Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

Düsseldorf, den 25.04.2024

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Höhere Methoden der Analysis in der Physik“

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator (1D)

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Lagrangian

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x \ ,$$

wobei x die generalisierte Koordinate bezeichnet, und $m, \omega \in \mathbb{R}$ Konstanten seien.

(a) Berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(p, q)$ und stellen Sie Bewegungsgleichung des Systems auf.

(b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung als Superposition von Sinus- und Cosinus-Schwingungen, und setzen Sie die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $\dot{x} = 0$ ein.

(c) Wie sehen die Bahnen des Oszillators im Phasenraum (q-p-Ebene) für verschiedene Werte für x_0 aus? Was würden Sie für einen Graphen erwarten, wenn die Energie des Systems *nicht* erhalten wäre?

Aufgabe 2: Mathematisches Pendel

Betrachten wir nun das mathematische Pendel mit Hamiltonian

$$\mathcal{H}(p, \varphi) = p\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi =: E \ ,$$

wobei $m, g, l \in \mathbb{R}$ Konstanten seien.

(a) Drücken Sie den Impuls p über die Gesamtenergie E des Systems aus.

(b) Wie sehen die Linien im Phasenraum für $-mgl < E < mgl$ aus?

(c) Wie sehen die Linien im Phasenraum für $E > mgl$ aus?

Aufgabe 3: Poisson-Klammern

Der Drehimpuls $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ berechnet sich aus den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ und dem Impuls $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ gemäß $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{L_1, L_2\}$. Was stellen Sie fest?