Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Dr. Lars Reichwein

SoSe 2024
16.05.2024
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU
HÖHERE METHODEN DER ANALYSIS IN DER PHYSIK

Einige temperierte Distributionen in einer Dimension: Es seien

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \theta(x) := \chi_{(0,\infty)}(x)$$

die *Heavyside-Funktion*, $\theta^-(x) := \theta(-x)$, $\operatorname{sign}(x) := \theta(x) - \theta(-x)$ und, für $\varepsilon > 0$, $\theta_\varepsilon^\pm(x) := e^{-\varepsilon|x|}\theta(\pm x)$. (Diese messbaren und beschränkten Funktionen seien als temperierte Distributionen aufgefasst.) Zeigen Sie:

(a) $\theta = \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \theta_\varepsilon^+$ und $\theta^- = \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \theta_\varepsilon^-$.

(b) Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gelten

(i) $\widehat{\theta}[f] = \dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - i\varepsilon} dx,$

(ii) $\widehat{\theta^-}[f] = \dfrac{i}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x + i\varepsilon} dx,$

(iii) $\widehat{\operatorname{sign}}[f] = \dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{2x f(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx,$

(iv) $\widehat{\operatorname{sign}}[f] = -i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \displaystyle\int_{\varepsilon < |x|} \frac{f(x)}{x} dx.$

Hinweis zu (b), (iv): Beachten Sie, dass

$$\int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx.$$

Bitte wenden!

Bemerkung: Die hier als Fouriertransformierte auftretenden temperierten Distributionen werden für so wichtig erachtet, dass sie eigene Bezeichnungen erhalten:

$$\frac{1}{x \pm i0}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

und

$$\text{P.V.}\frac{1}{x}[f] := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon < |x|} \frac{f(x)}{x} dx.$$

P.V. steht für "principle value", damit ist der Cauchysche Hauptwert von $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x}$ gemeint.

Zusatzfrage: Was ist $\widehat{\text{P.V.}\frac{1}{x}}$?