Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
01.02.2021
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

44. (1 + 1 + 2 + 2 Punkte) Aus Aufgabe 35 kennen wir die Fourier-Transformation $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$, von der wir nun beweisen möchten, dass sie nicht surjektiv ist. Zeigen Sie dazu:

(a) Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\left|\int_a^b \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi\right| \leq C$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Ist g die Fourier-Transformierte von $f \in L^1(\mathbb{R})$ und ist g eine ungerade Funktion, so ist $g(\xi) = -ic_1 \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(x\xi)dx$.

(c) Unter den in (b) genannten Voraussetzungen gilt für jedes $R > 2$:

$$\left|\int_2^R \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi\right| \leq c_1 C \|f\|_1$$

wobei C die Konstante aus Teil (a) ist.

(d) Eine ungerade stetige Funktion g, die auf $(2, \infty)$ mit $\frac{1}{\log(\xi)}$ übereinstimmt, ist nicht die Fourier-Transformierte einer L^1-Funktion.

45. (3 Punkte) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, sowie $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $p \geq 1$ und $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Zusatzfrage **(2 Punkte)**: Erweitern Sie das Ergebnis auf den Fall, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum ist, dafür aber zusätzlich $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vorausgesetzt wird.

46. (3 Punkte, Layer Cake Darstellung) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für ein $1 \leq p < \infty$. Ziel dieser Aufgabe ist es die Identität

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\})d\lambda_1(t)$$

nachzuweisen. Zeigen Sie dazu zunächst $f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{y\in X|f(y)>s\}}(x)d\lambda_1(s)$ für eine nicht-negative messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ und verwenden Sie den Satz von Tonelli.

47. (4 Punkte, Vivianisches Fenster) Bestimmen Sie die Fläche des *Vivianischen*[1] *Fensters*

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \right\},$$

das durch Schnitt der $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit dem Vollzylinder

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \right\}$$

entsteht.

Zusatzaufgabe **(3 Punkte)**: Etwas schwieriger ist die Bestimmung des Volumens des *Vivianischen Körpers*

$$\Omega_V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ und } x^2 + (y - \frac{1}{1})^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

Nutzen Sie hierfür am besten im Ursprung zentrierte Zylinderkoordinaten.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 08.02., 16.00 Uhr
Besprechung: 09./11.02., in den Übungen

[1]Vincenzo Viviani, 1622-1703, Florentinischer Mathematiker und Physiker, Schüler und Biograf Galileis