgenden Begriffe:

Def.: Sei $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann heißt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

der <u>k-te Fourierkoeffizient</u> von f. Die Reihe

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} = \lim_{N\to\infty} S_N f(x)\,; \quad S_N f(x) = \sum_{|\xi| \le N} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}$$

wird als <u>Fourierreihe</u> von f bezeichnet.

<u>Bem.</u>: (1) Über die Konvergenz der Reihe ist mit dieser Definition nichts ausgesagt. Selbst wenn $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch ist, kann es vorkommen, dass die Fourierreihe auf einer abzählbaren dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ divergiert.(*) Im Fall der Divergenz ist die obige Reihe lediglich als Partialsummenfolge zu verstehen. [(*) Für eine Unstetigkeitsstelle: Du Bois-Reymond, 1876.]

(2) Jede Fourierreihe ist p.d. eine trigonometrische Reihe. Die Umkehrung gilt i.allg. nicht.

(3) Zur Konvergenz von Fourierreihen werden wir in Kap. 3 der Vorlesung u.a. zeigen:

Die Fourierreihe einer 2π-periodischen Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn

<u>Satz von Lipschitz</u>
- f Hölderstetig zu einem Exponenten $\alpha \in (0,1]$ ist (d.h.: $\exists\, C > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$),

oder

<u>Satz von Dirichlet-Jordan</u>
- f stetig und von beschränkter Schwankung ist, (d.h. $\sup_Z \sum_{k=1}^{N} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty$, wobei sich das Supremum über alle Zerlegungen $Z = \{-\pi = x_0 \le \ldots \le x_N = \pi\}$ von $[-\pi,\pi]$ erstreckt.)

[Um in den Übungen bereits bald einige interessante Anwendungen (aus der Euler-Zeit ~ 1740) behandeln zu können, betrachten wir den Satz von Lipschitz – zu Übungszwecken – als bereits bewiesen.]

<u>Historische Anmerkung</u> zu Fourierreihen <u>und</u> <u>Motivation</u> der Bezeichnung „harmonisch" sowie der Reihendarst. (1):

Periodische Funktionen beschreiben Schwingungsvorgänge, die in vielen Bereichen der Physik wichtig sind, insbesondere in der Akustik. Aus der Musik ist bekannt, dass ein Klang* entsteht durch Überlagerung

eines Grundtons, allgemeiner einer Grundschwingung $\qquad A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$

und seiner Obertöne bzw. -schwingungen $\qquad A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)$.

<u>Harmonisch</u> bedeutet hierbei: Die Frequenzen der Oberschwingungen ($k\omega$) sind ganzzahlige Vielfache der Frequenz ω der Grundschwingung.

Setzen wir $\omega = 1$, wird ein solcher Klang also gerade durch ein trigonometrisches Polynom bzw. im Grenzübergang $N \to \infty$ durch eine trigonometrische Reihe (mit Variable t) beschreiben.**

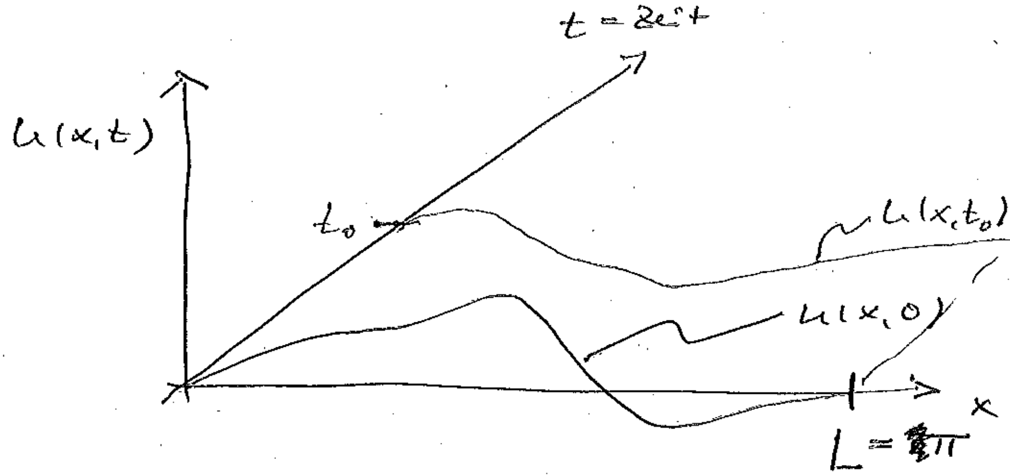
Insofern verwundert es nicht, dass am Anfang der Theorie der Fourierreihen die Untersuchung des Verhaltens einer schwingenden, eingespannten

---

* im Ggs. zum Geräusch

** In der harmonischen Analysis geht es zwar auch (in weiten Teilen um harmonische Funktionen (im mathematischen Sinne), aber das war nicht namensgebend.

Saite gehalt. Dieses Problem hat in der Zeit ~ 1740–1760 (d.h. etwa 50 Jahre vor Fourier) die wirklich großen Mathematiker der Epoche beschäftigt.



Wie entwickelt sich die Auslenkung $u(x,t)$ aus der Anfangslage $u(x,0)$ im Lauf der Zeit?

Wesentliche Beiträge zu dieser Diskussion sind:

<u>1747 : d'Alembert :</u> Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

und deren allgemeiner Lösung

$$u(x,t) = \phi(x-t) + \psi(x+t).$$

Beschreibt "laufende Wellen" und berücksichtigt <u>nicht</u> die Randbedingung $u(0,t) = u(L=\pi, t) = 0$.

(Ausbreitungsgeschwindigkeit = 1)

<u>1748/50 : Euler :</u> <u>Spezielle Lösung</u> zur Anfangsbed.

$$u(x,0) = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \ldots$$

unendliche Reihe.

ist gegeben durch

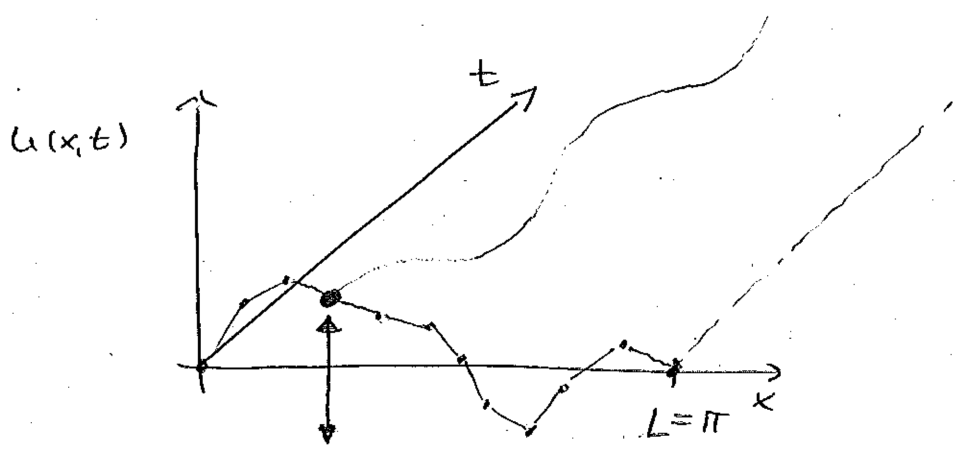
$$u(x,t) = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \gamma \ldots$$

(RWP ist auch gelöst – nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz treten auf!)

<u>1753 : Daniell Bernoulli (Sohn von Johann) :</u> Jede physikalisch sinnvolle Anfangsauslenkung ist als trigonometrische Reihe darstellbar und das AWP wie von Euler behauptet lösbar. ("Die Herren d'Alembert und Euler verschweigen diese Vielfalt der Schwingungen einer Saite.")

Was bei Euler als genialer Ansatz daherkommt, wird einige Jahre später von Lagrange mit einem Modell gerechtfertigt:

Lagrange, 1759: Schwingende Saite als Grenzfall eines Systems aus endlich vielen Massepunkten (Perlenkette), die durch Zwangskräfte miteinander gekoppelt sind.



Jeder Massepunkt bleibt in x-Richtung fest (Transversalwelle) und führt in u-Richtung sinus-förmige Schwingungen aus. Soweit lässt sich das fast der Anschauung entnehmen. Mit diesem Modell rechtfertigt Lagrange die Euler/Bernoullische Darstellung der Lösung. Wegen der Symmetrie $x \leftrightarrow t$ kann dies auch als Rechtfertigung des Eulerschen Ansatzes für die Anfangswerte angesehen werden. Jede physikalisch sinnvolle Anfangsauslenkung kann als trigonometrische Reihe angesetzt werden.

Beim Problem der schwingenden Saite führt dieses „Perlenkettenmodell" in natürliche Weise zur Auffassung der Wellenbewegung als Überlagerung der Schwingungen von Massepunkten an einem festen Ort x. Das ist beim Phänomen der Wärmeleitung in einem festen Körper keineswegs naheliegend – und genau damit befasst sich Fourier in seiner bahnbrechenden Arbeit von 1807/1822.

Fourier: "Théorie analytique de la chaleur" (1807, veröffentlicht 1822)

- Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t),$$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, Fourier betrachtet den Fall $n=2$,

u ist die Temperaturverteilung.

- Lösung der Gleichung durch "Trennung der Variablen", d.h. durch einen Produktansatz. In einer Raumdim. wäre das

$$u(x,t) = f(x)\cdot g(t), \qquad x\in I,\quad t\in[0,\infty)$$

Einsetzen in die Dgl. führt auf (für $n=1$ ist $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$!)

$$f''(x)\,g(t) = f(x)\,g'(t) \rightsquigarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \text{const},$$

Hierbei muß aus physikalischen Gründen const ≤ 0 sein, wählt man $I = [-\pi,\pi]$ (bzw. einen entsprechenden Würfel), so gelangt man zu den Lösungen

$$u_m(x,t) = e^{-m^2 t}\left(b_m \cos(mx) + c_m \sin(mx)\right),\ m\in\mathbb{N}_0,$$

die man addieren kann (die Gleichung ist linear!), um zur allgemeinen Lösung

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t)$$

zu gelangen. (Der Grenzprozess wird für die D'barkeit als unproblematisch betrachtet, was er bei dem speziellen Problem für $t>0$ auch tatsächlich ist.) Die Koeffizienten b_m und c_m können aus der anfänglichen Temperaturverteilung $u(x,0)$ bestimmt werden nach (für $m \geq 1$)

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,0) \cos(mx)\,dx, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\,dx$$

$$c_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x,0) \sin(mx)\,dx, \quad c_0 = 0.$$

Dieses etwas mühsame Verfahren ist bis heute in der Physik üblich – in vielen Fällen das einzige, was man hat. Es geht tatsächlich auf die Fourier'sche Arbeit von 1807/22 zurück. Dort sind nicht nur die Formeln für die Koeffizienten angegeben, sondern es wird auch "bewiesen", dass die o. angegebene Reihe für <u>"beliebige"</u> Funktionen konvergiert. Dabei verwendet er allerdings die glm. Stetigkeit (heutiger Begriff) von $u(\cdot,0)$.

Die Fouriersche Arbeit hat einen enormen Einfluß ausgeübt, insbesondere durch die Teile, in denen sie unpräzise ist (Funktionsbegriff, Konvergenz von Reihen, Integral). Sie führte u.a. zu folgenden Entwicklungen:

- Klärung des Funktionsbegriffs (Cauchy, Dirichlet, ..)
- Untersuchung der Reihenkonvergenz. Konvergenzbegriffe und -Kriterien für Reihen (Abel u.a.; Dirichlet und Poisson behandeln die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ nach Fouriers Methode und bemühen sich intensiv um Konvergenzfragen. In diesem Zsh. werden die heute so genannten

Dirichlet- und Poisson-Kern entwickelt, die wir später als Spezialfälle eines allgemeineren Konzepts (approximative Einheiten) diskutieren werden.)

- Entwicklung der Integrationstheorie für beschränkte Funktionen auf kompakten Intervallen (Riemann-Integral). In seiner Habilitationsschrift von 1853 (veröffentlicht 1868, nach Riemanns Tod) führt Riemann die Klasse der integrierbaren Funktionen ein und konzipiert auf den ersten 5 bis 6 Seiten das "Riemann-Integral", das bis heute in der Regel in den Anfängervorlesungen gelehrt wird. Der Titel der Riemannschen Arbeit lautet: <u>"Über die Darstellbarkeit einer Funktion als trigonometrische Reihe"</u>, und seine Zielsetzung ist zweifellos, eine möglichst große Klasse von Funktionen integrieren zu können, was notwendig ist für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Wir sehen die Fourier-Analysis* in ihrer Entstehung also eng verknüpft mit

- der math. Physik,
- den partiellen Dgl.
- der Theorie der harmonischen Funktionen (Dirichlet u. Poisson) und damit zur Funktionentheorie;
- der Integrationstheorie (später: Maß- und Integrationstheorie).

(Ende der historischen Anmerkung. Quelle: Jahnke: "Geschichte der Analysis")

---

* und damit die harmonische Analysis

Beliebige Periodenlänge und Fourierintegrale

Bisher haben wir der Einfachheit halber für periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ angenommen, dass die Periodenlänge 2π ist. Die Verallgemeinerung auf beliebige Periodenlänge $2L > 0$ ist nicht schwierig. Sei also $f(x) = f(x+2L)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dann suchen wir eine Entwicklung

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi^L \underbrace{e^{i\xi \frac{\pi}{L} x}}_{\text{diese Funktionen sind } 2L\text{-periodisch}}$$

Gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt, erhalten wir wie oben

$$\int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x} \, dx = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} c_\xi^L \underbrace{\int_{-L}^{L} e^{i(\xi - k)\frac{\pi}{L}x} \, dx}_{= 2L\, \delta_{\xi, k}} = 2L\, c_k^L,$$

also $$c_k^L = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x} \, dx =: \hat{f}^{(L)}(k).$$

Nun kann man hoffen, im Grenzwert $L \to \infty$ eine "Fourierreihe" für nichtperiodische Funktionen zu erhalten.

(Für die folgende heuristische Überlegung nehmen wir $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit großem L an.)

Eine naive Grenzwertbildung führt nicht zum Ziel.

Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, so ist – bei festem k –

$$\lim_{L \to \infty} \hat{f}^{(L)}(k) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x} \, dx$$

$$= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\chi_{(-L,L)}(x) f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x}}_{\to f(x) \text{ pktw.}} \, dx \underset{\substack{\text{Lebesgue-}\\\text{scher Kon-}\\\text{vergenzsatz}}}{=} 0$$

Dieselbe Überlegung zeigt

$$\lim_{L\to\infty} 2L\,\hat f^{(L)}(k) = \lim_{L\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-L,L)}(x)\, f(x)\, e^{-ik\frac{\pi}{L}x}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Letzteres ist zwar nicht $= 0$, aber unabhängig von k, insofern ist es nicht möglich, f hieraus zu rekonstruieren. Ausweg: Bei der Grenzwertbildung hält man nicht k, sondern $\xi = k \cdot \frac{\pi}{L}$ fest ($\Rightarrow k = \frac{\xi L}{\pi}$).

Obige Rechnung zeigt

$$\lim_{L\to\infty} 2L\,\hat f^{(L)}\left(\frac{\xi L}{\pi}\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ix\xi}\,dx =: \tilde f(\xi)$$

Nun sei L so groß, dass $\operatorname{supp} f \subset [-L,L]$. Dann gilt nach dem Satz von Lipschitz und aufgrund unserer Vor. $f \in C_c^m(\mathbb{R})$ für alle $x \in [-L,L]$:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f^{(L)}(k)\cdot e^{i\frac{k\pi}{L}x}$$ (mit glm. Konvergenz)

$$\overset{\xi = k\frac{\pi}{L}}{=} \sum_{\xi\in\frac{\pi}{L}\mathbb{Z}} \hat f^{(L)}\left(\frac{L\xi}{\pi}\right) e^{ix\xi}$$

$$= \sum_{\xi\in\frac{\pi}{L}\mathbb{Z}} \frac{1}{2L}\cdot \tilde f(\xi)\, e^{ix\xi}$$

s.o., Trägerbed.

Jetzt machen wir unsere Substitution rückgängig:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde f\left(\frac{k\pi}{L}\right) e^{ix\frac{k\pi}{L}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde f\left(\frac{k\pi}{L}\right) e^{ix\frac{k\pi}{L}}\cdot\frac{\pi}{L}$$

das können wir als Riemann-Summe eines uneigentlichen Integrals bei äquidistanter Zerlegung auffassen.

$$\xrightarrow[L\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde f(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi$$

wenn $\tilde f(\xi) \to 0$ ($|\xi|\to\infty$) hinreichend schnell. Passt für $m \geq 2$.

Das heißt: An die Stelle der Darstellung

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

einer periodischen Funktion $f (\in C^\alpha(\mathbb{R}), \alpha > 0)$ als Fourier<u>reihe</u>, tritt für $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi \,, \quad \text{wobei}$$

Fourier-Synthese

„Fourieranalyse"

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi} dx.$$

f wird also als ein Fourier<u>integral</u> dargestellt.

$\rightsquigarrow$ Für welche Funktionen f geht das?

Damit genug über (grundlegende Ideen der) Fourieranalysis – worin bestehen die <u>Verallgemeinerungen</u> in der harmonischen Analysis?

1. Man definiert die Fouriertransformation

$$f \longmapsto \hat{f}(k) \quad \text{bzw.} \quad f \mapsto \tilde{f}(\xi) \quad \text{(wie oben)}$$

nicht nur für punktweise definierte Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x)$$

sondern auch für verallgemeinerte Funktionen. Diese werden als stetige lineare Funktionale auf $C_c(\mathbb{R})$ oder $C_c^\infty(\mathbb{R})$ oder ähnlichen Funktionenräumen aufgefaßt und sind nicht mehr pkt.-weise oder auch nur lokal definiert. Ein wichtiges Beispiel sind die komplexen Radon-Maße, etwas allgemeiner die temperierten Distributionen ($\longrightarrow$ Kap. 4).

2. Man möchte beim Definitionsbereich der verallgemeinerten Funktionen, die Fourier-analysiert werden, nicht auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder den eindimensionalen Torus $\mathbb{T} := \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ (2π-periodische Funktionen können mit Funktionen auf $\mathbb{T}$ oder auf der S^1 identifiziert werden) beschränkt sein. z.B. möchte man auch Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (1 \le k \le n \in \mathbb{N})$$

untersuchen – das sind Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die in k Richtungen periodisch sind. Vollkommen beliebig dürfen die Definitionsbereiche aber auch nicht sein, wir benötigen ein Funktionensystem wie

$$(e^{i\xi x})_{\xi \in ?} \quad ,$$

die sogenannten Charaktere, mit denen wir ähnliche Rechnungen wie oben durchführen können. Insbesondere brauchen wir auf dem Definitionsbereich von f eine Inversenbildung und Translationen, kurz: Der Definitionsbereich der untersuchten Funktionen sollte eine Gruppe G sein, und in dieser Vorlesung setze ich stets voraus, dass G abelsch ist.

Um Stetigkeit einer Funktion auf G definieren zu können, muß G mit einer Topologie τ versehen sein, und man verlangt, dass τ hausdorffsch und lokalkompakt ist. Schließlich wollen wir integrieren können, und das erfordert ein Maß, was sowohl mit der Gruppenstruktur wie auch mit der Topologie verträglich ist, und das ist das sog. Haar-Maß auf einer lokal-kompakten abelschen Gruppe.

Mit diesem abstrakten Rahmen möchte ich beginnen. Dafür müssen wir ein wenig Topologie, Maßtheorie und Funktionalanalysis lernen. Dementsprechend ist

Kap. 1: Fourier-Analysis auf lokal-kompakten abelschen Gruppen (LCA-groups)

Zu bemerken ist, dass die Voraussetzung "abelsch" schon eine starke Einschränkung bedeutet – in der Regel wird in der Literatur zu "abstract harmonic analysis" auf diese Voraussetzung verzichtet. Referenz: Rudin, Walter: Fourier-Analysis on groups, chap I + appendix. (für Kap. 1)

Anschließend möchte ich mich der Interpolationstheorie zuwenden, das sind insbes. die Sätze von Riesz-Thorin und Marcinkiewicz. Dazu müssen wir noch etwas mehr über Maßtheorie wissen, Stichwort: Schwache L^p- und Lorentzräume.

Kap 2: Interpolationstheorie — Referenz: Grafakos, classical, Kap. 1.

Anschließend sollen die abstrakten Ergebnisse auf die beiden typischen Gruppen der Fourieranalysis angewendet werden, also auf "$\mathbb{T}$" und $\mathbb{R}$". Das sind

Kap 3: (Multiple) Fourierreihen. Konvergenzfragen und Anwendungen — Ref.: Grafakos, classical, Kap 3, Muscalu, Schlag Band 1, Katznelson: Introduction, Kap I-III

Kap 4: Fourier Analysis auf $\mathbb{R}^n$: Temperierte Distributionen. — Ref. Grafakos, classical, Kap. II; Stein/Weiss.