Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

Düsseldorf, den 02.05.2024

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Methoden der Analysis in der Physik“

Aufgabe 1: Andere Klammern

Beim Übergang zur QM ordnen wir dem Impuls in der Ortsdarstellung einen Operator zu, $\hat{\mathbf{p}} \to -i\hbar\nabla$. Für den Ortsoperator bleibt die Zuordnung im Ortsraum simpel, $\hat{\mathbf{r}} \to \mathbf{r}$. Für zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ schreiben wir den sog. *Kommutator* als $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ und $[\hat{x}, \hat{y}]$.

(b) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{x, p_x\}$ sowie $\{x, y\}$ und vergleichen Sie mit (a).

Aufgabe 2: Dualräume in der Physik

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. V^* bezeichne den zugehörigen Dualraum, die Menge aller linearen Abbildungen $V \to K$. In der Physik bezeichnen wir Elemente aus V als *kontravariante* Vektoren, Elemente aus V^* als *kovariante* Vektoren bzw. *Kovektoren.*

Im Folgenden betrachten wir beispielhaft die Kovektoren $\epsilon^i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, lineare Funktionale mit der Eigenschaft $\epsilon^i[\mathbf{e}_j] = \delta_{ij}$, wobei $\mathbf{e}_j$ den j-ten Einheitsvektor bezeichne. Es seien $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$.

(a) Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{e}}_1 = A\mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 = A\mathbf{e}_2$ für die Transformation

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Matrix B, mit der Sie die Vektoren $\tilde{\mathbf{e}}_1$ und $\tilde{\mathbf{e}}_2$, dargestellt in der alten Basis, in die Darstellung mittels der neuen Basis überführen können, d.h.

$$B\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} \quad \text{bzw.} \quad B\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\tilde{\mathbf{e}}_i} ,$$

wobei v_1, v_1', v_2, v_2' hier Platzhalter für die zuvor berechneten Vektorkomponenten von $\tilde{\mathbf{e}}_1$ bzw. $\tilde{\mathbf{e}}_2$ sein sollen. Der Index $\mathbf{e}_i$ soll deutlich machen, dass die Komponenten in der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ gegeben sind (analog für den Index $\tilde{\mathbf{e}}_i$ und die Basis $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\}$).

(b) Ähnlich wie bei den Vektoren können auch Kovektoren als Linearkombination von Basis-Kovektoren ausgedrückt werden, z.B. $\alpha = \alpha_1\epsilon^1 + \alpha_2\epsilon^2$ mit $\alpha_1 := \alpha[\mathbf{e}_1] = 2, \alpha_2 := \alpha[\mathbf{e}_2] = 1$. Denselben Kovektor können wir auch als $\alpha = \tilde{\alpha}_1\tilde{\epsilon}^1 + \tilde{\alpha}_2\tilde{\epsilon}^2$ für die neuen Koordinaten schreiben. Hierbei sei $\tilde{\epsilon}^i[\tilde{\mathbf{e}}_j] = \delta_{ij}$. Bestimmen Sie $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$.

(c) Mit welcher Matrix F kommen wir von der Darstellung der Kovektoren in der alten Basis zur Darstellung in der neuen Basis? Die Kovektoren können wir als Zeilenvektoren darstellen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_{\epsilon^i} F = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix}_{\tilde{\epsilon}^i} .$$

In welcher Relation stehen die Matrizen B und F jeweils zur Transformation A?